

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 105

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ 31

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 77

A4.

- α) Σωστό
- β) Λάθος
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$A_h = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 2 \in (0, +\infty)\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty) \neq \emptyset$$

Οπότε ορίζεται η $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(x - 2) - 1$$

B2.

Για $x > 2$

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$$h''(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0 \text{ άρα η } h \text{ είναι κοίλη στο } (2, +\infty).$$

B3.

$h'(x) = \frac{2}{x-2} > 0$ οπότε η h \nearrow στο $(2, +\infty)$ άρα 1-1.

- $h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$ διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [2 \ln(x-2) - 1] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 \ln u - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ θέτω } x-2=u$$

$$x-2 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(x-2) - 1] = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2 \ln u - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \text{ θέτω } x-2=u$$

Για $\psi \in h(A) = \mathbb{R}$

- $\psi = 2 \ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow \frac{\psi+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^{\frac{\psi+1}{2}} = x-2 \Leftrightarrow$

$$x = e^{\frac{\psi+1}{2}} + 2$$

Οπότε $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2$

B4.

$$\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3)(x^3 - 8) = \left(e^{\frac{x-1}{2}} - 1 \right) (x^3 - 8)$$

- Η φ συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η φ παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(-1) &= (e^0 - 1)(-9) = 0 \\ \varphi(2) &= \left(e^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \varphi(-1) = \varphi(2)$$

Οπότε ισχύει Θ. Rolle.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ οπότε συνεχής στο $x_0 = -1$.

Θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + \lambda) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda = \frac{-\alpha + \alpha}{\alpha - 1} \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Γ2.

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}$$

Η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} (*)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(e^{x+1} + x)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha x + \alpha}{(x + 1)(x + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha \cancel{(x + 1)}}{\cancel{(x + 1)}(x + \alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Οπότε (*) $\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha - 1} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(-1, 0)$ είναι:

$$\psi - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow \psi = 2(x + 1) \Leftrightarrow \psi = 2x + 2$$

Γ3.

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{x+1} + x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0$$

Όπου $\psi = x$ η πλάγια ασύμπτωτη στις C_f στο $-\infty$.

Για $x \geq -1$

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Οπότε $\psi=2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γ4.

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2 \Leftrightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2(\eta\mu x - 2) + 2$$

Θέτω $u = \eta\mu x - 2$ με $u \leq -1$ διότι:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-3 \leq \eta\mu x - 2 \leq -1$$

Οπότε $f(u) \geq 2u + 2$ για $u \leq -1$

$$f'(x) = e^{x+1} + 1 \quad f''(x) = e^{x+1} > 0 \text{ κυρτή}$$

και η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $\psi = 2x + 2$ εκτός από το σημείο επαφής $A(-1,0)$ επομένως $f(x) \geq 2x + 2$ για $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για κάθε $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ηρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

i. Για κάθε $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\psi = x_0$ έχουμε

$$|g(x) - g(x_0)| \leq (x - x_0)^2 \Leftrightarrow -|x - x_0|^2 \leq g(x) - g(x_0) \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow$$

Αν x

$$\frac{-|x - x_0|^2}{|x - x_0|} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{|x - x_0|^2}{|x - x_0|} \Leftrightarrow$$

$$-(x - x_0) \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$. Άρα,

$$g'(x_0) = 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε } g=c.$$

ii.

$$\left. \begin{aligned} g(x) = c &\Leftrightarrow f(x)\eta\mu x = c \\ x = \frac{\pi}{4} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\frac{\pi}{4} = c &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = c \Leftrightarrow c = 1 \end{aligned} \right\} f(x)\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$$

Δ2.

$$f'(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} < 0 \quad \text{Η } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα η } f \searrow \text{ στο } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε } 1-1.$$

Η f συνεχής και \searrow στο $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$$f(A) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1, +\infty) \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0 \end{aligned} \right\}$$

Δ3.

$$\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - \sqrt{2})(f(\alpha) - 2) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\text{Έστω } h(x) = (x - \sqrt{2})(f(\alpha) - 2) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$$

Η h συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$ ως πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού.

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)(f(\alpha) - 2) > 0 \text{ διότι}$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\alpha) < f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 1 < f(\alpha) < 2$$

$$h(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \text{ διότι}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} < 0$$

Οπότε $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(\sqrt{2}) < 0$ ισχύει Θ. Bolzano και η h θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

Όμως η h είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού και η ρίζα θα είναι μοναδική.

Δ4.

i. Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $1 - \sin x > 0$, $1 + \sin x > 0$ και η H είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως

πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin x} (1 - \sin x)' - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} (1 + \sin x)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin x} \cdot \eta\mu x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} (-\eta\mu x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \left(\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{2}{1 - \sin^2 x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sin^2 x} = h(x) \end{aligned}$$

ii. Εμβαδόν που προκύπτει από 2 συναρτήσεις οπότε αναζητώ σημεία τομής τους.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - 2| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - f(x)) dx \quad \text{διότι}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} \leq \eta\mu x \leq \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \geq \frac{1}{\eta\mu x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} - 2 \leq 0$$

$$\text{και} \quad h(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu x} = f(x)$$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - f(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx \\
 &= \left[2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[H(x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) - \left(H\left(\frac{\pi}{2}\right) - H\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{τιμ διότι}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H\left(\frac{\pi}{2}\right) - H\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0 - \left(\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})^2 = \ln(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Επιμέλεια:

Κουβούσης Παναγιώτης

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος