

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 99

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ 143

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128

A4.

- α) Σωστό
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$A = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x + 1 \in (0, +\infty)\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x + 1 > 0\} = \mathbb{R} \text{ οπότε ορίζεται η } f \circ g \text{ στο } \mathbb{R} \text{ και} \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(e^x + 1)$$

B2.

Για $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)'(x) = (\ln(e^x + 1))' = \frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

Οπότε η $f \circ g \nearrow$ στο \mathbb{R} επομένως 1-1 και αντιστρέψιμη

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{e^x + 1 = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln u = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{e^x + 1 = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$(f \circ g)(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\psi = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^\psi = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^\psi - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^\psi - 1)$$

$$\text{Οπότε } h(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$$

B3.

i.

$h'(x) = \frac{1}{e^x - 1} (e^x - 1)' = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$ οπότε η $h \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ Οπότε ακρότατα δεν υπάρχουν.

ii.

$$h''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \text{ οπότε η } f \text{ κοίλη στο } \mathbb{R}$$

Σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

B4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(e^x - 1)] = -\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$$

$$e^x - 1 > 0$$

Οπότε η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(e^x - 1))'}{(x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$h(x) - x = \ln(e^x - 1) - \ln e^x = \ln \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right] = \ln 1 = 0$$

Οπότε $\psi = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1$ στο $x_0 = 0$ $f'(0) = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\psi - f(0) = f'(0) - (x - 0) \Leftrightarrow \psi = x$$

Γ2.

$$f''(x) = (ax^3 + 3x^2 + x + 1)' = 3ax^2 + 6x + 1$$

Για να είναι η f κυρτή πρέπει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$3ax^2 + 6x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πρέπει $\Delta \leq 0$ και $3a > 0$.

$$\Delta = 36 - 12a \leq 0 \left\{ \begin{array}{l} -12a \leq -36 \\ a > 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a \geq 3 \\ a > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \geq 3$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή είναι $a=3$.

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{\ln(f(x) - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta\mu f(x) \cdot \frac{1}{\ln(f(x) - x)} \right] = 0 \cdot 0 = 0 \text{ διότι}$$

Θέτω $u = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right) = 0$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0} \eta\mu u = \eta\mu 0 = 0$$

$$\text{Θέτω } u = f(x) - x = \frac{3x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} = x^2 \left(\frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{2} \right) = x \cdot \frac{x^2 + 4x + 2}{4} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$$

Γ4.

$$E = \frac{1}{2} |x| |f(x)| = \frac{1}{2} x f(x) \text{ διότι } f(x) > 0 \text{ για } x > 0.$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot f(x(t))$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) \cdot f(x(t)) + x(t) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t)] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot x'(t) \cdot [f(x(t)) + x(t) f'(x(t))]$$

Για $x(t_0) = 2$ προκύπτει

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x'(t_0) \cdot [f(x(t_0)) + x(t_0) f'(x(t_0))] = \frac{1}{2} \cdot 2 [f(2) + 2f'(2)] = 102 \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$e^{f(x)-1} + x \geq \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$$

Έστω $h(x) = e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1}$ οπότε $h(x) \geq h(0)$

$$\text{Η } h \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } h'(x) = e^{f(x)-1} f'(x) + 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Οπότε η h στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\text{Από Θεώρημα Fermat } h'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(0)-1} f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -1$$

$$\text{Για } x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \alpha \text{ και } f'(0) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Δ2.

i.

Αρκεί $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $x \geq 0$ $\sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2$ ισχύει

Αν $x < 0$ $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ και $x < 0$ ισχύει

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$.

ii.

Για $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$ λόγω του (i)

Οπότε η $f \searrow$ στο \mathbb{R} .

Δ3.

Για $x = 0$ και $x = \pi$ η εξίσωση επαληθεύεται διότι $\eta\mu 0 = \eta\mu\pi = 0$

Για $x \in (0, \pi)$ $0 < \eta\mu^2 x < 1$ και $\eta\mu^2 x < 2\eta\mu^2 x < 3\eta\mu^2 x$

Θέτω $u = \eta\mu^2 x$ οπότε $u < 2u < 3u$

Φαρμική της f στο \mathbb{R} οπότε $F'(x) = f(x)$ για $x \in \mathbb{R}$. Στο $[u, 2u]$ για την F ισχύει Θ.Μ.Τ.

οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (u, 2u)$ ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2u) - F(u)}{2u - u} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(2u) - F(u)}{u}$$

Ομοίως στο $[2u, 3u]$ ισχύει Θ. Μ. Τ. οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2u, 3u)$ ώστε:

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3u) - F(2u)}{3u - 2u} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(3u) - F(2u)}{u}$$

Η $f \searrow$ στο \mathbb{R} οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1) > f(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(2u) - F(u)}{u} > \frac{F(3u) - F(2u)}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(2u) - F(u) > F(3u) - F(2u) \Leftrightarrow 2F(2u) > F(3u) + F(u)$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, \pi)$ οπότε μοναδικές ρίζες $x = 0$ και $x = \pi$.

Δ4.

Η $f \searrow$ στο \mathbb{R} οπότε για $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 1 - f(x) \geq 0$ και το « \Rightarrow » ισχύει μόνο για $x = 0$.

Έχουμε $|\eta\mu x| \leq |x|$ για $x \in \mathbb{R}$ και για $x \geq 0$

$|\eta\mu x| \leq x \Leftrightarrow -x \leq \eta\mu x \leq x \Leftrightarrow \eta\mu x - x \leq 0$ και το « \Rightarrow » ισχύει μόνο για $x = 0$

Οπότε $\eta\mu(1 - f(x)) \leq 1 - f(x)$ για $x \in [0, 1]$ και το « \Rightarrow » ισχύει μόνο για $x = 0$

Θα ισχύει $\int_0^1 x\eta\mu(1 - f(x)) dx < \int_0^1 x(1 - f(x)) dx$ (1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1 - f(x)) dx &= \int_0^1 x(1 - \sqrt{x^2 + 1} + x) dx \\ &= \int_0^1 (x + x^2 - x\sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 (x + x^2) dx - \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \end{aligned}$$

Θέτω

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2x dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u_1 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u_2 = 2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\cancel{2}}{3} \frac{\sqrt{2^3} - 1}{\cancel{2}} = \frac{5}{6} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$$

Από σχέση (1) $\int_0^1 x\eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$

Επιμέλεια:

Κουβούσης Παναγιώτης

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος