

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 133

A2. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 51

A3. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 185

A4.

α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned} A_h &= \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x - 2 \neq 0\} = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x \neq 2\} = (2, +\infty) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Οπότε ορίζεται η $h = f \circ g$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$$

B2.

$$\text{Για } x \in (2, +\infty) \quad h'(x) = \frac{1}{x-2} (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$$

Οπότε η h \nearrow στο $(2, +\infty)$.

Άρα η h 1-1 οπότε η h αντιστρέφεται.

$$\psi = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^\psi = x-2 \Leftrightarrow x = e^\psi + 2$$

$$x > 2 \Leftrightarrow e^\psi + 2 > 2 \Leftrightarrow e^\psi > 0 \text{ ισχύει για } \psi \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Θα ισχύει: } h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h^{-1}(x) = e^x + 2$$

B3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH, x \rightarrow 2^+} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x-1} (x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Θέσαμε:

$$x-2 = u$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

με $x-2 > 0$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 2} \left[h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right] = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν $\kappa \neq 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa x) = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$ ΑΤΟΠΟ διότι η f έχει

οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$




Άρα $\kappa = 0$. Τότε $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Επειδή η $y = x$ εφάπτεται στην C_f στο $O(0,0)$ θα ισχύει $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

Γ2. i) Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f

φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
f				

Στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα

Στο $[-1, 1]$ η f είναι γν. αύξουσα

Στο $x_0 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Στο $A_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Στο $A_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Στο $A_3 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα άρα

$$f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Για $a \neq 0$ ισχύει $\frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2}$ άρα $\frac{1}{2} + a^2 \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + a^2$ είναι

αδύνατη.

Για $a = 0$ η εξίσωση γίνεται $f(x) = \frac{1}{2}$ και έχει ακριβώς μια λύση την $x = 1$

Γ3.

$$\text{i. } I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx =$$

$$\left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2}.$$

$$\text{ii. } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\ln(x^2+1)]' dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Δείξαμε } I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$$

$$\text{Για } v=0, I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$\text{Για } v=1, I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών (g παραγωγίσιμη και x πολυωνυμική). Είναι

- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ και
- $h(0) = g(0) > 0$, αφού $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in R$, οπότε σύμφωνα

με θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$, ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και είναι συνεχής (η g έχει συνεχή παράγωγο), άρα διατηρεί πρόσημο, οπότε είναι γνησίως μονότονη. Επομένως, ο αριθμός x_1 είναι μοναδικός.

Δ2.

Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ με $\kappa \in R$. Αφού η f είναι

παραγωγίσιμη ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Είναι $f(0) = 0$ και

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \cdot (g(x)+x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2 \cdot (g(x) + x)] = 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 + 1 \cdot 1 - \kappa = 3 - \kappa$, οπότε $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ3.

$$\text{Για } \kappa = 3 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

i. Για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (από εκφώνηση)

$$\text{με } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dots = \frac{(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$$

και αφού η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.

Έτσι, προκύπτει $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$.

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$, ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

Είναι $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x - 3x) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4-3\pi}{2}$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x = +\infty$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$, άρα το σύνολο τιμών της είναι

$[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)) = [0, +\infty)$, το οποίο περιέχει το $\frac{\pi}{3}$, οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω μονοτονίας) αριθμός $x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

Δ4.

i. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in [x_1, 0]$ ισχύει

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (g(x) + x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) + x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0.$$

Η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη. Έστω ότι είναι γνησίως φθίνουσα, $-1 < 0 \Rightarrow h(-1) < h(0)$, άτοπο, καθώς $h(-1) < 0$ και $h(0) > 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως, για $-1 < x_1 \leq x \leq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow h(x) \geq 0$.

ii. Είναι $E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$, διότι $f(x) \geq 0$.

Επίσης, είναι $I_1 = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = I_2$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } I &= \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \\ &= 0 - x_1^3 \cdot g(x_1) - 3 \cdot \int_{x_1}^0 (f(x) - x^3) dx = -x_1^3 \cdot (-x_1) - 3 \cdot \left(\int_{x_1}^0 f(x) dx - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 \right) = \\ &= x_1^4 - 3 \cdot I_1 + 3 \cdot \left(0 - \frac{x_1^4}{4} \right) = x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 \cdot I_1 = \frac{x_1^4}{4} - 3 \cdot I_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, είναι } I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = \\ &= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \frac{\frac{\pi^2}{9}}{2} \right) - \left(-2 \cdot 1 - \ln 1 - 0 \right) \\ &= \\ &= -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = I_1. \end{aligned}$$

Αφού είναι $I_1 = I_2$ προκύπτει ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με $I = \frac{x_1^4}{4} - 3 \cdot I_1 = \frac{x_1^4}{4} - 3 \cdot \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$.

Επιμέλεια: Γεωργακόπουλος Αθανάσιος

Κατέχος Γιώργος

Κουβούσης Παναγιώτης

Μακρίδης Κωνσταντίνος

Μπαμπέ Αφροδίτη

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος

Σάββας Νίκος