ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΙΑΤΡΙΚΕΣ – ΘΕΤΙΚΕΣ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ, ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

ΕΠΙΤΥΧΟΝΤΕΣ

Βλέπε ενότητα: «Επιτυχίες» στο site φροντιστηρίου: www.thetiko.gr

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Βλέπε ενότητα: «Προγράμματα Σπουδών» στο site φροντιστηρίου: www.thetiko.gr

-ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ-

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
2026

Αγαπητή/ έ υποψήφια/ε,

Το ΘΕΤΙΚΟ Φροντιστήριο, διανύοντας ακόμη μια χρονιά **συντονισμένων προσπαθειών** και **επιτυχημένων αποτελεσμάτων** στο φροντιστηριακό χώρο και απευθυνόμενο όχι μόνο στους μαθητές του, αλλά και στο σύνολο των υποψηφίων, **προσφέρει μια νέα πλούσια σειρά εκδόσεων – βιβλίων**.

Εκτός από την πλήρη & ολοκληρωμένη σειρά εσωτερικών εκδόσεων, οι οποίες ανανεώνονται διαρκώς, το Φροντιστήριό μας ως μια **πολύτιμη συνεισφορά** στον αγώνα όλων των υποψηφίων για τις εξετάσεις του Λυκείου, επιμελήθηκε τα εξής:

- Έκδοση **τυπολογίου – βιβλίου σύμφωνα με τη νέα ύλη** με τύπους, βασικές έννοιες και μεθοδολογία για όλα τα μαθήματα του Λυκείου.
- Έκδοση βιβλίου: «Προετοιμαστείτε για τη Γ΄ Λυκείου» με απαραίτητες γνώσεις και επαναληπτικές ασκήσεις από την Α΄ και Β΄ Λυκείου.
- Έκδοση νέου τόμου με **Διαγωνίσματα Προσομοίωσης** για όλα τα Πανελλαδικώς εξεταζόμενα μαθήματα Θετικών, Ιατρικών & Οικονομικών Σπουδών.

Επίσης σας υπενθυμίζουμε τις **πολλές** και **τακτικές εκδόσεις των 41 τελευταίων ετών**, που διανεμήθηκαν **δωρεάν** σε πλήθος μαθητών και συναδέλφων καθηγητών, σε περισσότερα από 800.000 αντίτυπα, καθώς και τη **διαρκή παρουσία** του, με **πολύ χρήσιμα προτεινόμενα θέματα**, σε συνεργασία με όλο το φάσμα του ημερήσιου Τύπου: «**Ελευθεροτυπία**» (1992), «**Μεσημβρινή**» (1992), «**Έθνος**» (1994), «**Απογευματινή**» (1994), «**Καθημερινή**» (1994), «**Αδέσμευτος Τύπος**» (1996), «**Ελευθεροτυπία**» (1996), «**Ελευθεροτυπία**» (1997), «**Ελευθεροτυπία**» (1999), «**Ελευθεροτυπία**» (2000), «**Ελευθεροτυπία**» (2001), «**Ελεύθερος Τύπος**» (2007-2008).

Επιπροσθέτως, αξιοποιώντας τη σύγχρονη τεχνολογία προσφέρουμε **ειδική έκδοση** σε **CD-ROM,** με πληροφορίες για το **ΝΕΟ ΛΥΚΕΙΟ**, πλούσιο εκπαιδευτικό υλικό για όλους τους υποψηφίους & τους συναδέλφους καθηγητές στον ιστότοπό μας:

www.thetiko.gr

Εκεί θα βρείτε:

- ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000-2025 ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ
- ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ (41ος Τόμος) ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗ ΝΕΑ ΥΛΗ
- ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΝΕΑ
- ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΕΞΟΔΟΥΣ, κάνοντας «κλικ» στον ΟΔΗΓΟ ΣΤΑΔΙΟΔΡΟΜΙΑΣ

Διεύθυνση Σπουδών

ΡΟΥΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

☎ Πληροφορίες:

210 3824659

210 3830085

210 2114118

210 2113353

Ηλεκτρονική Διεύθυνση:

www.thetiko.gr

Κτήριο 1ο & Γραμματεία:

Κάνιγγος 12, Πλ. Κάνιγγος, 4ος όροφος

Κτήριο 2ο & Γραμματεία:

Αγίας Λαύρας 95, Α. Πατήσια (σταθμός ΗΣΑΠ)

Κτήριο 3ο & Γραμματεία:

Αγίας Λαύρας 97, Α. Πατήσια (σταθμός ΗΣΑΠ)

Γραμματεία:

Βολωνάκη Κλειώ
Κουτσουμπίνα Βασιλική
Σπορέ Σοφία
Στασινοπούλου Αργυρή

- Το φροντιστήριο **«ΘΕΤΙΚΟ»** εκδίδει κάθε χρόνο πλήρη σειρά βιβλίων και φροντιστηριακών βοηθημάτων έτσι ώστε να υπάρχει απόλυτη κάλυψη των μαθητών του, όσον αφορά στο παρεχόμενο εκπαιδευτικό υλικό.
- Για την καλύτερη εξυπηρέτηση αυτού του σκοπού, στα Φροντιστήρια λειτουργεί τμήμα DTP (Desktop Publishing), στο οποίο με τη χρήση των πλέον σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών και περιφερειακών μονάδων, γίνεται η επιμέλεια της παρουσίασης όλων των εκδόσεων και των εντύπων μας.
- Για τις εκδόσεις συνεργάζονται όλοι οι καθηγητές του Φροντιστηρίου **«ΘΕΤΙΚΟ»**.

ΕΤΣΙ ΚΑΤΑΦΕΡΝΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΜΗΔΕΝΙΣΟΥΜΕ
ΤΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ «ΤΥΧΗ» ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ !

Εφαλτήριο Επιτυχίας

Το «ΘΕΤΙΚΟ»:

- ΟΡΓΑΝΩΝΕΙ τα προγράμματά του έτσι, ώστε να καλύπτουν όλα τα μαθήματα σε αριθμό ωρών, να είναι επαρκή για την εμπέδωση της εξεταστέας ύλης και απολύτως προσαρμοσμένα στο σχολικό πρόγραμμα των μαθητών.
- ΚΑΝΕΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ σε προηγούμενες απαραίτητες γνώσεις, ώστε να καλυφθούν πιθανά κενά.
- ΕΚΔΙΔΕΙ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ, με πλήθος ερωτήσεων, ώστε κάθε ιδιάζουσα περίπτωση να καλύπτεται και η προετοιμασία των υποψηφίων να γίνεται σύμφωνα με το πνεύμα και το επίπεδο των εξετάσεων.
- ΕΧΕΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΓΑ ΚΑΤΑΡΤΙΣΜΕΝΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ – ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ, που ενημερώνονται διαρκώς σχετικά με το γνωστικό τους αντικείμενο.
- ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΖΕΙ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ:
  Test εμπέδωσης της ύλης και 3ωρα διαγωνίσματα προσομοίωσης σε επίπεδο πανελλαδικών εξετάσεων.
- ΕΛΕΓΧΕΙ συνεχώς την εργατικότητα και αποδοτικότητα των μαθητών και ενημερώνει έγκαιρα τους γονείς.
- ΟΡΓΑΝΩΝΕΙ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΕ ΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΤΜΗΜΑΤΑ έτσι ώστε η διδασκαλία να αποδίδει τα μέγιστα σε κάθε μαθητή.
- ΚΑΛΥΠΤΕΙ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ με επιπλέον ώρες διδασκαλίας.
- ΕΝΗΜΕΡΩΝΕΙ τους μαθητές, για τις επαγγελματικές διεξόδους και ΒΟΗΘΑΕΙ στη σωστή συμπλήρωση του μηχανογραφικού τους.
- ΟΡΓΑΝΩΝΕΙ ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ για την αξιοποίηση του χρόνου και τον αποτελεσματικό τρόπο μελέτης.

Στο «ΘΕΤΙΚΟ», με αίσθημα ευθύνης προσφέρουμε άοκνα στους υποψηφίους ένα αποτελεσματικό έργο μέγιστης βοήθειας εδώ και 35 χρόνια και βρισκόμαστε πια στην ευχάριστη θέση να διαπιστώνουμε την αναγνώριση από χιλιάδες προηγούμενους μαθητές μας και τωρινούς επιστήμονες αλλά και από αξιόλογους συναδέλφους.

ΝΕΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ.

i $\rightarrow$ Σωστό,

ii $\rightarrow$ Λάθος (πρέπει η $f(x)$ να είναι γνησίως αύξουσα),

iii $\rightarrow$ Λάθος, π.χ. αν $f''(x) = x^2 \cdot (x-1)$, $x \in (-1,1)$ ισχύει $f''(0) = 0$ αλλά η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 0$,

iv $\rightarrow$ Λάθος,

v $\rightarrow$ Λάθος,

γιατί $-\left\{(f(1)-0) - \int_0^1 xf'(x)dx\right\} = -f(1) + \int_0^1 xf'(x)dx$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έστω $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$ (1). Τότε:

$$x_1 - 2 < x_2 - 2 \xRightarrow{e^x:\text{γνησίως αύξουσα}} e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \Rightarrow 3e^{x_1-2} < 3e^{x_1-2} (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τι1 (1) και (2) και έχουμε:

$(1) + (2) \Rightarrow x_1 + 3e^{x_1-2} < x_2 + 3e^{x_1-2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα και άρα “1-1”.

β) Για $x = 2 \xRightarrow{\text{υποθ.}} g(2) = 2 + 3 \cdot e^{2-2} \Rightarrow g(2) = 5$ (1)

Επίσης για $x = 2$ η σύνθεση γίνεται:

$$g(f(2)) = 8 - 3e^{2-2} \Rightarrow g(f(2)) = 5 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(f(2)) = g(2)$$

και αφού g είναι $''1-1''$ είναι $f(2) = 2$.

γ) Θα δείξουμε αρχικά ότι η είναι “1-1”.
Έστω $x_1, x_2 \in Af$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{\upsilon\pi o\theta}{\Longrightarrow} 8 - 3e^{x_1 - 2} = 8 - 3e^{x_2 - 2} \Rightarrow e^{x_1 - 2} = e^{x_2 - 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ και η f είναι ‘’1-1’’.
Είναι:

$$f(f(|x| - 3) + e^x - 1) = f(e^x + 1) \overset{f:1-1}{\Longrightarrow} f(|x| - 3) = 2 \Rightarrow f(|x| - 3) =$$

$$= f(2) \overset{f:1-1}{\Longrightarrow} |x| - 3 = 2 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \mp 5$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω ότι η $f(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ στο (α,β).

Θα ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Άρα από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ Άτοπο, διότι $f'(x) \neq 0$ (υπόθεση) για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Β.

i) Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Α(ρ,0) είναι:

(ε): $y - f(\rho) = f'(\rho) \cdot (x - \rho)$ ή $y = f'(\rho) \cdot (x - \rho)$.

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = f'(\rho) \cdot (x - \rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = f(x) \\ f(x) = f'(\rho) \cdot (x - \rho) \ (1) \end{array}$$

Οι λύσεις της (1) στο $[\alpha, \beta]$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την (ε). Μια λύση είναι προφανώς η $x = \rho$.

Έστω ότι υπάρχει και άλλη λύση $x = \rho'$ με $\rho' < \rho$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - f'(\rho) \cdot (x - \rho)$ με $x \in [\rho', \rho]$.

Είναι $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ', ρ), συνεχής στο $[\rho', \rho]$ και ισχύει $\varphi(\rho') = \varphi(\rho) = 0$.

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\lambda \in (\rho', \rho)$ ώστε $\varphi'(\lambda) = 0$.

Είναι $\varphi'(x)=f'(x)-f'(\rho)$.

Άρα $\varphi'(\lambda)=0 \Leftrightarrow f'(\lambda)-f'(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(\lambda)=f'(\rho)$ και επειδή $f'(x)$ είναι '1-1' θα ισχύει $\lambda=\rho$, Άτοπο.

Όμοια αν $\rho<\rho'$. Άρα το Α(ρ,0) είναι μοναδικό.

ii) Για τη συνάρτηση $f(x)$ έχουμε:

$f(x)$ συνεχής στα $[\alpha,\rho]$ και $[\rho,\beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α,ρ), (ρ,β) αφού $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Άρα από θεώρημα μέσης τιμής θα ισχύουν:

Υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\rho)$: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\rho)-f(\alpha)}{\rho-\alpha}=-\dfrac{f(\alpha)}{\rho-\alpha}$

Υπάρχει $\xi_2\in(\rho,\beta)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\rho)}{\beta-\rho}=\dfrac{f(\beta)}{\beta-\rho}$ με $f(\alpha),f(\beta)\in\mathbb{R}^*$ αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Άρα είναι:

$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}=-\dfrac{\rho-\alpha}{f(\alpha)}$ (2) και $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{\beta-\rho}{f(\beta)}$ (3).

Από (2) + (3) $\Rightarrow \dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=-\dfrac{\rho-\alpha}{f(\alpha)}+\dfrac{\beta-\rho}{f(\beta)}=$

$$\frac{-f(\beta)\cdot(\rho-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-\rho)}{f(\alpha)\cdot f(\beta)}==\frac{\cancel{\alpha\cdot f(\beta)+\beta\cdot f(\alpha)}-\rho\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)}{f(\alpha)\cdot f(\beta)}\overset{\text{υποθ.}}{=}$$

$$-\rho\left(\frac{1}{f(\alpha)}+\frac{1}{f(\beta)}\right)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

i. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$, από το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1)=0$ (1).

Είναι $x\cdot f'(x)=f(x)+x^3e^x \Leftrightarrow x\cdot f'(x)-f(x)=x^3\cdot e^x \Leftrightarrow$

$$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=x\cdot e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=xe^x+e^x-e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(x-1)e^x+e^x(x-1)' \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left[(x-1)e^x\right]' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=(x-1)\cdot e^x+c \text{ (2).}$$

Για $x=1$ έχουμε (υποθ.) $\overset{0}{\cancel{1\cdot f'(1)}}=f(1)+1^3\cdot e^1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(1)=-e$.

Άρα για $x=1$ η σχέση (2) γίνεται: $\dfrac{f(1)}{1}=\overset{0}{\cancel{(1-1)}}\cdot e^1+c \Rightarrow -e=c$

Άρα $(6x\cdot 2):\dfrac{f(x)}{x}=(x-1)e^x-e \Leftrightarrow f(x)=(x^2-x)e^x-x\cdot e$

ii. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει προφανή ρίζα $x=1$ (σχέση (1)).
Έστω ότι έχει και άλλη ρίζα $\rho>1$.
Τότε $f'(1)=f'(\rho)=0$ είναι
$f'(x)=(2x-1)\cdot e^x+(x^2-x)\cdot e^x-e=e^x\cdot(x^2+x-1)-e$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[1,\rho]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,\rho)$ για τον ίδιο λόγο με
$f''(x)=e^x\cdot(x^2+x-1)+e^x\cdot(2x+1)=e^x\cdot(x^2+3x)$.

Επίσης $f'(1)=f'(\rho)$ και από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi\in(1,\rho)$ ώστε $f''(\xi)=0$ → ΑΤΟΠΟ, διότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ρίζες $x=0$ και $x=-3$ που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f''(x)$, αφού $A_f=(0,+\infty)$.

Όμοια αν $0<\rho<1$.
Άρα η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι μοναδική.

Β. Επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\lambda]$ θα είναι '1 – 1' και επομένως αντιστρέφεται.

Έστω $f^{-1}(x)=n$, οπότε $x=f(n)$ και $dx=f'(n)dn$

Αν $x=0$ τότε $n_1=f^{-1}(0)=0$, διότι

$f(0)=0\Rightarrow f^{-1}(f(0))=f^{-1}(0)\Rightarrow 0=f^{-1}(0)$

Αν $x=\lambda$ τότε $n_2=f^{-1}(\lambda)=\lambda$, διότι $f(\lambda)=\lambda$

Άρα:

$$\int_0^{\lambda} f^{-1}(x)dx=\int_0^{\lambda} n\cdot f'(n)dn=\left[n\cdot f(n)\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}(n)'\cdot f(n)dn=$$

$$=(\lambda\cdot f(\lambda)-0\cdot f(0))-\int_0^{\lambda} f(n)dn=$$

$$=(\lambda\cdot\lambda-0)-\int_0^{\lambda} f(x)dx=\lambda^2-\int_0^{\lambda} f(x)dx$$

Άρα $\int_0^{\lambda} f^{-1}(x)dx+\int_0^{\lambda} f(x)dx=\lambda^2\Leftrightarrow\int_0^{\lambda}\left[f^{-1}(x)+f(x)\right]dx=\lambda^2$

<u>Επιμέλεια</u>: Μακρίδης Ηλίας

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ.

- **α)** Λάθος. (πρέπει να είναι και συνεχής),
- **β)** Σωστό. (Είναι μηδέν) ,
- **γ)** Λάθος (μπορεί να είναι και δίκλαδη και με τους δύο τύπους) ,
- **δ)** Λάθος, πρέπει επίσης να αλλάζει η κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0,
- **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δουλεύουμε στο διάστημα [α,f(α)], (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι α < f(α) και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano.

Θεωρώ την συνάρτηση g με τύπο g(x)=f(x)-x η οποία είναι συνεχής στο [α, f(α)] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Και g(α)=f(α)-α g(f(α))=f(f(α))-f(α) όμως f(f(α))=α οπότε έχω :
g(α)g(f(α))= $-(\mathbf{f(\alpha)-\alpha})^2 \leq \mathbf{0}$

- Αν ισχύει η ισότητα g(α)g(f(α))=0 και η g έχει ρίζα το α ή το f(α) δηλαδή η f(x)=x έχει ρίζα.
- Αν g(α).g(f(α)) < 0 τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ που ανήκει στο (α,f(α)) τέτοιο ώστε g(ξ)=0 ⇔ f(ξ)=ξ . Επομένως η εξίσωση f(x)=x έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Β.

α) Είναι $f'(x)=e^x+3x^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως αντιστρέφεται.

β) Υπολογίζουμε αρχικά το $\lim\limits_{x\to0}|\eta\mu x|^x \overset{0^0}{=} \lim\limits_{x\to0} e^{\ln|\eta\mu x|^x} = \lim\limits_{x\to0} e^{x\cdot\ln|\eta\mu x|} = e^{\lim\limits_{x\to0} x\cdot\ln|\eta\mu x|}$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\ln|\eta\mu x| = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|\eta\mu x|}{\frac{1}{x}} \overset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x}{-\frac{1}{x^2}} =$

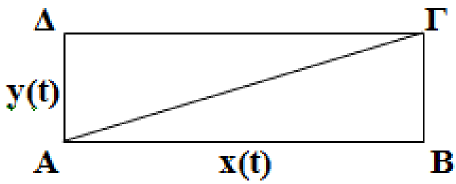
$$=-\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \overset{D.L.H}{=} -\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{0}{1}=0$$

Άρα (1) $\lim\limits_{x\to0}|\eta\mu x|^x = e^0 = 1$.

Είναι $f^{-1}(e-x)\leq 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(e-x)\right)\leq f(1) \Rightarrow \cancel{e}-x\leq \cancel{e^1}+1^3+1 \Rightarrow \boxed{x\geq-2}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έχουμε $\Pi(t)=2x(t)+2y(t)$ και



$$\Pi'(t)=2x'(t)+2y'(t)=8e^{2t}-2\Rightarrow$$
$$x'(t)+y'(t)=4e^{2t}-1\Rightarrow$$
$$\left(x(t)+y(t)\right)'=\left(2e^{2t}-t\right)'$$
$$x(t)+y(t)=2e^{2t}-t+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Για $t=0$ είναι:

$$x(0)+y(0)=2\cdot e^{2\cdot 0}-0+c\Rightarrow 7+1=2+c\Rightarrow c=6$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned}x(t)+y(t)&=2e^{2t}-t+6\\ x(t)-y(t)&=6-3t\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cdot x(t)=2e^{2t}-4t+12\Rightarrow x(t)=e^{2t}-2t+6,\quad t\geq 0$$

Οπότε $e^{2t}-2t+6+y(t)=2e^{2t}-t+6\Rightarrow y(t)=e^{2t}+t$

Β. Έχουμε $E(t)=x(t)\cdot y(t)=\left(e^{2t}-2t+6\right)\cdot\left(e^{2t}+t\right)\Rightarrow$

$$E'(t)=\left(e^{2t}-2t+6\right)'\cdot\left(e^{2t}+t\right)+\left(e^{2t}-2t+6\right)\cdot\left(e^{2t}+t\right)'\Rightarrow$$
$$E'(t)=\left(2e^{2t}-2\right)\cdot\left(e^{2t}+t\right)+\left(e^{2t}-2t+6\right)\cdot\left(2e^{2t}+1\right)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.
Θα είναι τότε: $x(t_0)=y(t_0)\Leftrightarrow 6-3t_0=0\Leftrightarrow t_0=2\sec$

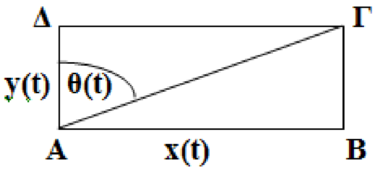
Έτσι $E'(2)=\left(2e^4-2\right)\cdot\left(e^4+2\right)+\left(e^4-4+6\right)\cdot\left(2e^4+1\right)=4e^8+7e^4-2m^2/\sec$

Γ. Έστω $\Gamma\hat{A}\Delta=\vartheta(t)$ τότε είναι

$$\varepsilon\varphi\vartheta(t)=\frac{x(t)}{y(t)}\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t)}\cdot\vartheta'(t)=\frac{x'(t)\cdot y(t)-x(t)\cdot y'(t)}{y^2(t)}$$

Όταν $t=t_0=2$ είναι $\vartheta(t_0)=45^0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\vartheta(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

και $x(t_0)=y(t_0)$.



Άρα:

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot \vartheta'(t_0)=\frac{y(t_0)\cdot\left(x'(t_0)-y'(t_0)\right)}{y^2(t_0)}\Rightarrow$$

$$\vartheta'(t_0)=\frac{\left(2\cdot e^{2\cdot 2}-2\right)-\left(2\cdot e^{2\cdot 2}+1\right)}{2\cdot\left(e^4+1\right)}=\frac{-3}{2\cdot\left(e^4+2\right)}rad/\sec$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Αν $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ τότε $f(x)=x\cdot h(x)$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot h(x)\right)=0\left(1+f(0)\right)=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1+f(0)=1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Δ2.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,1) \end{array}\right\} \text{από Θ.Μ.Τ. υπάρχει } \xi\in(0,1) \text{ ώστε}$$

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)-f(0)$$

και από την ii) $f'(0)<f'(\xi)$ με $0<\xi$ (1)

Επειδή f'' συνεχής ως παραγωγίσιμη και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Αν $f''(x)<0$ στο $\mathbb{R}$ έπεται f' γνησίως φθίνουσα: άτοπο από (1),

άρα $f''(x)>0$ στο $\mathbb{R}$ οπότε f κυρτή.

Δ3. $g(x)=f(x)-x$

$g'(x)=f'(x)-1$

$g''(x)=f''(x)>0$ στο $\mathbb{R}$.

Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$$g'(0)=f'(0)-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-1=1+f(0)-1=f(0)=0,$$

οπότε:

Για $x<0 \overset{g' \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} g'(x)<g'(0)=0$

Για $x>0 \overset{g' \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} g'(x)>g'(0)=0$

x	0		0	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	ο.ε.	↗

- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$
- Είναι $g(0)=f(0)-0=0$
- $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$:

  Διότι για $x<0 \overset{g \text{ γνησίως φθίνουσα}}{\Longrightarrow} g(x)>g(0)=0$,

  για $x>0 \overset{g \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} g(x)>g(0)=0$,

  Οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=+\infty$.

  Έτσι $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\cdot g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=+\infty$

Δ4. Για κάθε $x\in[0,2]$, $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$, άρα:

$$\int_0^2 (f(x)-x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>\int_0^2 x dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>2$$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β.

α) Θεωρία

β) Θεωρία

Γ.

α) Σωστό

β) Λάθος (ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$)

γ) Λάθος (ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$)

δ) Σωστό

ε) Λάθος (Είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της).

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1).

Τότε: $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$f^3(x_1)+f(x_1) \geq f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1}-2 \geq e^{x_2}-2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ - άτοπο .

Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f^3(x)+f(x) = e^x - 2 \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right] = e^x - 2 \overset{f^2(x)+1>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) = \frac{e^x-2}{f^2(x)+1}$.

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-2}{f^2(x)+1} = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-2}{f^2(x)+1}>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$ και αντίστοιχα $f(x)<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

γ) Είναι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα "1-1" και αντιστρέφεται.
Έχουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow y^3+y=e^x-2 \Leftrightarrow e^x=y^3+y+2=(y+1)(y^2-y+2)$ (1)
Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(y+1)(y^2-y+2)>0$ με $y^2-y+2>0$, αφού $\Delta<0$, έχουμε $y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$
Η σχέση (1) γίνεται $x=\ln(y^3+y+2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln(y^3+y+2)$, $y>-1$ άρα $f^{-1}(x)=\ln(x^3+x+2), x>-1$

δ) Επειδή η σχέση $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει: $f^3(f(x))+f(f(x))=e^{f(x)}-2$. Τότε η εξίσωση γίνεται: $f^3(f(x))+f(f(x))+1=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}-2+1=0 \Leftrightarrow$
$e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(\ln 2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=\ln 2$

ΘΕΜΑ 3ο

i. Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x$ και $f''(x)=6\alpha x+2\beta$.

Για να είναι το $A(1,2)$ σημείο καμπής της C_f πρέπει $f(1)=2$, $f''(1)=0$ και η $f''(x)$ να αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0=1$.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=2 \\ f''(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha\cdot 1^3+\beta\cdot 1^2=2 \\ 6\alpha\cdot 1+2\beta=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta=2 \\ 3\alpha+\beta=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=-1,\ \beta=3.$$

Για $\alpha=-1$ και $\beta=3$ είναι $f''(x)=-6x+6$. Άρα για $\alpha=-1$ και $\beta=3$ η C_f παρουσιάζει καμπή στο $A(1,2)$.

ii. Για $\alpha=-1$, $\beta=3$ έχουμε $f(x)=-x^3+3x^2$ και

0	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘		↗		↘	

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x\cdot(x-2)$ $f'(x)=0\Rightarrow -3x(x-2)=0\Rightarrow x=0$ ή $x=2$.

iii. Άρα η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ και τοπικό μέγιστο για $x=2$.

iv. Είναι $:\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx-\int_{\lambda}^{\mu} f(x)dx=\int_{1}^{0}(-x^3+3x^2)dx-\int_{0}^{2}(-x^3+3x^2)dx=$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_1^0-\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^2=\left(0+0+\frac{1}{4}-1\right)-(-4+8+0-0)=$$

$$=\frac{1}{4}-1+4-8=-\frac{19}{4}$$

v. Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$, γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ που είναι $f(0)=0$ και τοπικό μέγιστο για $x=2$ που είναι $f(2)=4$.

Άρα για $\rho>4$ ή $\rho<0$ η ευθεία (ε): $y=\rho$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο αφού η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση **(1)** ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **(3)**.

Από τη σχέση **(2)** προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε:

$$g^2(x)=g'(x)\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow -\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Για $x=1$ (και αφού $g(1)=-1$) : $-\frac{1}{g(1)}=1+c_1 \Rightarrow 1=1+c_1 \Rightarrow c_1=0$

Άρα: $-\frac{1}{g(x)}=x \Leftrightarrow g(x)=-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ **(4)**

Η σχέση **(3)** λόγω των σχέσεων **(2)** και **(4)** γράφεται:

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f'(x) \Rightarrow f'(x)\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x) \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)' f(x) \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=c_2 \Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ , } x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ (και αφού $f(1)=2$) είναι: $f(2)=c_2\left(1+\frac{1}{1}\right) \Leftrightarrow 2=2c_2 \Leftrightarrow c_2=1$

Άρα $f(x)=1+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

β. Στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει: $f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_1^2|f(x)-g(x)|dx=\int_1^2(f(x)-g(x))dx=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=[x+2\ln x]_1^2=1+2\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

γ. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f(x)=1+\frac{1}{x}$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$ οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή:

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} = e^1 = e$

δ. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2}$ οπότε:

$f'(x)-1=-\left(g'(x)+1\right)=-\frac{1}{x^2}-1\neq 0$ και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1,e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1}-2\ln x-3=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3,\ x\in[1,e]$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως άθροισμα συνεχών.
- $h(1)=2e^{1-1}-2\ln 1-3=2-3=-1<0$ και

  $h(e)=2e^{e-1}-2\ln e-3=2e^{e-1}-5=2\left(e^{e-1}-\frac{5}{2}\right)>0$ διότι $e>\frac{5}{2}$ και $e-1>1$. Οπότε $h(1)\cdot h(e)<0$.

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος Bolzano*, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Για κάθε $x \in (1,e)$ έχουμε:

$h'(x) = \left(2e^{x-1} - 2\ln x - 3\right)' \Rightarrow h'(x) = 2\left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) > 0$ αφού για $1 < x < e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \frac{1}{x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\frac{1}{x}>-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1} - \frac{1}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.
Β. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος (Μπορεί η C_f να πλησιάζει ασυμπτωτικά μια ευθεία παράλληλη στον xx΄)
δ) Λάθος (Η $\mathbf{f'}$ ορίζεται στο $(\mathbf{0},+\infty)$)
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η f είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)'=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι και 1-1.

Άρα υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}.

Είναι:

$$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\Leftrightarrow e^y=\sqrt{x^2+1}-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=e^y+x\Leftrightarrow$$

$$x^2+1=e^{2y}+2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=1-e^{2y}\Leftrightarrow x=\frac{1-e^{2y}}{2e^y}$$

Επομένως : $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^{2x}}{2e^x}$, με $x\in\mathbb{R}$.

β) Για το πεδίο ορισμού της f αρκεί να ισχύουν $x^2+1\geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x$ (1)

Αν $x\leq 0$, η τελευταία σχέση ισχύει προφανώς.
Αν $x>0$, τότε η σχέση είναι ισοδύναμη με την $x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$

Επομένως και η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)=-\infty\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=0$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$, δηλαδή είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε:

$$g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-f(x)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. (Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος).

Υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{-g(\beta)+g(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)$, το οποίο ισχύει, αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και $\alpha<\xi<\beta$.

Είναι $f''(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0$ για $x\in[\alpha,\beta]$

και άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $\ln(x^2-5x+7)=0\Leftrightarrow x^2-5x+7=1\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

Για $x=2$ έχουμε: $3^{f(2)}\cdot f(-1)+2^{f(2)}\cdot f(0)+5^{f(2)}\cdot f\left(1\right)=0$

- Αν $f(1)=0$ ή $f(0)=0$ ή $f(-1)=0$ η $f(x)$ έχει ρίζα $x=1$ ή $x=0$ ή $x=-1$.

- Αν $f(-1)\neq 0$, $f(0)\neq 0$, $f(1)\neq 0$ και αφού $3^{f(2)}>0$, $2^{f(2)}>0$ και $5^{f(2)}>0$ οι αριθμοί $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$ και δεν μπορεί να είναι όλοι ομόσημοι διότι έχουν άθροισμα 0.
  Άρα δύο από αυτούς π.χ. $f(-1)$ και $f(0)$ είναι ετερόσημοι.
  Άρα $f\left(-1\right)\cdot f\left(0\right)<0$ και αφού f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\left[-1,0\right]$ από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0\in\left(-1,0\right)$ ώστε $f(x_0)=0$.
  Άρα η $f(x)=0$ έχει ρίζα x_0.
  Παρατήρηση: όμοια αν θέσουμε για $x=3$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

β) Είναι $f(x)-g(x)=f''(x)-g''(x)$

- (Προσθέτω και στα δύο μέλη $f'(x)-g'(x)$)
  $f(x)-g(x)+f'(x)-g'(x)=f''(x)-g''(x)+f'(x)-g'(x)$
- (Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με e^x)

$$e^x\cdot f(x)-e^x\cdot g(x)+e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot g'(x)=e^x\cdot f''(x)-e^x\cdot g''(x)+e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot g'(x)$$

$$\left(e^x\cdot f(x)\right)'-\left(e^x\cdot g(x)\right)'=\left(e^x\cdot f'(x)\right)'-\left(e^x\cdot g'(x)\right)'$$

$$\left(e^x\cdot f(x)-e^x\cdot g(x)\right)'=\left(e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot g'(x)\right)'$$

$$e^x\cdot f(x)-e^x\cdot g(x)=e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot g'(x)+c \quad \left(\mathrm{I}\right)$$

Έστω Μ το κοινό σημείο της C_f,C_g όπου υπάρχει κοινή εφαπτομένη με τετμημένη x_0.
Θα ισχύει $f(x_0)=g\left(x_0\right)$ και $f'(x_0)=g'\left(x_0\right)$.

Άρα η $\left(\mathrm{I}\right)$ για $x=x_0$ γίνεται:

$$e^{x_0}\cdot f(x_0)-e^{x_0}\cdot g(x_0)=e^{x_0}\cdot f'(x_0)-e^{x_0}\cdot g'(x_0)+c\Rightarrow c=0.$$

Άρα $\left(\mathrm{I}\right)\Rightarrow e^x\cdot f(x)-e^x\cdot g(x)=e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot g'(x)\Rightarrow$
$f(x)-g(x)=f'(x)-g'(x)\Rightarrow g'(x)-g(x)=f'(x)-f(x)$

- (Πολλαπλασιάζω με e^{-x}):

$$e^{-x}\cdot g'(x)-e^{-x}\cdot g(x)=e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)\Rightarrow$$
$$\left(e^{-x}\cdot g(x)\right)'=\left(e^{-x}\cdot f(x)\right)'\Rightarrow$$
$$e^{-x}\cdot g(x)=e^{-x}\cdot f(x)+c_1$$

Για $x=x_0 : e^{-x_0}\cdot g(x_0)=e^{-x_0}\cdot f(x_0)+c_1\Rightarrow c_1=0$

Άρα $e^{-x}\cdot g(x)=e^{-x}\cdot f(x)\Rightarrow g(x)=f(x)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$.

Επιπλέον $g(0)=-\left(f'(0)-2f(0)\right)=0$ και

$$g(2)=12-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\frac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=0.$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[0,2]$.

β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle.
Υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

Όμως: $g'(x)=6x-\dfrac{\left(f''(x)-2f'(x)\right)e^{2x}-2e^{2x}\left(f'(x)-2f(x)\right)}{e^{4x}}=$

$$=6x-\frac{\left(f''(x)-2f'(x)\right)-2\left(f'(x)-2f(x)\right)}{e^{2x}}=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}$$

Συνεπώς

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow 6\xi-\frac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)\ \textbf{(1)}$$

γ. Αφού $\xi\in(0,2)$, από υπόθεση έχουμε $f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=\kappa\xi e^{2\xi}$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)**, με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτει $\kappa=6$, επομένως $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=6xe^{2x}$, οπότε $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c$ και επειδή $g(0)=0$, θα είναι $g(x)=0$, για κάθε $x\in[0,2]$.

δ. Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=3x^2e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=3x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x)\right)'=\left(x^3\right)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x)=x^3+c$$

Για $x=1$ βρίσκουμε $c=0$, άρα $f(x)=x^3e^{2x}$.

ε. Έχουμε:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2 \frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx=\int_1^2 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 x\left(e^{2x}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_1^2-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_1^2=\frac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)$$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

Β.

i. Λάθος

ii. Για $f(x)=(x-2)^2 \mid [0,4]$

$f(0)\cdot f(4)>0$, όμως $f(2)=0$

Γενικά με τη συνθήκη $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα για τις ρίζες της f στο $[\alpha,\beta]$.

Γ.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Σωστό
ζ. Λάθος
η. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Αν λ>2 παίρνουμε $\dfrac{\lambda^x-2^x}{\lambda^x+2^x}=\dfrac{\lambda^x\left(1-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x\right)}{\lambda^x\left(1+\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x\right)}=\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x}{1+\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x}$.

λ>2 $\Leftrightarrow 0<\dfrac{2}{\lambda}<1$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^x-2^x}{\lambda^x+2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x}{1+\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x}=1$.

Αν 0<λ<2: Παίρνουμε $\dfrac{\lambda^x-2^x}{\lambda^x+2^x}=\dfrac{2^x\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x-1\right)}{2^x\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x+1\right)}=\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x-1}{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x+1}$.

0<λ<2 $\Leftrightarrow 0<\dfrac{\lambda}{2}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^x-2^x}{\lambda^x+2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x-1}{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x+1}=-1$.

Αν λ=2 έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^x-2^x}{\lambda^x+2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-2^x}{2^x+2^x}=0$.

Β. Η f είναι συνεχής στο [-1,1] ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.
Αν η f(x)=0 δεν έχει ρίζα στο [-1,1] τότε έχουμε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$.
Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο [-1,1]
Έχουμε:
f(0)=β+γ, f(-1)=α-β+β+γ.
f(1)=α+β+β+γ.
$f(0)+f(-1)+f(1)=2\alpha+3\beta+3\gamma=0$.
Αυτό είναι άτοπο διότι οι f(0), f(-1), f(1) είναι ομόσημοι.
Άρα η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [-1,1].

Γ.

Έχουμε: $\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+h)}{h}=$

$$\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+h)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=-2\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(1)$$

$$\lim_{h\to 0}-2\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}=-2\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0))}{t}=-2f'(x_0). \quad (2)$$

Παίρνω $\left.\begin{array}{l} t=-2h \\ h\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow t\to 0$.

Άρα $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+h)}{h}\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}-2f'(x_0)-f'(x_0)=-3f'(x_0)$

Δ.

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.
Παίρνουμε

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow f(x_1)+8x_1=f(x_2)+8x_2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x_1=8x_2\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f είναι ‘1-1’.

ii) Για x=0 η $(fof)(x)=f(x)+8x$ γίνεται $f(f(0))=f(0)\underset{"1-1"}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}f(0)=0$.

ΘΕΜΑ 3ο

A.

α. $f'(x)=\frac{1}{x}+1+\frac{e}{x^2}>0$, άρα η f $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$

β. $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}x=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{e}{x}\right)=-\infty$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e}{x}\right)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

γ. Η f είναι $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$, άρα είναι “1-1” και υπάρχει η αντίστροφή της, με $A_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty)$

δ. $f^{-1}(2e-f(x))>e\Leftrightarrow 2e-f(x)>f(e)\Leftrightarrow 2e-f(x)>e\Leftrightarrow f(x)<e\Leftrightarrow$
$f(x)<f(e)\Leftrightarrow x<e$

ε. $\ln x-(ex+1)\left(\frac{e}{x}-\frac{1}{e}\right)=2\Leftrightarrow \ln x-(ex+1)\frac{e^2-x}{ex}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x-\frac{e^3x+e^2-ex^2-x}{ex}=2\Leftrightarrow \ln x-e^2-\frac{e}{x}+x+\frac{1}{e}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x+x-\frac{e}{x}=2+e^2-\frac{1}{e}\Leftrightarrow f(x)=f(e^2)\Leftrightarrow x=e^2$

B. Παίρνουμε:

$$\left|\frac{f^8(x)+g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)}\right|=\frac{f^8(x)+g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)}=$$

$$=\frac{f^8(x)}{f^6(x)+g^4(x)}+\frac{g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)}\le\frac{f^8(x)}{f^6(x)}+\frac{g^6(x)}{g^4(x)}=f^2(x)+g^2(x)$$

Δηλαδή $\left|\frac{f^8(x)+g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)}\right|\le f^2(x)+g^2(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\left(f^2(x)+g^2(x)\right) \le \frac{f^8(x)+g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)} \le f^2(x)+g^2(x).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}-\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$

Από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^8(x)+g^6(x)}{f^6(x)+g^4(x)}=0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της $f''(x)+f'(x)=1$ με την e^x:

$e^x f''(x)+e^x f'(x)=e^x \Leftrightarrow \left(e^x f'(x)\right)'=\left(e^x\right)'$.

Παίρνουμε $e^x f'(x)=e^x+c$ (1).

Για x=0 παίρνουμε $e^0 f'(0)=e^0+c \Leftrightarrow 0=1+c \Leftrightarrow c=-1$.

Η (1) γίνεται: $e^x f'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow f'(x)=1-e^{-x}$

Παίρνουμε: $f'(x)=\left(1+e^{-x}\right)'$ επομένως $f(x)=x+e^{-x}+c$ (2)

Για x=0 η (2) γίνεται $f(0)=1+c \Leftrightarrow -1=1+c \Leftrightarrow c=-2$.

Η (2) δίνει $f(x)=e^{-x}+x-2$.

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$f'(x)=-e^{-x}+1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1=0 \Leftrightarrow 1=e^{-x} \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow 1>e^{-x} \Leftrightarrow e^0>e^{-x} \Leftrightarrow 0>-x \Leftrightarrow x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1<0 \Leftrightarrow 1<e^{-x} \Leftrightarrow e^0<e^{-x} \Leftrightarrow 0<-x \Leftrightarrow x<0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		-		+	

$f''(x)=e^{-x}>0$, οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

γ) Έχουμε $f(x)=e^{-x}+x-2$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}+x-2=0$.

Από το (ii) ερώτημα έχουμε ότι $[0,+\infty)$ f: γνησίως αύξουσα.

$f(0)=e^0-2=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x-2\right)=+\infty$

Στο $[0,+\infty)$ έχουμε σύνολο τιμών $[-1,+\infty)$.

Επειδή το μηδέν ανήκει στο $[-1,+\infty)$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0,+\infty)$.

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A(0,f(0)) είναι η

$$\left.\begin{array}{r} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=-1 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-1)=0\cdot x \Leftrightarrow y+1=0.$$

Β. $\alpha^x+\delta^x=\beta^x+\gamma^x \Leftrightarrow \beta^x-\alpha^x=\delta^x-\gamma^x \Leftrightarrow \dfrac{\beta^x-\alpha^x}{\beta-\alpha}=\dfrac{\delta^x-\gamma^x}{\delta-\gamma} \quad (1)$

Έστω $f(z)=z^x$ ορισμένη στο $(0,+\infty)$

- η f συνεχής στα $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$.
- η f παραγωγίσιμη στα (α,β), (γ,δ) με $f'(z)=x\cdot z^{x-1}$

Οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\gamma,\delta)$ ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow x\cdot\xi_1^{x-1}=\dfrac{\beta^x-\alpha^x}{\beta-\alpha}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma} \Leftrightarrow x\cdot\xi_2^{x-1}=\dfrac{\delta^x-\gamma^x}{\delta-\gamma}$

Από (1): $x\cdot\xi_1^{x-1}=x\cdot\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή

$$\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Βλέπε θεωρία, θεώρημα σχολικού βιβλίου.

Β. Βλέπε ορισμός σχολικού βιβλίου.

Γ.

i. Λάθος

ii. Η $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$, $x\neq 2$ έχει $\lim\limits_{x\to 2}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{|x-2|}{x-2}\right|=1$

Όμως, το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει.

Για $x>2$: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$

Για $x<2$: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1$

Δ.

α. → Λάθος,
β. → Σωστό,
γ. → Λάθος,
δ. → Λάθος,
ε. → Σωστό,
στ. → Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

α) Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}^*$ με $\boxed{f(x_1)=f(x_2)}$ έπεται:

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 5f(f(x_1))=5f(f(x_2))\Leftrightarrow$$

$$x_1^5f(x_1)+4f(f(1))=x_2^5f(x_2)+4f(f(1))\Leftrightarrow x_1^5f(x_1)=x_2^5f(x_2)\Leftrightarrow$$

$$x_1^5=x_2^5\Leftrightarrow\boxed{x_1=x_2}.$$

Άρα η f είναι «1-1».

β) Για $x=1$ έχουμε: $5f(f(1))=f(1)+4f(f(1)) \Leftrightarrow f(f(1))=f(1)$ και επειδή f: 1-1 έπεται $f(1)=1$.

Β.

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=(x\ln x-x-1)'=\ln x+1-1=\ln x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

	0		1	
f΄	‖	−	0	+
f	‖	↘	ε	↗

$f'(x)<0$ στο (0,1) άρα f γνησίως φθίνουσα στο (0,1].

$f'(x)>0$ στο $[1,+\infty]$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$.

β) Από (α) ερώτημα έχουμε:

$f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow$

$x\ln x-x-1\geq -2 \Leftrightarrow x\ln x\geq x-1 \Leftrightarrow$

$e^{x\ln x}>e^{x-1} \Leftrightarrow x^x>e^{x-1} \qquad x>0$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

α)

$$0<\alpha<\beta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha<\beta \Rightarrow 2\alpha<\alpha+\beta \Rightarrow \alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\beta<2\beta \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f\left(\alpha\right)=\alpha\neq f\left(\beta\right)=\beta$

Από Θ.Ε.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ ώστε:

$$f\left(\xi\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2f\left(\xi\right)=\alpha+\beta$$

β) Η f είναι συνεχής στα [α,ξ] και [ξ,β]
Η f είναι παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\xi\right)$ και $\left(\xi,\beta\right)$

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχουν
$x_1\in\left(\alpha,\xi\right)$ και $x_2\in\left(\xi,\beta\right)$
ώστε $f'\left(x_1\right)=\dfrac{f\left(\xi\right)-f\left(\alpha\right)}{\xi-\alpha}$ και $f'\left(x_2\right)=\dfrac{f\left(\beta\right)-f\left(\xi\right)}{\beta-\xi}$

Παίρνουμε:

$$f'\left(x_1\right)=\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}-f\left(\alpha\right)}{\xi-\alpha}=\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2\left(\xi-\alpha\right)}=\frac{\beta-\alpha}{2\left(\xi-\alpha\right)}$$

$$f'\left(x_2\right)=\frac{f\left(\beta\right)-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\xi}=\frac{2\beta-\alpha-\beta}{2\left(\beta-\xi\right)}=\frac{\beta-\alpha}{2\left(\beta-\xi\right)}$$

$$f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)=\frac{\beta-\alpha}{2\left(\xi-\alpha\right)}+\frac{\beta-\alpha}{2\left(\beta-\xi\right)}=\frac{\beta-\alpha}{2}\left[\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\beta-\xi}\right]=$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\left(\xi-\alpha\right)\left(\beta-\xi\right)}=2\frac{\beta-\alpha}{2\left(\xi-\alpha\right)}\cdot\frac{\beta-\alpha}{2\left(\beta-\xi\right)}=2f'\left(x_1\right)f'\left(x_2\right)$$

Β. α.

i. Το σημείο Α(1,1) επαληθεύει τις f, g οπότε είναι κοινό σημείο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=x^2+2\ln x-4x+3$, η φ παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με

$$\varphi'\left(x\right)=2x+\frac{2}{x}-4=\frac{2\left(x^2+1-2x\right)}{x}=\frac{2\left(x-1\right)^2}{x}$$

↗

Για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$: $\varphi'(x) > 0$, η φ συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η φ στο $(0,+\infty)$

$\varphi(1) = 1$, άρα $x = 1$ μοναδική ρίζα

ii. $f'(x) = 2x - \dfrac{3}{x}, \quad x > 0$

$g'(x) = 4 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

Έχουμε, $f(1) = g(1) = 1$

$f'(1) = g'(1) = 5$, οπότε στο Α έχουμε κοινή εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι $\psi - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \psi = 5x - 4$

β. $x^2 + 2\ln|x| - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2\ln|x| - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2 + 3\ln|x| = 4|x| - 3 + \ln|x| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$g'(x) = \left(x^3 f(x) + 2\ln x\right)' = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) + \frac{2}{x} = \frac{3x^3 f(x) + x^4 f'(x) + 2}{x}$$

Αν $h(x) = 3x^3 f(x) + x^4 f'(x) + 2$ τότε:

$$h'(x) = 9x^2 f(x) + 3x^3 f'(x) + 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) =$$

$$= x^2\left(9f(x) + 7xf'(x) + x^2 f''(x)\right) = x^2 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow h(x) = c$, για $x = 1$ $h(1) = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow h(x) = 0$

οπότε είναι και $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$ στο $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

β.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = 1^3 f(1) + 2\ln 1 \Leftrightarrow c = f(1) \Leftrightarrow c = 1$,

οπότε $g(1) = 1$, για κάθε $x > 0$, οπότε

$x^3 f(x) + 2\ln x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

γ.

$A_f = (0,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1-2\ln x)\dfrac{1}{x^3}\right] = +\infty$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\ln x}{x^4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2\ln x)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x}}{4x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x^4} = 0,\ \boxed{\lambda=0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\ln x}{x^3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2\ln x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{3x^3} = 0,$$

$\boxed{\beta=0}$

Οπότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη προς το $+\infty$.

δ. Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(1-2\ln x)'(x^3)-(1-2\ln x)(x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}x^3 - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{-2-3(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{5/6}$

0	0		$e^{5/6}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,e^{5/6}\right]$,

άρα

$$f\left(0,e^{5/6}\right] = \left[f\left(e^{5/6}\right), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[-\frac{2}{e^{15/6}},+\infty\right)$$

f γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{5/6},+\infty\right)$,

άρα:

$$f\left(\left[e^{5/6},+\infty\right)\right)=\left[f\left(e^{5/6}\right),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-\frac{2}{3e^{15/6}},0\right)$$

Άρα $f\left((0,+\infty)\right)=\left[-\frac{2}{3e^{15/6}},+\infty\right)\cup\left[-\frac{2}{3e^{15/6}},0\right)=\left[-\frac{2}{3e^{15/6}},+\infty\right)$

ε.

$2\in f\left(\left(0,e^{5/6}\right]\right)$ άρα υπάρχει $x_1\in\left(0,e^{5/6}\right]$, ώστε $f(x_1)=2$.

Το x_1 είναι μοναδικό αφού f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,e^{5/6}\right]$

$2\notin f\left(\left[e^{5/6},+\infty\right)\right)$.

Άρα το x_1 είναι μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

στ.

Για την $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ισχύουν:

$$\left\langle\begin{array}{l}\text{f συνεχής στο } [\alpha,\beta]\\ \text{f παραγωγίσιμη στο } (\alpha,\beta) \text{ με } g'(x)=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=f(x)\end{array}\right.$$

οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$g'(\xi)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\frac{\ln\beta}{\beta^2}-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\beta^2\ln\alpha-\alpha^2\ln\beta}{\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)},$$

οπότε αρκεί να δείξω ότι: $f(\beta)<f(\xi)<f(\alpha)$,

που ισχύει αφού $\alpha<\xi<\beta$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

Β. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

Γ.

i. Λάθος

ii. Για την $f(x)=|x|$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δ.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό
στ) Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

α. Από την ισότητα:

$$f^2(0)+f^2(2)=4(f(2)-1)\Leftrightarrow f^2(0)+f^2(2)-4f(2)+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(0)+(f(2)-2)^2=0\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ και } f(2)=2$$

- η f συνεχής στο $[0,2]$
- $f(0)\neq f(2)$

Ο αριθμός 1 βρίσκεται μεταξύ των $f(0)$ και $f(2)$, οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0\in(0,2)$, ώστε $f(x_0)=1$.

β. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in [0,2]$, ώστε:

$$f(x_1) = g(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = 0$$

Θεωρούμε την $k(x) = f(x) - g(x) | [0,2]$

- η k συνεχής στο $[0,2]$ ως διαφορά συνεχών
- $\left.\begin{matrix} k(0) = f(0) - g(0) = -g(0) \le 0 \\ k(2) = f(2) - g(2) = 2 - g(2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow k(0) \cdot k(2) \le 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

➢ Αν $k(0) \cdot k(2) < 0$ τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,2)$ ώστε $k(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = 0$

➢ Αν $k(0) \cdot k(2) = 0$ τότε $k(0) = 0$ ή $k(2) = 0$ δηλαδή οι αριθμοί 0, 2 είναι λύσεις της εξίσωσης $k(x) = 0$.

Τελικά, υπάρχει $x_1 \in [0,2]$ ώστε $f(x_1) - g(x_1) = 0$

γ. Έστω $h(x) = f(x) - f(2-x)$ για $x \in [0,2]$ και

$0 \le 2 - x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le -x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$, οπότε $A_h = [0,2]$

- η h συνεχής στο $[0,2]$ ως διαφορά συνεχών
- $\left.\begin{matrix} h(0) = f(0) - f(2) = -2 < 0 \\ h(2) = f(2) - f(0) = 2 > 0 \end{matrix}\right\}$ άρα $h(0) \cdot h(2) < 0$

Ισχύει θεώρημα Bolzano, οπότε η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Η f είναι γνησίως μονότονη με $f(0) = 0 < 2 = f(2)$, άρα η f $\nearrow$ στο $[0,2]$.

Για $x_1, x_2 \in [0,2]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow f(2-x_1) > f(2-x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(2-x_1) < -f(2-x_2) \quad (1)$$

Από (1), (2) προσθέτοντας κατά μέλη:

$f(x_1)-f(2-x_1)<f(x_2)-f(2-x_2)\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$, άρα h $\nearrow$ στο $[0,2]$ οπότε έχει μοναδική ρίζα.

B.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:
$f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+2\beta x+2\gamma$

α. $\Delta=36\alpha^2-24\beta=12(3\alpha^2-2\beta)<0$ άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Οπότε η f' είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. $f'(1)=4+6\alpha+2\beta+2\gamma=0$

Για $x<1 \overset{f':\text{γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$

Για $x>1 \overset{f':\text{γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
f ΄	-		+
f	γνησίως φθίνουσα		γνησίως αύξουσα

Από τη συνέχεια της f τη μορφή της μονοτονίας.
Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$.
Το ελάχιστο είναι το $f(1)=1+2\alpha+\beta+2\gamma+\delta$

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι
$f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1+2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=$
$=2(\alpha+\gamma)+(1+\beta+\delta)>0$

ΘΕΜΑ 3ο

A.

α. Για κάθε $x\neq 0 \rightarrow \dfrac{x(f''(x)-f'(x))}{x^2}=e^x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = (e^x)' \text{ άρα } \frac{f'(x)}{x} = e^x + c$$

$$\frac{f'(1)}{1} = e + c \Leftrightarrow 0 = e + c \Leftrightarrow c = -e$$

Άρα: $\frac{f'(x)}{x} = e^x - e \Leftrightarrow f'(x) = xe^x - ex$

β. Αν $h(x) = xe^x - e^x - \frac{x^2 e}{2} + 1$ τότε:

$$h'(x) = xe^x - ex = f'(x)$$

Άρα: $f(x) = h(x) + c$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow h(0) + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Άρα: $f(x) = h(x) = xe^x - e^x - \frac{x^2 e}{2} + 1$

Β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \le 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x + \gamma^x - 3 \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le f(0)$, (όπου $f(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x - 3$)

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + \beta^x \ln\beta + \gamma^x \ln\gamma$ στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$, η f παρουσιάζει μέγιστο οπότε από θεώρημα Fermat

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha + \beta^0 \ln\beta + \gamma^0 \ln\gamma = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 1$

για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ διακρίνουμε περιπτώσεις:

i. Αν ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι μεγαλύτερος του 1, έστω ο α, τότε ένας τουλάχιστον από τους β, θα είναι μικρότερος του 1.

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ και επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^x + \beta^x + \gamma^x\right) = +\infty$ άτοπο, διότι $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \le 3$

ii. Αν ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι μικρότερος του 1, έστω α, τότε ένας τουλάχιστον από τους β, γ θα είναι μεγαλύτερος του 1, έστω ο β, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\beta^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\right)=+\infty$ άτοπο, διότι $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\le 3$, άρα $\alpha=\beta=\gamma=1$

Ομοίως και για το $x\to-\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Είναι $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{\eta\mu x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε $\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\left(-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)'\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)'$

Άρα $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2}+c$

Για $x=\pi$ →

$$\frac{1}{f(\pi)}=-\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x+3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x+3}$$

Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 2\le\sigma\upsilon\nu x+3\le 4$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ge\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+3}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow 1\ge\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x+3}\ge\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1\ge f(x)\ge\frac{1}{2}$$

Και επειδή f συνεχής → έπεται ότι : $f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

Β. $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=f(x)\Leftrightarrow \ln g(x)=f(x)$

$$0\le\left[\ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2\frac{e^\alpha}{e^\beta}\right]\le\beta-\alpha\Leftrightarrow 0\le\left[2\ln\frac{g(\beta)}{g(a)}+\ln e^{\alpha-\beta}\right]\le\beta-\alpha$$

$$\Leftrightarrow 0\le 2\ln g(\beta)-2\ln(\alpha)+\alpha-\beta\le\beta-\alpha\Leftrightarrow$$

$$\beta-\alpha \le 2\left(\ln g(\beta)-\ln g(\alpha)\right) \le 2(\beta-\alpha)$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{\ln g(\beta)-\ln g(\alpha)}{\beta-\alpha} \le 1$$

Αν $P(x)=\ln g(x)\left\langle \begin{array}{l} P \text{ συνεχής στο } [\alpha,\beta] \text{ (σύνθεση συνεχών)} \\ P \text{ παραγ. στο } (\alpha,\beta) \text{ με } p'(x)=f(x) \end{array}\right.$

Οπότε από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε:

$$p'(\xi)=\frac{p(\beta)-p(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\ln(g(\beta)-\ln(g(\alpha))}{\beta-\alpha}$$

$\frac{1}{2} \le f(\xi) \le 1$ που ισχύει αφού $f(\mathbb{R})=\left[\frac{1}{2},1\right]$

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου

Β. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 143

Γ.

i. Ψευδής

ii. Έστω $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{αν } 1<x\le 3 \\ x-1, & \text{αν } 3<x<5 \end{cases}$

Η f συνεχής στο $x_0=3$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $(3,5)$ και στο $x_0=3$, παρουσιάζει ελάχιστο $f(3)=2$. Όμως, στο $(1,3)$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ.

α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό
στ) Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι

$$f^2(0)-6f(0)+9+f^2(1)-4f(1)+4\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(0)-3)^2+(f(1)-2)^2\leq 0$$

που σημαίνει ότι $f(0)-3=0 \Leftrightarrow \boxed{f(0)=3}$ και $f(1)-2=0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=2}$

$f(0)>f(1)$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη σημαίνει ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f\left(f^{-1}\left(x^3\right)-1\right)>3 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x^3\right)-1\right)>f(0) \overset{f:\text{ γνησίως φθίνουσα}}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}\left(x^3\right)-1<0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(x^3\right)<1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x^3\right)\right)>f(1) \Leftrightarrow$

$x^3>2 \Leftrightarrow x>\sqrt[3]{2}$

γ) Είναι:

$$\begin{cases} f(0)>f\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ f(0)>f\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ f(0)>f\left(\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \\ f(1) < f\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

Αν $h(x) = 9f(x) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f\left(\frac{1}{3}\right) - 4f\left(\frac{1}{4}\right)$ τότε έχουμε:

- h συνεχής στο $[0,1]$
- $h(0) \cdot h(1) < 0$ διότι:

$$h(0) = 9f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f\left(\frac{1}{3}\right) - 4f\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 3\left(f(0) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 4\left(f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right) > 0$$

$$h(1) = 2\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 3\left(f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 4\left(f(1) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right) < 0$$

Οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ ώστε $h(\xi) = 0$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα έπεται ότι το ξ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\varphi(x) = e^x + x - 1$

$f^3(x) + f(x) = e^x + x - 1 = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$

α)

- φ: παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$ άρα η φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Για $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^3(x_1)+f(x_1)-f^3(x_2)-f(x_2)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left[f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1\right]<0\Leftrightarrow$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(*) Η παράσταση $f^2(x_1)+f(x_2)\cdot f(x_1)+\left(f^2(x_2)+1\right)$ είναι πάντα θετική αφού πρόκειται για τριώνυμο ως προς $f(x_1)$ με:

$\Delta=f^2(x_2)-4\left(f^2(x_2)+1\right)=-3f^2(x_2)-4<0$

β) Είναι $f^3(0)+f(0)=\varphi(0)=0$ άρα $f(0)\left(f^2(0)+1\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Αφού f γνησίως αύξουσα έχουμε:

Για $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)=0$

Για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		-	0	+	

γ)

- Για $x>0$ $f(x)>0$ και $f^3(x)+f(x)>f(x)$ άρα $0<f(x)<\varphi(x)$ (1)
- Για $x<0$ $f(x)<0$ και $f^3(x)+f(x)<f(x)$ άρα $\varphi(x)<f(x)<0$ (2)

$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}0=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής οι (1) και (2) δίνουν ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

δ) Για $x=1\to$ $f^3(1)+f(1)=\varphi(1)=e>2$ οπότε $\boxed{f(1)>1}$

(Διότι αν $f(1)<1\Rightarrow f^3(1)<1$ άρα $f^3(1)+f(1)<2$ → Άτοπο).

Η f γνησίως αύξουσα άρα για $x>1\Rightarrow f(x)>f(1)>1$ που σημαίνει ότι είναι:

$f^3(x)>f(x)$.

Έτσι $f^3(x)+f^3(x)>f^3(x)+f(x)\Rightarrow 2f^3(x)>\varphi(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f^3(x)>\frac{1}{2}\varphi(x)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\varphi(x)\right)=+\infty$.

Έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^3(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f^3(x)}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

B.

α) Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι:

$$\frac{f'(x)\eta\mu x-f(x)(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)'=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$$

Οπότε $\frac{f(x)}{\eta\mu x}=ce^x\Leftrightarrow f(x)=c(\eta\mu x)e^x$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot c\cancel{e^{\frac{\pi}{4}}}=\cancel{e^{\frac{\pi}{4}}}\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow\boxed{c=1}$$ οπότε $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$

β) $f(x)=0\Leftrightarrow e^x\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z}$

Όμως, $x\in(0,\pi)$ οπότε δεν υπάρχουν σημεία.

γ) $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1$

$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$, οπότε $x=\frac{3\pi}{4}$ ή $x=\frac{7\pi}{4}$

x	0 … $\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$ … $\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$ … 2π
Επιλεγμένος αριθμός	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
Πρόσημο	+	–	+

Οπότε στα $\left(0,\frac{5\pi}{4}\right),\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ $f'(x)>0$

στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$ $f'(x)<0$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=\frac{1}{1-x}(1-x)'-1=\frac{1}{x-1}-1<0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για την $h(x)-x=f(x)$ έχουμε ότι $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της f , η C_h τέμνει την $y=x$ μόνο στο O(0,0).

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι 1-1 οπότε υπάρχει η f^{-1} και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής είναι:

$f\left(2021+f^{-1}(x)\right)=0 \Leftrightarrow$

$f\left(2021+f^{-1}(x)\right)=f(0) \Leftrightarrow$

$2021+f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x)=-2021$

άρα $x=f(-2021)=\ln 2021+2021$

δ) $A_f=(-\infty,1), A_g=\mathbb{R}$

- $A_{gof}=\{x\in(-\infty,1)/f(x)\in\mathbb{R}\}=(-\infty,1)$

  $(gof)(x)=g(f(x))=1-e^{\ln(1-x)-x}=1-\frac{1-x}{e^x}=\frac{e^x+x-1}{e^x}$

- $A_{fog}=\{x\in\mathbb{R}/1-e^x<1\}=\mathbb{R}$

  $(fog)(x)=f(g(x))=\ln\left(1-1+e^x\right)-1+e^x=x-1+e^x=$

$= e^{x}\left(gof\right)(x)$ στο $(-\infty,1)$.

x	1-e	0	$+\infty$
f	+	0	-

B.

i. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη, οπότε:

$\left(f(4-x)\right)' = \left(f(2+x)\right)' \Leftrightarrow f'(4-x)(4-x)' = f'(2+x)(x+2)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f'(4-x) = f'(2+x)$

Για $x=1$: $\Leftrightarrow -f'(3) = f'(3) \Leftrightarrow 2f'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(3) = 0$, άρα $x=3$ ρίζα της $f'(x)=0$

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $\rho > 3$, τότε στο $[3,\rho]$ για την f' ισχύει θεώρημα Rolle οπότε $\xi \in (3,\rho)$ ώστε $f'(\xi)=0$, άτοπο.

Ομοίως, αν $\rho < 3$

Άρα, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x=3$

ii. $f''(x) \neq 0$ και f'' συνεχής, τότε η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f γνησίως μονότονη.

Για την f στο $[0,2]$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 0$$

Για την f' στο $[\xi,3]$ ισχύει Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi_2 \in (\xi_1,3)$, ώστε $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(3)-f'(\xi_1)}{3-\xi_1} \Leftrightarrow f''(\xi_2) = \dfrac{-f'(\xi_1)}{3-\xi_1} > 0,$ οπότε

$f'' > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Για $0 < x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(3) = 0,$ άρα η f $\searrow$ στο $[0,3]$

Για $3 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > f'(3) = 0,$ άρα η f $\nearrow$ στο $[0,3]$

Οι θέσεις των ακροτάτων είναι $x=0,\ x=3,\ x=4$

$$\left.\begin{array}{l} 0<3 \Rightarrow f(0)>f(3) \\ 3<4 \Rightarrow f(3)<f(4) \\ \text{από την αρχική για } x=2 \text{ προκύπτει } f(2)<f(4) \end{array}\right\} f(3)<f(4)=f(2)<f(0)$$

x	0	3 4
f'	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Ελάχιστο για $x=0$ το $f(3)$

Μέγιστο για $x=0$ το $f(0)$

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος, Ρούτης Κωνσταντίνος

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3.

i. Λάθος,

ii. Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ για τα x κοντά στο 0, $f(x)>0$, όμως

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

Α4.

α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ.

i. Λάθος

ii. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

i. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)'=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι και '1-1'. Άρα υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}.

Είναι:

$$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\Leftrightarrow e^y=\sqrt{x^2+1}-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=e^y+x\Leftrightarrow$$

$$x^2+1=e^{2y}+2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=1-e^{2y}\Leftrightarrow x=\frac{1-e^{2y}}{2e^y}$$

Επομένως

$$f^{-1}(x)=\frac{1-e^{2x}}{2e^x}$$, με $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για το πεδίο ορισμού της f αρκεί να ισχύουν $x^2+1\geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x$ (1)

Αν $x\leq 0$, η τελευταία σχέση ισχύει προφανώς.

Αν $x>0$, τότε η σχέση είναι ισοδύναμη με την $x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$
Επομένως και η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)=-\infty\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=0$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$, δηλαδή είναι το $\mathbb{R}$.

iii. Έχουμε:

$$g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-f(x)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. (Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος).

Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{-g(\beta)+g(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)$, το οποίο ισχύει, αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\alpha<\xi<\beta$.

(Είναι $f''(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$ >0 για $x\in[\alpha,\beta]$ και άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα).

Β2.

i. Η f' είναι ορισμένη στο $[0,5]$

x	0	2	4	5
f'	+	+	−	

ii.

$x \in (0,2)\cup(2,4): f'(x)>0$ άρα, η f $\nearrow$ στο $[0,4]$.

$x \in (4,5): f'(x)<0$ άρα, η f $\searrow$ στο $[4,5]$.

Για $x_1=0$ και $x_2=5$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Για $x_3=4$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

iii.

α΄ Τρόπος:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\text{συν}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-\text{συν}x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x-1}{x}=f'(0)-0=f'(0)=0$$

β΄ Τρόπος:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\text{συν}x}{x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\left(f'(x)+\text{ημ}x\right)=f'(0)=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x>0$ και $\ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της είναι $D_f=[1,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $D_f=[1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

Για $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2x\cdot\sqrt{\ln x}}>0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο 1 είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=[1,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1)=0$.

Γ2. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της με τετμημένη x_0, με $x_0\in(1,+\infty)$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Είναι $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - \sqrt{\ln x_0} = \dfrac{1}{2x_0\cdot\sqrt{\ln x_0}}\cdot(x - x_0)$,

Αφού η ε διέρχεται από το O(0,0) ισχύει:

$$0 - \sqrt{\ln x_0} = \frac{1}{2x_0\cdot\sqrt{\ln x_0}}\cdot(0 - x_0) \Leftrightarrow -\sqrt{\ln x_0} = \frac{1}{2x_0\cdot\sqrt{\ln x_0}}\cdot(-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\ln x_0} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln x_0}} \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Έτσι η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \sqrt{e}$ είναι

$$\varepsilon: y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})\cdot(x - \sqrt{e}) \Leftrightarrow y - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot(x - \sqrt{e})$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\cdot x.$$

Γ3.

$$f^2(x) \le f(x) \Leftrightarrow \ln x \le \sqrt{\ln x} \Leftrightarrow \ln^2 x \le \ln x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 \le \ln x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le e$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. α. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x > -1$ και είναι συνεχής στο $D_f = (-1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x+1} > 0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = (-1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων με $f''(x) = e^x - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{e^x(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$.

Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = e^x(x+1)^2 - 1$, παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων με $h'(x) = e^x(x+1)^2 + e^x\cdot 2(x+1) = \ldots = e^x(x^2 + 4x + 3)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = -1$.

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^2+4x+3>0 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>-1$.

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x^2+4x+3<0 \Leftrightarrow -3<x<-1$.

Αφού ο παρονομαστής της f'' είναι θετικός το πρόσημό της προκύπτει από το πρόσημο της $h(x)$.

Αφού για $x>-1$ είναι $h'(x)>0$ η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι $x>0 \Rightarrow h(x)>h(0)=0$ και $-1<x<0 \Rightarrow h(x)<h(0)=0$,
άρα $f''(x)>0$ για $x>0$ και $f''(x)<0$ για $-1<x<0$, συνεπώς $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $f'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$.

Δ1. β. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

Για $x>0$ η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e^0+\dfrac{1}{0+1}=2=g(0)$,
άρα η g είναι συνεχής στο ο, οπότε είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_g=[0,+\infty)$.

Για $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=....=\frac{x\cdot e^x+\dfrac{x}{x+1}-e^x+1-\ln(x+1)}{x^2}.$$

Θεωρώ συνάρτηση $k(x)=x\cdot e^x+\dfrac{x}{x+1}-e^x+1-\ln(x+1)$, με $x>-1$ και $k(x)=0$.

Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$k'(x)=....=x\cdot(e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2})=x\cdot f''(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Αφού η k είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Έτσι είναι $x>0 \Rightarrow k(x)>k(0)=0$, άρα $g'(x)>0$ και αφού η g είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ1. γ. Για να υπολογίσω το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\etaμ\left(f(x)\right)\cdot\ln\dfrac{1}{f(x)}\right]$ θέτω $u=f(x)$ και έχω $u_0=\lim\limits_{x\to 0^+}u=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$.

Έτσι το ζητούμενο όριο, γράφεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\etaμ\left(f(x)\right)\cdot\ln\frac{1}{f(x)}\right]=-\lim_{u\to 0}\left(\etaμu\cdot\ln u\right)=-\lim_{u\to 0}\left(\frac{\etaμu}{u}\cdot\left(u\ln u\right)\right)=0,$$ διότι

$$\lim_{u\to 0}\frac{\etaμu}{u}=1 \text{ και } \lim_{u\to 0}\left(u\cdot\ln u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0}(-u)=0$$

Δ2.

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{1}=e$

Διότι, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)-\ln 1}{x+1-1}\overset{\text{θέτω } u=x+1}{=}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\ln u-\ln 1}{u-1}=1$

$f(0)=e$, άρα η f συνεχής στο $x_0=0$.

ii. $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right)'=e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]'=e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left[\left(\ln(x+1)\right)'\cdot x-(x)'\ln(x+1)\right]=$$
$$=e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\cdot\left[\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]$$

Έστω $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\,|\,(0,+\infty)$

$$h'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=-\frac{x}{(x+1)^2}<0$$

Άρα, h ↘ , οπότε για $x>0\Rightarrow h(x)<h(0)\Rightarrow h(x)<0$

και $f'(x)<0$, οπότε η f ↘ στο $[0,+\infty)$

iii. $g'(x)=e^x-2x,\quad x\in\mathbb{R}$

$$g''(x)=e^x-2$$
$$g''(x)=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
g''	$-$	$+$	
g'	$\searrow$	$\nearrow$	

Άρα η g' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\ln 2$ και θα ισχύει:

$$g'(x)\geq g'(\ln 2) \Leftrightarrow g'(x)\geq e^{\ln 2}-2\ln 2 \Leftrightarrow g'(x)\geq 2-2\ln 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g'(x)\geq 2(1-\ln 2)>0$$

Άρα, g $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

iv. Αρκεί για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,2]$ με $x_1\neq x_2 \Rightarrow k(x_1)\neq k(x_2)$

- Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1\neq x_2 \Rightarrow g(x_1)\neq g(x_2)$ διότι η είναι g $\nearrow$
- Για κάθε $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ διότι η f είναι $\searrow$
- Για $x_1(-\infty,0)$

  $x_2\in[0,2]$

Βρίσκουμε τα σύνολα τιμών.

$$f([0,2])=[f(2),f(0)]=[\sqrt{3},e]$$

$$g((-\infty,0))=\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),\lim_{x\to 0^-}g(x)\right)=(-\infty,0)$$

Διότι, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2-1)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-x^2+1)=e^0-0-1=0$$

Επειδή, $f([0,2])\neq g((-\infty,0))$, έχουμε $f(x_1)\neq g(x_2)$.

Επομένως, η k είναι “1-1”.

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1, Α2: Θεωρία

Α3. Λάθος. Η $f(x) = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει ακρότατα αλλά $f'(0) = 0$.

Α4.

i) Λάθος Η $f(x) = \beta$ δεν είναι ‘1-1’.

ii) Σωστό αφού ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.

iii) Λάθος πχ. $f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$

iv) Λάθος εκτός του σημείου επαφής.

v) Λάθος πρέπει $c > 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η f είναι είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $[-\pi, \pi]$ και για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ είναι $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$. Άρα $f'(x) > 0$ για $x \in (-\pi, \pi)$ και f συνεχής στο $-\pi$ και π άρα f γνήσια αύξουσα $[-\pi, \pi]$.
Αφού f συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[-\pi, \pi]$, το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(-\pi), f(\pi)] = [-\pi, \pi]$. Για $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε:
$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
$x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Β2. $A = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \{x \in [-\pi, \pi] \,|\, f(x) > 0\} = (0, \pi] \neq \emptyset$
Άρα $(g \circ f)(x) = \ln(x + \eta\mu x)\,, x \in (0, \pi]$

Β3. Για $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε: $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = -\frac{\pi}{2}$
Έχουμε τις εξής εφαπτομένες:

$$\varepsilon_1: y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + 1$$

$$\varepsilon_2: y - f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Β4. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$L_1 = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\eta\mu h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}\cdot\frac{h}{\eta\mu h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\left(2\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h} - \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}\right)\cdot\frac{h}{\eta\mu h}\right)$$

$$= \left(2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 1 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

διότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h} =^{y=2h} \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Στο τρίγωνο ΑΝΜ είναι $\varepsilon\varphi\left(N\hat{A}M\right) = \frac{NM}{x}$ και στο τρίγωνο ΑΕΒ είναι $\varepsilon\varphi\left(E\hat{A}B\right) = \frac{EB}{AB}$

Άρα $\frac{NM}{x} = \frac{EB}{AB} \Leftrightarrow \frac{NM}{x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow NM = 2x$

Αν $0 < x \leq 1$ τότε $E(x) = \frac{1}{2}AM\cdot MN = \frac{1}{2}x\cdot 2x = x^2$

Αν $1 < x \leq 3$ τότε $E(x) = (ABE) + (x-1)\cdot 2 = 2x - 1$

Οπότε $E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{αν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Γ2. Στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ και $(1,3]$ η E είναι συνεχή ως πολυωνυμική και αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} E(x) = E(1) = 1$, η E είναι συνεχής και στο 1.

Άρα συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Είναι $E'(x) = 2x$ για $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $E'(x) = 2$ για $x \in (1,3)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{E(x)-E(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{E(x)-E(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = 2$

Άρα $E'(1) = 2$ οπότε η E είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ και επομένως ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ.

Γ3. α) Είναι $E'(x) > 0$ για $x \in (0,3)$ και E συνεχής στο $(0,3]$ άρα E γνήσια αύξουσα στο $(0,3]$ και το $E(3) = 5$ είναι μέγιστο.

β) Θέτουμε $h(x) = E(x) + \ln x$ για $x \in (0,3]$. Είναι $h'(x) > 0$ για $x \in (0,3)$ και h συνεχής στο $(0,3]$ άρα h γνήσια αύξουσα στο $(0,3]$ και το σύνολο τιμών της h είναι το:

$$h\big((0,3]\big) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h(3)\right] = (-\infty, 5 + \ln 3]$$

Το $0 \in h\big((0,3]\big)$ άρα υπάρχει $\rho \in (0,3)$, μοναδικό διότι h γνησίως αύξουσα , τέτοιο ώστε $h(\rho) = 0$

Γ4. Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$ άρα και 1-1. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών σε κάθε κλάδο και την αντίστροφη σε κάθε κλάδο και είναι:

$$E^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{αν } 1 < x \le 5 \end{cases}$$

Γ5. $g^2(x) = [E(x)-1]^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |E(x)-1|$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = 1 \Leftrightarrow E(x) = E(1) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x = 1$

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3]$ και η g είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,3]$, άρα η g διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,3]$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις για το πρόσημο και τον τύπο της g.

- Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3]$ τότε

$$g(x) = |E(x)-1| \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ 2x-2, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

- Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3]$ τότε από (1) και (2),

$$g(x) = -|E(x)-1| \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{αν } 0<x\leq 1 \\ 2-2x, & \text{αν } 1<x\leq 3 \end{cases}$$

- Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(1,3]$ τότε είναι $g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{αν } 0<x\leq 1 \\ 2-2x, & \text{αν } 1<x\leq 3 \end{cases}$
- Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(1,3]$ τότε είναι $g(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{αν } 0<x\leq 1 \\ 2x-2, & \text{αν } 1<x\leq 3 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η f είναι περιττή άρα $f(-x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Είναι $g'(x)>0$ για $x>-1$ και άρα g γνήσια αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι

$g\big((-1,+\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x\to -1^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = \mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{1-f'(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$ άρα το $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{f'(x)}$ δεν υπάρχει.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

Για $x>0$ είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{|g(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{g(x)} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)} \leq \frac{1}{g(x)}$

και από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}\right) = 0$

Δ2. α) g γνήσια αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ άρα και 1-1. Είναι

$$g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=g(0) \overset{g\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x=0$$

β) Η εφαπτομένη είναι η $y=x$. Αφού ισχύει

$\begin{cases} g(0)=f(0)=0 \\ g'(0)=f'(0)=1 \end{cases}$, η $y=x$ είναι κοινή εφαπτομένη στο $(0,0)$.

Δ3. α) Η μονοτονία τα ακρότατα της f και το σύνολο τιμών της f, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-1)$ τ.μ.	$\nearrow$	$f(1)$ τ.ε	$\searrow$	0

Αφού η f είναι περιττή ισχύει $f(-1)+f(1)=0$, και f γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Εφόσον $f(0)=0$ είναι

$-1<0<1 \Rightarrow f(-1)<f(0)<f(1) \Rightarrow f(-1)<0<f(1)$

Στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[f(-1),0)$ άρα $f(x)<0$ για $x\leq -1$

Στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,f(1)]$ άρα $f(x)>0$ για $x\geq 1$.

Τελικά η ρίζα της f είναι στο $(-1,1)$ και είναι το 0 και αφού f γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ είναι μοναδική.

β) Από το ΘΜΤ για την f στο $[x,x+1]$ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$. Όμως από το σχήμα είναι $f'(x)\leq 1$ άρα και $f'(\xi)\leq 1$.

Δ4. Θέτουμε

$$d(x)=(x-2)\big(2g(3)-g(x)-g(5)\big)+(x-1)\big(1-f(-1)-f(x)\big)$$

Είναι $d(1)=-\big(2g(3)-g(1)-g(5)\big)$ και

$d(2)=1-f(-1)-f(2)=1+f(1)-f(2)$

• Από το ΘΜΤ για την g στο $[1,3]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g'(\rho_1)=\frac{g(3)-g(1)}{2}$

Από το ΘΜΤ για την g στο $[3,5]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $g'(\rho_2)=\frac{g(5)-g(3)}{2}$

Από το σχήμα η g' είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$\rho_1<\rho_2 \Rightarrow g'(\rho_1)>g'(\rho_2) \Rightarrow \frac{g(3)-g(1)}{2}>\frac{g(5)-g(3)}{2} \Rightarrow$$
$$2g(3)>g(1)+g(5)$$

άρα $d(1)<0$

• Από το σχήμα και το β) του Δ3 είναι για $x>0$: $f(x+1)<1+f(x)$
Άρα $1+f(1)-f(2)>0$
Άρα $d(1)d(2)<0$ και d συνεχής στο $[1,2]$ οπότε από το Θεώρημα Bolzano έπεται το ζητούμενο.

Δ5. Θέτουμε $k(x)=f(x)-x$, συνεχής και για $x>0$ είναι
$k'(x)=f'(x)-1<0$ (σχήμα) άρα k γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και $k(0)=0$. Οπότε

$$x>0 \Leftrightarrow k(x)<k(0) \Leftrightarrow k(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<x$$

$2019+f(-2019)=2019-f(2019)>0$ αφού $f(x)<x$ για $x>0$

Από το σχήμα g' είναι γνησίως φθίνουσα και $g'(0)=1$.
Οπότε $x>0 \Rightarrow g'(x)<g'(0) \Rightarrow g'(x)<1$
αν $T(x)=g(x)-x$ τότε T συνεχής στο 0 και $T'(x)=g'(x)-1<0$ για $x>0$ άρα T γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$
Άρα για $x>0$ είναι $T(x)<T(0) \Rightarrow g(x)<x$
Η C_g είναι συμμετρική της $C_{g^{-1}}$ ως προς την $y=x$ και αφού $g(x)<x$ για $x>0$, θα είναι $g^{-1}(x)>x$ για κάθε $x>0$. Άρα $g^{-1}(e)>0$.
Πιο αναλυτικά: Αφού g γνήσια αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ είναι $g\big((0,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(0,+\infty)$ άρα $g^{-1}(x)>0$ για $x>0$
Για $x>0$ θέτουμε όπου x το $g^{-1}(x)$ στην σχέση $g(x)<x$ και είναι
$g\big(g^{-1}(x)\big)<g^{-1}(x) \Rightarrow x<g^{-1}(x)$

Για κάθε $x>0$ είναι

$$\varphi'(x)=[2019+f(-2019)]\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{x-\ln x}+g^{-1}(e)\cdot\ln x$$

Παρατηρούμε ότι $\varphi'(x)>0$ για $x>1$ και $\varphi'(x)<0$ για $0<x<1$ και φ συνεχής στο 1, άρα $\varphi(1)$ ελάχιστο.

Επιμέλεια: Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1, Α2: Θεωρία

Α3. Λάθος. Αν $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

Α4.

i) Λάθος πρέπει και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A\cap B$

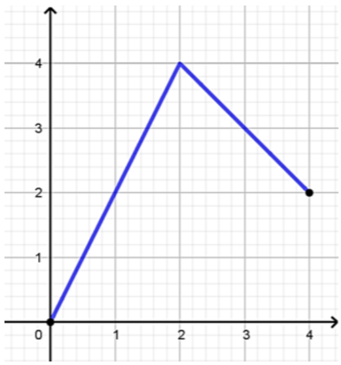
ii) Λάθος πχ. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ x\neq 0\\ 2, & \text{αν } 0<x<1\end{cases}$ δεν είναι σταθερή αλλά $f'(x)=0$ στο $(0,1)$

iii) Σωστό π.χ. $f(x)=(x-1)^2, x\in[-1,2]$

Α5. $f'(x)=2 \Leftrightarrow f'(x)=(2x)'$ για $x\in(0,2)$ και f συνεχής στο $[0,2]$ άρα $f(x)=2x+c$. Για $x=0$ είναι $\mathrm{c}=0$ άρα $f(x)=2x$ για $x\in[0,2]$.
Οπότε $f(2)=4$.
Αφού f συνεχής στο 2 είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2)=4$
$f'(x)=-1 \Leftrightarrow f'(x)=(-x)'$ για $x\in(2,4)$ και f συνεχής στο $(2,4]$
άρα $f(x)=-x+d$. Για $x=2$ είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-2+d \Rightarrow d=6$
άρα $f(x)=-x+6$ για $x\in(2,4]$.
Τελικά

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{αν } \ 0\leq x\leq 2\\ -x+6, & \text{αν } 2<x\leq 4\end{cases}$$

Σχόλιο: Πιο απλά αφού $f'(x)=2$ στο $[0,2)$ η C_f θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση 2 δηλαδή παράλληλο στην $y=2x$. Αφού $f(0)=0$ και f συνεχής στο $[0,2]$, η C_f ταυτίζεται με την $y=2x$ στο $[0,2]$.
Αφού $f'(x)=-1$ στο $(2,4]$ η C_f θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση -1 δηλαδή παράλληλο στην $y=-x$ ή $f(x)=-x+d$. Αφού $f(2)=4$ το $d=6$



ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και στο $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = 2$ άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Τελικά η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-x^2+x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x(-x+1)}{x} = \lim_{x\to0^+}(-x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{e^x-e^0}{x-0} = \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = e^0 = 1$$

άρα $f'(0) = 1$.

Β2. Είναι f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

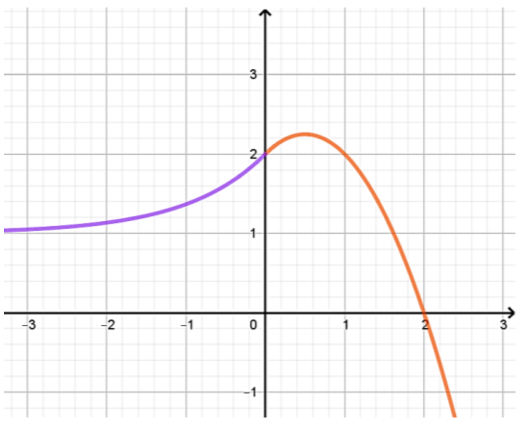
$f'(x) = \begin{cases} -2x+1, x \geq 0 \\ e^x, \quad\quad x < 0 \end{cases}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$$

Η μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$ max	$\searrow$	$-\infty$



Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει στο $\frac{1}{2}$ ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Το $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ είναι στο σύνολο τιμών της f.

Β3. Για $x < 0$: $f'(x) = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ αδύνατο . Επίσης $f'(0) \neq -1$

Για $x > 0$: $f'(x) = -1 \Leftrightarrow -2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ και

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 3$$

Β4. Για $x < 0$ είναι:

$$g^2(x) - 2g(x) + 2 = e^x + 1 \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow$$
$$(g(x) - 1)^2 = e^x \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(g(x)-1)^2} = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow |g(x) - 1| = \sqrt{e^x}$$

Θέτω $h(x) = g(x) - 1,\ x \in (-\infty, 0)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση (ως διαφορά συνεχών) και άμεσα προκύπτει ότι: $|h(x)| = \sqrt{e^x}$.

Αν $h(x) = 0$ για κάποιο $x \in (-\infty, 0)$ τότε είναι: $0 = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow 0 = e^x$, αδύνατο.

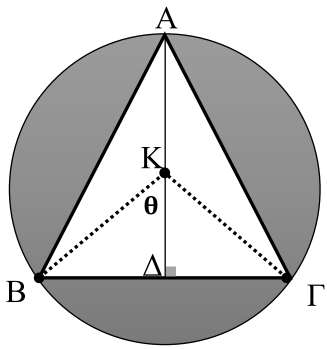
Άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και h συνεχής στο $(-\infty, 0)$, επομένως η h διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ θα είναι

είτε $h(x) > 0$ οπότε $h(x) = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow g(x) = 1 + \sqrt{e^x}$

είτε $h(x) < 0$ οπότε $-h(x) = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow g(x) = 1 - \sqrt{e^x}$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Φέρνουμε ΑΔ ύψος το οποίο είναι και διάμεσος, διχοτόμος άρα θα διέρχεται από το κέντρο Κ. Επίσης το ΚΒΓ τρίγωνο είναι ισοσκελές (ΚΒ=ΚΓ=1) άρα ΚΔ διχοτόμος. Είναι γνωστό ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που βαίνει στο τόξο ΒΓ είναι ίση με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο άρα $\theta = B\widehat{K}\Delta$. Στο τρίγωνο ΚΒΔ είναι $\sigma\upsilon\nu\theta = K\Delta$ και $\eta\mu\theta = B\Delta$ αφού $\rho = 1$



Άρα

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot B\Delta \cdot (AK + K\Delta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$$

Γ2. Η συνάρτηση E είναι συνεχής στο $(0, \pi)$ και για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι

$$E'(\theta) = -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \xLeftrightarrow{\omega = \sigma\upsilon\nu\theta} 2\omega^2 + \omega - 1 = 0$$

$$\omega = -1 \text{ ή } \omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi \text{ (απόρ.) ή } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (δεκτή)}$$

Έτσι $E'(\theta) \neq 0$ για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και E' συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

$E'\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ άρα $E'(\theta) > 0$ για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και

$E'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ άρα $E'(\theta) < 0$ για κάθε $\theta \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και

E συνεχής στο $\frac{\pi}{3}$ οπότε η E παρουσιάζει στο $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ολικό μέγιστο το $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Γ3. Είναι $\lim\limits_{\theta \to 0^+} E(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \pi^-} E(\theta) = 0$.

θ	0 π/3 π
$E'(\theta)$	+ ο −
$E(\theta)$	0 ↗ $3\sqrt{3}/4$ max ↘ 0

Στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ η E είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής

άρα $E(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{\theta \to 0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Στο $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ η E είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής

άρα $E(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{\theta \to \pi^-} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Για τυχαίο $y_0 \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ ισχύει:

$y_0 \in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $E(\alpha) = y_0$.

$y_0 \in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $\beta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ τέτοιο ώστε $E(\beta) = y_0$

Άρα $E(\alpha) = E(\beta)$, E συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την E στο $[\alpha, \beta]$.

Γ4. Για κάθε $\theta \in (0,\pi)$ είναι

$$E''(\theta) = \underbrace{-\eta\mu\theta}_{<0}\left(\underbrace{4\sigma\upsilon\nu\theta + 1}_{r(\theta)}\right)$$

$E''\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot E''\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$ και E'' συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $E''(\rho) = 0$.

Το πρόσημο της E'' εξαρτάται από την $y = -\eta\mu\theta < 0$ και την συνάρτηση $r(\theta) = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα ($r'(\theta) < 0$) στο $(0,\pi)$ και μηδενίζεται στο ρ.

Για $0 < \theta < \rho$ είναι $r(\theta) > r(\rho) \Rightarrow r(\theta) > 0$ άρα $E''(\theta) < 0$ και
για $\rho < \theta < \pi$ είναι $r(\theta) < r(\rho) \Rightarrow r(\theta) < 0$ άρα $E''(\theta) > 0$
Τελικά το $E'(\rho)$ είναι ολικό ελάχιστο της E'.

Γ5. Είναι $G(\theta) = \frac{\eta\mu\theta}{\theta}$ και για $\theta \in (0,\pi)$ είναι $G'(\theta) = \frac{\theta\ \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta^2}$

Θέτουμε $\varphi(\theta) = \theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ \ \theta \in [0,\pi)$ συνεχής και για $\theta \in (0,\pi)$ είναι $\varphi'(\theta) = -\theta\eta\mu\theta < 0$ άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi)$
$\theta > 0 \Rightarrow \varphi(\theta) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(\theta) < 0$ άρα $G'(\theta) < 0$ στο $(0,\pi)$ συνεπώς η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$ και συνεχής άρα

$$G\big((0,\pi)\big) = \left(\lim_{\theta\to\pi^-} G(\theta), \lim_{\theta\to 0^+} G(\theta)\right) = (0,1) \subseteq (0,\pi)$$

Επομένως για την παράσταση $G \circ G$ είναι

$$A_{G\circ G} = \{x \in D_G | G(x) \in D_G\} = \{x \in (0,\pi) | G(x) \in (0,\pi)\} = (0,\pi)$$

άρα ορίζεται η συνάρτηση $G \circ G$ στο $(0,\pi)$ και η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{\eta\mu G(\theta)}{G(\theta)} > \frac{\pi}{2}\,\eta\mu\left(\frac{2}{\pi}\right) \Leftrightarrow G\big(G(\theta)\big) > G\left(\frac{2}{\pi}\right) \overset{G\ \gamma\nu.\varphi\theta}{\Longleftrightarrow} G(\theta) < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$G(\theta) < \frac{1}{\pi/2} \Leftrightarrow G(\theta) < G\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{G\ \gamma\nu.\varphi\theta}{\Longleftrightarrow} \theta > \frac{\pi}{2}$$

Άρα $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-2}{x}, x\neq 0$ και είναι

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2+xg(x)\right)=2+0\cdot f'(0)=2$ και αφού f συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

Επομένως $f(\mathrm{x})\leq 2 \Leftrightarrow f(x)\leq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι $f(0)=2$ τοπικό ακρότατο και f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό 0 του $\mathbb{R}$, άρα από το Θεώρημα Fermat είναι $f'(0)=0$

Για $x=0$ είναι $4f'(0)+0f^2(0)=a\Rightarrow a=0$

$$4f'(x)+xf^2(x)=0\overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow}-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{x}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2}{8}\right)'$$

οπότε από τις συνέπειες του ΘΜΤ υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2}{8}+c$$

και για $x=0$ είναι $c=\frac{1}{2}$ άρα

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2+4}{8}\Leftrightarrow f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f'(x)=-\frac{16x}{(x^2+4)^2}$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\overset{2}{\max}$	$\searrow$

Δ3. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)=\frac{8}{(-x)^2+4}=f(x)$ οπότε $f(-2c)=f(2c)$. Είναι $0<c<2c$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ άρα

$$\underbrace{f(0)}_{\gamma}>\underbrace{f(c)}_{\beta}>\underbrace{f(2c)}_{\alpha}$$

Είναι λοιπόν, $h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$

$$h'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)[(x-\beta)(x-\gamma) \\ + (x-\alpha)(x-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)]$$
$$= 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\underbrace{[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma]}_{p(x)}$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ και

- $h(\alpha)=h(\beta)$ οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\rho_1)=0$
- $h(\alpha)=h(\beta)$ οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $h'(\rho_2)=0$

Είναι $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=\beta$ ή $p(x)=0$

Συνεπώς οι ρίζες ρ_1,ρ_2 της h' είναι ρίζες του πολυωνύμου $p(x)$ και επειδή είναι 2^ου^ βαθμού είναι μοναδικές. Τελικά έχουμε

x	$-\infty$	α		ρ_1		β		ρ_2		γ	$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\gamma$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$p(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗

Δ4.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot \sigma\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2+4}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)}{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8\cdot x^2}{x^2+4}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x}\right) = 0$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x^2}{x^2+4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2}{x^2} = 8, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to0^+}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Σχόλιο: Πιο απλά αν θέσουμε $u=\frac{1}{x}$ είναι $u\to 0^+$ και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot \sigma\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\sigma\varphi(u)\right)$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{8}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+4}\cdot\sigma\varphi(u)\right)$$

$$\lim_{u\to0^+}\left(\frac{8u^2}{1+4u^2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u}\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{8u}{1+4u^2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u/u}\right)=0\cdot1=0$$

Δ5. Πρέπει $|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

$$f(x)=\ln(|x|-1)+1 \Leftrightarrow \frac{8}{x^2+4}-\ln(|x|-1)-1=0 \Leftrightarrow d(x)=0$$

όπου $\boldsymbol{d(x)=\frac{8}{x^2+4}-\ln(|x|-1)-1}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)=A$ και παρατηρούμε ότι $d(2)=d(-2)=0$ και ότι η d είναι άρτια αφού για κάθε $x\in A$ το $-x\in A$ και $d(-x)=d(x)$.

Για $x>1$ είναι $d(x)=\frac{8}{x^2+4}-\ln(x-1)-1$

$$d'(x)=\frac{-16x}{(x^2+4)^2}-\frac{1}{x-1}<0$$

άρα d γνήσια φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ οπότε 2 μοναδική ρίζα της d στο $(1,+\infty)$.

Για $x<-1$ είναι $d(x)=\frac{8}{x^2+4}-\ln(-x-1)-1$ και

$$d'(x)=\big(d(-x)\big)'=-d'(-x)>0$$

αφού $-x>1$ είναι $d'(-x)<0$.

άρα d γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,-1)$ οπότε -2 μοναδική ρίζα της d στο $(-\infty,-1)$.

Τελικά $d(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm2$

Σχόλια:

- Για το πρόσημο της d' στο $(-\infty,-1)$ έχουμε εναλλακτικά:

$$d'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{x+1}$$
$$= -\underbrace{\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2}}_{>0} \cdot (x^4+24x^2+16x+16)$$

Για το πολυώνυμο $p(x) = x^4 + 24x^2 + 16x + 16$ ισχύει
$p(x) = x^4 + 16 + 24x^2 + 16x \geq 16 + 24x^2 + 16x = 8(3x^2 + 2x + 2) > 0$ αφού το $3x^2 + 2x + 2$ έχει $\Delta < 0$.
Άρα d γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, -1)$...

- Πιο απλά έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$x_1 < x_2 \Rightarrow -\ln(-x_1 - 1) - 1 < -\ln(-x_2 - 1) - 1$ και
$x_1 < x_2 \xRightarrow{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi} f(x_1) < f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη είναι:
$d(x_1) < d(x_2)$ άρα d γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, -1)$.

Επιμέλεια: Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in R$.

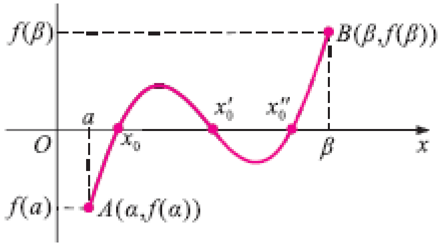
Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:
$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0) =$
$= \lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0 =$
$= \alpha_\nu \lim\limits_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0)$.

Επομένως, $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Α2.
Διατύπωση θεωρήματος Bolzano

Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι **συνεχής** στο **κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$



τότε υπάρχει **ένα, τουλάχιστον** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει **μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης** $f(x) = 0$ στο **ανοικτό διάστημα** (α, β).

Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano
Αν μία συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$ και οι τιμές της $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι **ετερόσημες**, τότε η C_f **τέμνει τον άξονα** $x'x$ **τουλάχιστον μία φορά** στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Α3. α) Ψ

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$, οι οποίες ορίζονται στο R.
Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται επίσης στο R (συνθέσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων), αλλά είναι $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2$ και
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1 \neq (f \circ g)(x)$, άρα $f \circ g \neq g \circ f$.

Α4.
α) Σ
Αφού οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$

και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$ αφού
$h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = f(\beta) - g(\beta) = h(\beta)$ και η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά παραγωγίμων συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.
Επομένως, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε
$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, άρα στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.

β) Λ
Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in R$ και υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε είναι $\lim_{x\to 0} f(x) \geq 1$.

γ) Σ
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και είναι $f(0) = f(1)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο αφού ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$.

δ) Λ
Δεν γνωρίζουμε αν η $f \cdot g$ είναι συνεχής ώστε να ισχύει η πρόταση.

ε) Σ
Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως παραγωγίσιμη στο R και αφού είναι
$f(-1) \cdot f(0) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$, σύμφωνα με θεώρημα Bolzano η f έχει ρίζα στο $(-1,0)$, η οποία είναι μοναδική, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Σύμφωνα με το σχήμα η f' είναι συνεχής R, οπότε κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι τα σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται, δηλαδή στα σημεία με τετμημένες $-2{,}0{,}2$.

Β2. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,2\,]$ αφού η f είναι συνεχής στο 0 .

β) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 και τοπικό ελάχιστο στο 2, ενώ το 0 παραμένει κρίσιμο σημείο.

Β3. Όπως φαίνεται στο σχήμα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{2}\,]$ και $[0,\sqrt{2}\,]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{2},0\,]$ και $[\sqrt{2},+\infty)$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{[f'(x)]^2+2\cdot f'(x)}{\sqrt{-f'(x)}-\sqrt{2}}-e^{2+f'(x)}\right)=$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{[f'(x)+2]\cdot f'(x)\cdot(\sqrt{-f'(x)}+\sqrt{2})}{(\sqrt{-f'(x)}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{-f'(x)}+\sqrt{2})}-e^{2+f'(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{[f'(x)+2]\cdot f'(x)\cdot(\sqrt{-f'(x)}+\sqrt{2})}{-(f'(x)+2)}-e^{2+f'(x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(-f'(x)\cdot(\sqrt{-f'(x)}+\sqrt{2})-e^{2+f'(x)}\right)=$$

$= -f'(\sqrt{2}) \cdot \left(\sqrt{-f'(\sqrt{2})} + \sqrt{2}\right) - e^{2+f'(\sqrt{2})} = -(-2) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) -$
$e^{2+(-2)} = 4\sqrt{2} - 1,$ διότι αφού η f' είναι συνεχής στο $\sqrt{2}$ είναι $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f'(x) = f'(\sqrt{2}) = -2.$

Επομένως, αφού $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} K = 4\sqrt{2} - 1 > 0$ είναι $K > 0$ κοντά στο $\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Αν στη σχέση $f(x) \cdot f'(-x) = -1$ (1) θέσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει η σχέση $f(-x) \cdot f'(x) = -1$ (2). Αφαιρώντας τη σχέση (1) από τη σχέση (2) προκύπτει $f(-x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f'(-x) = 0 \Leftrightarrow$ $\left(f(x) \cdot f(-x)\right)' = 0$,άρα υπάρχει $c \in R$, τέτοιο ώστε $f(x) \cdot f(-x) = c.$ (3)

Για $x = 0$ η σχέση (1) γίνεται $f(0) \cdot f'(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) \cdot (-1) = -1$ $\Leftrightarrow f(0) = 1.$

Για $x = 0$ η σχέση (3) γίνεται $f(0) \cdot f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$, άρα είναι $f(x) \cdot f(-x) = 1.$ (4) Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$ και $f(-x) \neq 0.$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -1 \Leftrightarrow f'(x) = -f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^x)' = 0,$

άρα υπάρχει $\kappa \in R$, τέτοιο ώστε $f(x) \cdot e^x = \kappa.$ (5)

Για $x = 0$ η σχέση (5) γίνεται $f(0) \cdot e^0 = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$, άρα είναι $f(x) \cdot e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}, x \in R.$

Γ2. Είναι $\alpha'(t) = 1m/sec$ και $f'(x) = -e^{-x}.$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, e^{-\alpha})$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y - e^{-\alpha} = -e^{-\alpha} \cdot (x - \alpha).$

Αφού η εφαπτομένη (ε) σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$ είναι $\varepsilon\varphi\omega = f'(\alpha) = -e^{-\alpha}.$

Τα μεγέθη μεταβάλλονται σύμφωνα με το χρόνο, άρα είναι $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = -e^{-\alpha(t)}$ και

$(\varepsilon\varphi(\omega(t)))' = (-e^{-\alpha(t)})' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t) = e^{-\alpha(t)} \cdot \alpha'(t).$

Τη χρονική στιγμή t_0, είναι $\alpha(t_0) = ln2$ και $\varepsilon\varphi(\omega(t_0)) = -e^{-\alpha(t_0)} = -e^{-ln2} = -\frac{1}{2}$, άρα

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t_0))} \cdot \omega'(t_0) = e^{-\alpha(t_0)} \cdot \alpha'(t_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t_0)) \cdot \omega'(t_0) = e^{-ln2} \cdot 1 \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{4}) \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\omega'(t_0) = \frac{2}{5}\, rad/sec.$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\omega'(t_0) = \frac{2}{5}$ $rad/sec.$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = g'(x) - 2f(x) = 2x + 1 - 2e^{-x}$, η οποία είναι
συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα πολυωνυμικής και εκθετικής συνάρτησης με $h'(x) = 2 + 2e^{-x} > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως συνεχής στο R. Επίσης, είναι $h(-1) = -1 - 2e < 0$ και $h(1) = 3 - \frac{2}{e} > 0$, άρα $h(-1) \cdot h(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$, τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) - 2f(x_0) = 0$ και αφού η h είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση $t(x) = 2f(x) + g(x) - {x_0}^2 - 3x_0 - 3 =$
$= 2e^{-x} + x^2 + x + 2 - {x_0}^2 - 3x_0 - 3,$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $t'(x) = -2e^{-x} + 2x + 1$ και $t''(x) = 2e^{-x} + 2 > 0$, άρα η t' είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Είναι $t(x_0) = 2e^{-x_0} + {x_0}^2 + x_0 + 2 - {x_0}^2 - 3x_0 - 3 = 2e^{-x_0} - 2x_0 - 1 = -h(x_0) = 0.$
Για $x < x_0 \Rightarrow t'(x) < t'(x_0) \Rightarrow t'(x) < 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow t'(x) > t'(x_0) \Rightarrow t'(x) > 0.$
Το πρόσημο της t' και η μονοτονία της t φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		↘	0 min	↗	

Η συνάρτηση t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $t(x_0)=0$, άρα ισχύει
$t(x) \geq t(x_0) \Leftrightarrow 2f(x)+g(x)-{x_0}^2-3x_0-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x)+g(x) \geq {x_0}^2+3x_0+3$.

Γ5. Η παράσταση $g \circ f$ ορίζεται όταν $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$, δηλαδή, όταν $x \in R$ και $e^{-x} \in R$, που ισχύει, οπότε $D_{g\circ f} = R$. Είναι $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = e^{-2x}+e^{-x}+2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $[(g \circ f)]'(x) = -2e^{-2x}-e^{-x} < 0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε για κάθε $x \in R$ η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα $4e^x-4x > \frac{1}{|x|-|\eta\mu x|+\frac{1}{2}}$.
Για κάθε $x \in R$: $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow |x|-|\eta\mu x| \geq 0 \Leftrightarrow |x|-|\eta\mu x|+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|-|\eta\mu x|+\frac{1}{2}} \leq 2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $4e^x-4x > 2 \Leftrightarrow e^x-x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x > x+\frac{1}{2}$, που ισχύει αφού
$e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in R$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
συναρτήσεων με $f'(x) = \cdots = \frac{lnx+x-1}{(x+1)^2}$.
Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = lnx+x-1$, $x \in (0,+\infty)$, η οποία είναι συνεχής και
παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x}+1 > 0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο
$(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$ και $(x+1)^2 > 0$, οπότε έχουμε
$0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) \Rightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και
$x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	

Αφού είναι $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ για $x > 1$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = -1$, άρα είναι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x\cdot(lnx-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x\cdot lnx-2x}{x+1} = \frac{0-0}{0+1} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x \cdot lnx) = 0$. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ το σύνολο τιμών της για το Δ_1 είναι $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = [-1,0)$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(lnx-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx-2}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ το σύνολο τιμών της για το Δ_2 είναι $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-1, -\infty)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, -\infty)$.

Δ2. Αφού είναι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ η εξίσωση $f\left(e^{3-f(x)}\right) = -1$ ισοδύναμα γράφεται $f\left(e^{3-f(x)}\right) = f(1) \Leftrightarrow e^{3-f(x)} = 1 \Leftrightarrow 3 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$.

Αφού $3 \notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x) = 3$ είναι αδύνατη στο Δ_1, ενώ $3 \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $x_1 \in \Delta_2$, τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 3$, μοναδικό, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Επομένως, η εξίσωση $f\left(e^{3-f(x)}\right) = -1$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ3. Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + \ln\left(f^2(x) + 1\right)$ είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2f(x)f'(x) + 3f'(x) + \frac{2f(x)f'(x)}{f^2(x)+1} = f'(x)\left(2f(x) + 3 + \frac{2f(x)}{f^2(x)+1}\right) =$

$= f'(x) \cdot \frac{2f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+3}{f^2(x)+1} = f'(x) \cdot \frac{(f(x)+1)\cdot(2f^2(x)+f(x)+3)}{f^2(x)+1}$.
Είναι $2f^2(x) + f(x) + 3 > 0$ (τριώνυμο της $f(x)$ με $\Delta < 0$), $f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε
$x \in R$, $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0$, για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για
$x = 1$ και $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1, f'(x) > 0$ για $x > 1$ και $f'(1) = 0$.
Επομένως, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $g(1) = f^2(1) + 3f(1) + ln(f^2(1) + 1) = ln2 - 2$.

Δ4. Ισχύει $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0$, για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο
για $x = 1$, οπότε είναι $f(\alpha) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{f(\alpha)+1} \geq 1 \quad (1)$ και
$f(\beta) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(\beta) + 2 \geq 1 \Leftrightarrow \ln(f(\beta) + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(f(\beta) + 2) \geq 0. \quad (2)$
Για να ισχύει $e^{f(\alpha)+1} + \ln(f(\beta) + 2) = 1$ από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει
αναγκαστικά $e^{f(\alpha)+1} = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = -1$ και
$\ln(f(\beta) + 2) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = -1$ και αφού είναι $f(x) = -1$ μόνο για
$x = 1$ θα ισχύει ότι $\alpha = \beta = 1$.

Επιμέλεια: Σάββας Νίκος

13ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. **Απόδειξη :**

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \qquad (1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$, λόγω της (1) είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Το σύνολο που αποτελείται από τις τιμές της f για όλα τα $x \in A$ λέγεται **σύνολο τιμών της f** και συμβολίζεται με $f(A)$ ή $f(D_f)$.

Δηλαδή : $f(A) = \{y \in R / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

Α3. α) Α

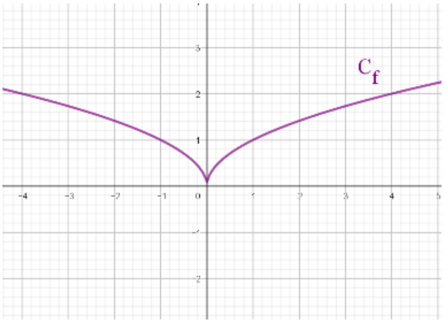
β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{|x|}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ για τις οποίες είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|} = 0$ (σχήμα α) και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) - \infty$ **(σχήμα β)**

και $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{|x|}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{x^2}\right) = -\infty$ **(σχήμα γ),**

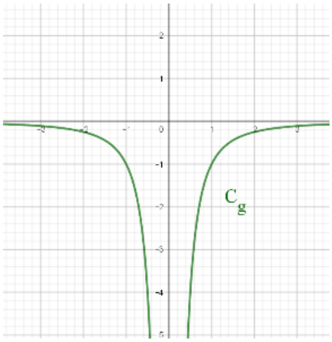
καθώς,

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sqrt{-x}}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{-x}{x^2\cdot\sqrt{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x\cdot\sqrt{-x}}\right) = -\infty,$

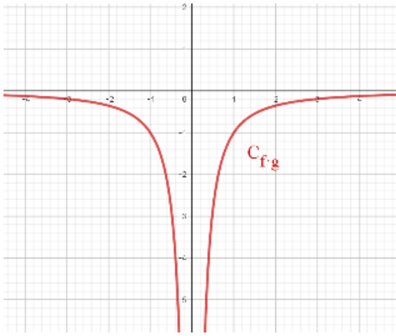
- $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{x^2\cdot\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}\right) = -\infty.$



Σχήμα α



Σχήμα β



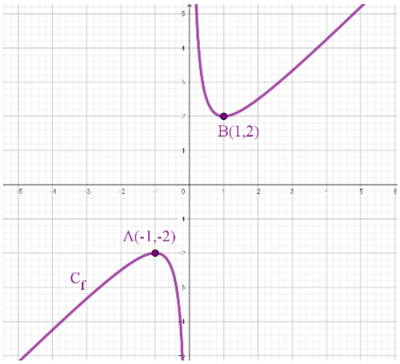
Σχήμα γ

Α4. α) Σ

β) Σ Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ $(x > 0,\ |\eta\mu x| \leq 1)$. Επομένως $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

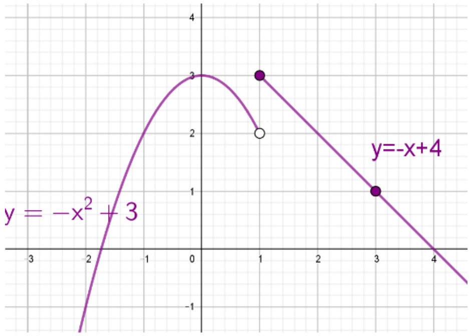
Επίσης $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}) = 0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

γ) Σ Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -2$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 2$ και είναι $f(-1) < f(1)$.



δ) Σ

ε) Σ Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2+3, & x<1 \\ -x+4, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[1,3]$, διότι είναι συνεχής στο $(1,3)$ με $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 = f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 = f(3)$, ενώ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.



ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού $D_h = R - \{-1\}$ και η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $D_g = (0,+\infty)$. Η παράσταση $f = g \circ h$ ορίζεται όταν $x \in D_h$ και $h(x) \in D_g$, δηλαδή όταν $x \neq -1$ και

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της $f = goh$ είναι $D_f = D_{g\circ h} = (-1,1)$ και $f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = ln\,(\frac{1-x}{1+x})$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \cdots = \frac{-2}{1-x^2} < 0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$.

Είναι

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} ln(\frac{1-x}{1+x}) = +\infty$, διότι αν θέσουμε $u = \frac{1-x}{1+x}$, οπότε:

$u_0 = \lim\limits_{x\to -1^+} u = \lim\limits_{x\to -1^+} [(1-x)\cdot\frac{1}{1+x}] = 2\cdot(+\infty) = +\infty$, προκύπτει $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{u\to +\infty} lnu = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ln(\frac{1-x}{1+x}) = -\infty$, διότι αν θέσουμε $u = \frac{1-x}{1+x}$, οπότε $u_0 = \lim\limits_{x\to 1^-} u = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0$, προκύπτει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} lnu = -\infty$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$, το σύνολο τιμών της είναι $f\big(D_f\big) = (\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)) = (-\infty,+\infty)$.

Β3. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$, άρα $1-1$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη της. Για να βρούμε την f^{-1} θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x.

Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=y \overset{-1<x<1}{=} \frac{1-x}{1+x}=e^y \Leftrightarrow 1-x=e^y+x\cdot e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot(1+e^y)=1-e^y \Leftrightarrow x=\frac{1-e^y}{1+e^y} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1-e^y}{1+e^y}$ με $y\in R$.

Επομένως, η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}\colon R\to R$ με $f^{-1}(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(\frac{1}{e^x}-1)}{e^x\cdot(\frac{1}{e^x}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Είναι $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1 \Leftrightarrow \frac{|2x|}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow |2x|\le x^2+1 \Leftrightarrow |x|^2-2|x|+1\ge 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2$, που ισχύει για κάθε $x\in R$.

Γ2. Παρατηρούμε ότι $f(0)=1$ και αφού $f(x)\ge 1$ είναι $f(x)\ge f(0)$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 και αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο 0, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\alpha^x\cdot ln\alpha+2x-1$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι
$f'(0)=0 \Leftrightarrow ln\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=e$.

Γ3. Για $\alpha=e$ είναι $f(x)=e^x+x^2-x$. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=e^x+2x-1$ και $f''(x)=e^x+2>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R και αφού $f'(0)=0$ είναι $x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$ και $x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1 min	$\nearrow$	

Αφού $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 1$, δηλαδή είναι $f(x) \geq 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γ4. Η απόσταση του $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$ και αφού το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ κινείται πάνω στη C_f και τα μεγέθη μεταβάλλονται σύμφωνα με το χρόνο η απόσταση (OM) είναι $d(t) = \sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}$ με $x'(t) = 2\frac{\mu o \nu}{sec}$. Η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις και συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$d'(t) = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + 2f(x(t)) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}} \overset{x'(t) = 2}{=} \frac{2 \cdot (x(t) + f(x(t)) \cdot f'(x(t)))}{\sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $d'(t_0) = \frac{2 \cdot (x(t_0) + f(x(t_0)) \cdot f'(x(t_0)))}{\sqrt{x^2(t_0) + f^2(x(t_0))}}$ με

$x(t_0) = 1$,

$f(x(t_0)) = e^{x(t_0)} + x^2(t_0) - x(t_0) = e^1 + 1^2 - 1 = e$ και

$f'(x(t)) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) - x'(t)$, άρα

$f'(x(t_0)) = e^{x(t_0)} \cdot x'(t_0) + +2 \cdot x(t_0) \cdot x'(t_0) - x'(t_0) = e^1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = e + 1$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης (OM) είναι $d'(t_0) = \frac{2 \cdot (1 + e \cdot (e+1))}{\sqrt{1^2 + e^2}} = \frac{2 \cdot (e^2 + e + 1)}{\sqrt{e^2 + 1}} \frac{\mu o \nu}{sec}$.

Γ5. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα και συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + e^x + x^2 - x = \frac{2x}{x^2+1} + f(x)$.
Είναι $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$, δηλαδή $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$.
Επίσης, είναι $f(x) \geq 1$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει $\frac{2x}{x^2+1} + f(x) > 0$, καθώς οι σχέσεις (1) και (2) δεν ισχύουν ταυτόχρονα ως ισότητες. Συνεπώς, είναι $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + f(x) > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Γ6. Η ανίσωση $6 \cdot ln\frac{x^4+1}{x^2+1} + 6 \cdot e^{x^2} + 2x^6 - 3x^4 > 6 \cdot e^x + 2x^3 - 3x^2$ ισοδύναμα γράφεται $6 \cdot ln(x^4+1) - 6 \cdot ln\,(x^2+1) + 6 \cdot e^{x^2} + 2x^6 - 3x^4 > 6 \cdot e^x + 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ln(x^4+1) + e^{x^2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2} > ln(x^2+1) + e^x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f(x^2) > f(x)$ και αφού $x, x^2 \in R$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R, η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$.

Γ7. Είναι $g(0) = ln1 + e^0 + \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} = 1$, άρα $g^{-1}(1) = 0$.
Επίσης, είναι $g^{-1}\big(g(x)\big) = x$, και αφού η $g^{-1} \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο R είναι $(g^{-1}\big(g(x)\big))' = x'$, οπότε $(g^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$.
Για $x = 0$ προκύπτει $(g^{-1})'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = 1 \Leftrightarrow (g^{-1})'(1) \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow (g^{-1})'(1) = 1$, διότι $g'(0) = \frac{2\cdot 0}{0^2+1} + e^0 + 0^2 - 0 = 1$.
Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της g^{-1} στο σημείο $A(1, g^{-1}(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - g^{-1}(1) = (g^{-1})'(1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Για $x > 1 \Leftrightarrow lnx > 0$ η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής :
$\varphi(x) - x\,ln\,x \cdot \varphi'(x) = 0 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} ln\,x \cdot \varphi'(x) - \varphi(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \overset{lnx>0}{\Leftrightarrow} \frac{ln\,x \cdot \varphi'(x) - \varphi(x)\cdot\frac{1}{x}}{ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(x)}{lnx}\right)' = 0$, άρα υπάρχει αριθμός $c \in R$, τέτοιος, ώστε $\frac{\varphi(x)}{lnx} = c$. Για $x = e$ προκύπτει $\frac{\varphi(e)}{lne} = c \Leftrightarrow c = -2$, οπότε είναι $\varphi(x) = -2\,ln\,x$, $x \in (1, +\infty)$.

Δ2. α) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = -x \cdot ln\,x \cdot g'(x)$ (1) και $g(x) = -x \cdot ln\,x \cdot f'(x)$ (2). Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $(f(x) - g(x)) - x \cdot ln\,x \cdot (f'(x) - g'(x)) = 0$, οπότε, θέτοντας $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ έχουμε $\varphi(x) - x \cdot ln\,x \cdot \varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $\varphi(e) = f(e) - g(e) = 0 - 2 = -2$, οπότε από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει $\varphi(x) = -2\,ln\,x \Leftrightarrow f(x) - g(x) = -2lnx$ (3) για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\big(f(x) + g(x)\big) + x\,ln\,x \cdot (f'(x) + g'(x)) = 0$, οπότε, θέτοντας

$h(x) = f(x) + g(x)$ έχουμε $h(x) + x\,ln\,x \cdot h'(x) = 0 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} ln\,x \cdot h'(x) + h(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow (h(x) \cdot lnx)' = 0$, άρα υπάρχει αριθμός $\kappa \in R$, τέτοιος, ώστε $h(x) \cdot lnx = \kappa$.Για $x = e$ προκύπτει $h(e) \cdot lne = \kappa \Leftrightarrow \kappa = f(e) + g(e) = 0 + 2 = 2$, οπότε είναι $h(x) \cdot lnx = 2 \overset{lnx>0}{\Leftrightarrow} h(x) = \frac{2}{lnx} \Leftrightarrow f(x) + g(x) = \frac{2}{lnx}$ (4) για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $2 \cdot f(x) = \frac{2}{ln\,x} - 2 \cdot ln\,x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{ln\,x} - ln\,x$. Αντικαθιστώντας $f(x) = \frac{1}{ln\,x} - ln\,x$ στην σχέση (3) προκύπτει $g(x) = \frac{1}{ln\,x} + ln\,x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -\frac{1}{x \cdot ln^2 x} - \frac{1}{x} < 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x) = -\frac{1}{x \cdot ln^2 x} + \frac{1}{x} = \frac{ln^2 x - 1}{x \cdot ln^2 x}$. Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{ln^2 x - 1}{x \cdot ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow ln^2 x = 1 \Leftrightarrow lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$.

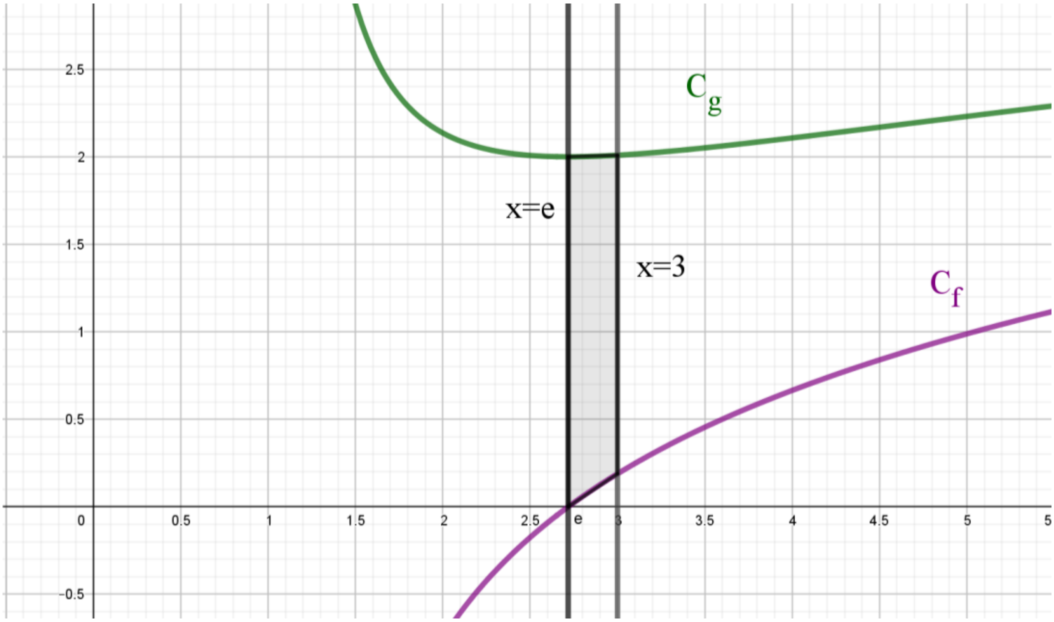
Επίσης, είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{ln^2 x - 1}{x \cdot ln^2 x} > 0 \underset{lnx > 0}{\overset{x > 1}{\Leftrightarrow}} ln^2 x > 1 \Leftrightarrow lnx > 1 \Leftrightarrow x > e$ και $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{ln^2 x - 1}{x \cdot ln^2 x} < 0 \underset{lnx > 0}{\overset{x > 1}{\Leftrightarrow}} \ldots \Leftrightarrow 1 < x < e$.

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	1		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	2 min	↗	

Αφού $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < e$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$ και η g είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (1, e]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$. Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο e το $g(\mathrm{e}) = 2$, άρα είναι $g(x) \leq 2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = e$.

γ) Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των C_f, C_g και των ευθειών $x = e$ και $x = 3$ ισούται με $E(\Omega) = \int_e^3 |f(x) - g(x)|dx$.



Από τη σχέση (3) έχουμε $f(x) - g(x) = -2lnx < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = -\int_e^3 \big(f(x) - g(x)\big)dx = 2 \cdot \int_e^3 lnxdx = 2 \cdot \int_e^3 (x)' \cdot lnxdx = 2 \cdot ([x \cdot lnxdx]_e^3 - \int_e^3 x \cdot \frac{1}{x} dx) = 2 \cdot (3ln3 - e - [x]_e^3) = \cdots = 6ln3 - 6.$

Επιμέλεια: Σάββας Νίκος

14ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1) είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$ τότε όμοια αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. α) Α

β) Αφού η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και η f είναι συνεχής στο x_0, η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Ισχύει $f'(x) > 0$ για $x > x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x < x_0$, άρα το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Το $x_0 \in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη σ 'αυτό (είναι παραγωγίσιμη στο R), οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Α3. α) Θεώρημα Fermat : Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

β) Η f είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta).$$

Α4. α) Σ

Αφού η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > 0$, καθώς είναι $f(\beta) > f(\alpha)$ και $\beta - \alpha > 0$.

β) Σ

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

γ) Λ

Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ $(x > 0,\ |\eta\mu x| \le 1)$. Επομένως
$-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}) = 0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}x}{x} = 0$.

δ) Λ

Έστω ότι εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την παραγωγίσιμη f στο $[\alpha, \beta]$.

Θα πρέπει $f(\alpha) = f(\beta)$, που είναι άτοπο, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και για $\alpha < \beta$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$.

ε) Λ

Η πρόταση ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. α) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = g'(x)\cdot e^{-x} - g(x)\cdot e^{-x} = [g'(x) - g(x)]\cdot e^{-x} = 0\cdot e^{-x} = 0$.

Αφού η h είναι συνεχής στο R και ισχύει $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$ η h είναι σταθερή.

β) Η συνάρτηση h είναι σταθερή στο R, άρα υπάρχει $c \in R$, τέτοιο, ώστε
$h(x) = c \Leftrightarrow g(x)\cdot e^{-x} = c \Leftrightarrow g(x) = c\cdot e^{x}$ για κάθε $x \in R$.
Για $x = 0$ είναι $g(0) = c\cdot e^{0} \Leftrightarrow c = 2$, οπότε είναι $g(x) = 2e^{x}$ για κάθε $x \in R$.

Β2. Είναι $f(x)=\frac{g(x)}{g(x)-2}=\frac{2e^x}{2e^x-2}=\frac{e^x}{e^x-1}$.

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$, οπότε $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)'=\frac{e^x\cdot(e^x-1)-e^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=\cdots=\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}<0$, για κάθε $x\in D_f$.

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0)$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$.

Β3. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f για το Δ_1 πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{0}{0-1}=0$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x\cdot\frac{1}{e^x-1}\right)=-\infty$, διότι

- $\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=e^0=1$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=1-1=0$ με $x<0\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow e^x-1<0$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=-\infty$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0)$ το σύνολο τιμών της για το Δ_1 είναι $f(\Delta_1)=(\lim\limits_{x\to 0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=(-\infty,0)$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f για το Δ_2 πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{1}{e^x-1}\right)=+\infty$, διότι

- $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=e^0=1$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=1-1=0$ με $x>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow e^x-1>0$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=+\infty$.

Επίσης, είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\cdot(1-\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ το σύνολο τιμών της για το Δ_2 είναι
$f(\Delta_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)) = (1, +\infty)$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Β4. Για $x < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $1-1$.
Για $x > 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $1-1$.
Αν $x_1 < 0$ και $x_2 > 0$ είναι $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 1$, οπότε για κάθε $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επομένως η f είναι $1-1$ στο D_f και ορίζεται η f^{-1}.

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ είναι
$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x = e^x \cdot y - y \Leftrightarrow e^x \cdot (1-y) = -y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$, με
$\frac{y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y(y-1) > 0 \Leftrightarrow y < 0$ ή $y > 1$.
Έτσι, είναι $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$, οπότε η αντίστροφη της f έχει τύπο
$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ με $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Είναι $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1+f^2(x)}{2} > 0$, άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο. Αφού είναι $f(ln2) = 1 > 0$ θα είναι και $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

Γ2. Είναι $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1+f^2(x)}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 1 + f^2(x) \Leftrightarrow \left(1 + f^2(x)\right)' = 1 + f^2(x)$.
Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, υπάρχει $c \in R$, τέτοιο, ώστε $1 + f^2(x) = c \cdot e^x$ για κάθε $x > 0$.

Για $x = ln2$ είναι $1 + f^2(ln2) = c \cdot e^{ln2} \Leftrightarrow 1 + 1 = 2c \Leftrightarrow 2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$, οπότε

$1 + f^2(x) = c \cdot e^x \Leftrightarrow f^2(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{e^x - 1}$, διότι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{e^x - 1}) = 0$, οπότε είναι $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ για κάθε $x \geq 0$.

Γ3. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\sqrt{e^x - 1} + ln2 = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} - x + ln2 - 1 = 0.$ (1)

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \sqrt{e^x - 1} - x + ln2 - 1$, με $x \geq 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} - 1 = \frac{e^x - 2\sqrt{e^x - 1}}{2\sqrt{e^x - 1}}.$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h''(x) = \cdots = \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4 \cdot (e^x - 1) \cdot \sqrt{e^x - 1}}.$

Είναι $h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4 \cdot (e^x - 1) \cdot \sqrt{e^x - 1}} = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = ln2.$

Επίσης, είναι $h''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4 \cdot (e^x - 1) \cdot \sqrt{e^x - 1}} > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > ln2$ και

$h''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4 \cdot (e^x - 1) \cdot \sqrt{e^x - 1}} < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < ln2.$

Το πρόσημο της h'' και η μονοτονία της h' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Η h' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $ln2$ το $h'(ln2) = \frac{e^{ln2} - 2\sqrt{e^{ln2} - 1}}{2\sqrt{e^{ln2} - 1}} = \cdots = 0$, οπότε είναι $h'(x) \geq 0$.

Αφού είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \neq ln2$ και η h' είναι συνεχής στο $ln2$, όπου $h'(ln2) = 0$

η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Παρατηρούμε ότι $h(ln2)=\sqrt{e^{ln2}-1}-ln2+ln2-1=0$ και αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η $x=ln2$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

Γ4. Αρκεί να δείξουμε υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,ln2)$, τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\frac{e^{\xi}\cdot ln2}{2}\Leftrightarrow\frac{f(\xi)}{e^{\xi}}=\frac{ln2}{2}$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,ln2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Είναι $\kappa(0)=\frac{f(0)}{e^0}=\frac{\sqrt{e^0-1}}{1}=0$ και $\kappa(ln2)=\frac{f(ln2)}{e^{ln2}}=\frac{\sqrt{e^{ln2}-1}}{2}=\frac{1}{2}$.
Ισχύει $\kappa(0)=0<\frac{ln2}{2}<\frac{1}{2}=\kappa(ln2)$, οπότε, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\xi\in(0,ln2)$, τέτοιο, ώστε $\kappa(\xi)=\frac{ln2}{2}\Leftrightarrow\frac{f(\xi)}{e^{\xi}}=\frac{ln2}{2}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{e^{\xi}\cdot ln2}{2}$.
Η συνάρτηση κ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,ln2)$ με $\kappa'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.
Αφού είναι $e^x>0$ για κάθε $x\in R$ το πρόσημο της κ' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $\rho(x)=f'(x)-f(x)$ με $x\in(0,ln2)$.
Είναι $\rho(x)=f'(x)-f(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}-\sqrt{e^x-1}=\frac{e^x-2(\sqrt{e^x-1})^2}{2\sqrt{e^x-1}}=\cdots=\frac{2-e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0$ για κάθε $x\in(0,ln2)$.

Προκύπτει $\kappa'(x)>0$, άρα η κ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,ln2)$, τέτοιο, ώστε $\kappa(\xi)=\frac{ln2}{2}\Leftrightarrow\frac{f(\xi)}{e^{\xi}}=\frac{ln2}{2}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{e^{\xi}\cdot ln2}{2}$.

Γ5. Το τρίγωνο OMK είναι ορθογώνιο και το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο $E=\frac{x\cdot f(x)}{2}=\frac{x\cdot\sqrt{e^x-1}}{2}$ με $x>0$.
Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και το εμβαδόν του τριγώνου μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα είναι $E(t)=\frac{x(t)\cdot f(x(t))}{2}=\frac{x(t)\cdot\sqrt{e^{x(t)}-1}}{2}$ με $x(t)>0$.

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(t) = \dfrac{x'(t)\cdot\sqrt{e^{x(t)}-1}+x(t)\cdot\frac{e^{x(t)}\cdot x'(t)}{2\sqrt{e^{x(t)}-1}}}{2}$ με $x(t)>0$.

Άρα τη χρονική στιγμή t_0, που είναι $x(t_0)=ln2\ cm$ και $x'(t_0)=2\ cm/sec$, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$E'(t_0)=\frac{x'(t_0)\cdot\sqrt{e^{x(t_0)}-1}+x(t_0)\cdot\frac{e^{x(t_0)}\cdot x'(t_0)}{2\sqrt{e^{x(t_0)}-1}}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{e^{ln2}-1}+ln2\cdot\frac{e^{ln2}\cdot 2}{2\sqrt{e^{ln2}-1}}}{2}=\dots=$$
$(1+ln2)cm^2/sec$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$.

Για $x\in[0,\pi]$ είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$.

Αφού $x=\frac{\pi}{3}$ είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$ και η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, τότε θα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $[0,\frac{\pi}{3})$ και $(\frac{\pi}{3},\pi]$. Είναι $f'(0)=1$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$+\infty$
Επιλεγμένος Αριθμός		0		$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x_0)$		1		-1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

Αφού $f'(x) > 0$ στο $[0, \frac{\pi}{3})$, $f'(x) < 0$ στο $(\frac{\pi}{3}, \pi]$ και η f είναι συνεχής στο [0,π], είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = [0, \frac{\pi}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi]$.

Στο 0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 3$.

Στο $\frac{\pi}{3}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 3 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 3 = \frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}$.

Στο π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = 3 - \pi$, διότι $f(\pi) < f(0)$.

Δ2. Για $x \in [0, \pi]$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\eta\mu x - x + 3 = \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3}$. ($\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, άρα το σύνολο τιμών της για το Δ_1 είναι το $f(\Delta_1) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = [3, \frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}]$.
$\sqrt{3} \notin f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \sqrt{3}$ είναι αδύνατη στο Δ_1.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi]$, άρα το σύνολο τιμών της για το Δ_2 είναι το $f(\Delta_2) = \left[f(\pi), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = [3 - \pi, \frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}]$.
Είναι $3 - \pi < 0 < \sqrt{3}$ και $\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3} = \sqrt{3} + 3 - \frac{\pi}{3} > \sqrt{3}$, άρα $\sqrt{3} \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \sqrt{3}$ έχει λύση στο Δ_2 και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, η λύση αυτή είναι μοναδική στο Δ_2. Επομένως η εξίσωση $f(x) = \sqrt{3}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, \pi]$.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}]$ και $[\frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}]$, οπότε, υπάρχουν $\xi_1 \in (\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10})$ και $\xi_2 \in (\frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5})$, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{3\pi}{10}) - f(\frac{\pi}{5})}{\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{5}} = \frac{f(\frac{3\pi}{10}) - f(\frac{\pi}{5})}{\frac{\pi}{10}}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\frac{2\pi}{5}) - f(\frac{3\pi}{10})}{\frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{10}} = \frac{f(\frac{2\pi}{5}) - f(\frac{3\pi}{10})}{\frac{\pi}{10}}$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = -2\eta\mu x$.
Για $x \in (0, \pi)$ είναι $f''(x) < 0$ και αφού η f' είναι συνεχής στα 0 και π, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

Είναι $0 < \frac{\pi}{5} < \xi_1 < \frac{3\pi}{10} < \xi_2 < \frac{2\pi}{5} < \pi \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{3\pi}{10}\right) - f\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{\pi}{10}} > \frac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right) - f\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{\frac{\pi}{10}} \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{10}\right) - f\left(\frac{\pi}{5}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right) - f\left(\frac{3\pi}{10}\right) \Rightarrow 2 \cdot f\left(\frac{3\pi}{10}\right) > f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Δ4. Είναι $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} \cdot x < \frac{\pi}{3} \cdot 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} \cdot x < \frac{\pi}{3}$ και
$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 > -x > -1 \Leftrightarrow e^0 > e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{e} < e^{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \cdot \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \cdot e^{-x} < \frac{\pi}{3} \cdot 1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{3e} < \frac{\pi}{3} \cdot e^{-x} < \frac{\pi}{3}.$$
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση
$f\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = f\left(\frac{\pi}{3} \cdot e^{-x}\right)$ ισοδύναμα γράφεται $\frac{\pi}{3} \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{-x}$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - e^{-x}$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης, είναι παραγωγίσιμη (είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) στο $(0,1)$ με $g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Επιπλέον, είναι $g(0) = -e^0 = -1 < 0$ και $g(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$, οπότε $g(0) \cdot g(1) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$ έχει λύση στο $(0,1)$, η οποία είναι μοναδική, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως, η εξίσωση $f\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = f\left(\frac{\pi}{3} \cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Επιμέλεια: Σάββας Νίκος

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1→Α

2→Β

3→Β

Α.Δ.Ο: $\vec{P}_{\text{ολ}_{\pi\rho\iota\nu}} = \vec{P}_{\text{ολ}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}}$ $m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = 0 \rightarrow$

$2 \cdot \cancel{m} \cdot \upsilon_1 = 3 \cdot \cancel{m} \cdot \upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{2 \cdot \upsilon_1}{3}$ (1)

Είναι $K_1 = K = \dfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 \rightarrow K = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v_1^2 \rightarrow K = m \cdot v_1^2$ (2)

Επίσης:

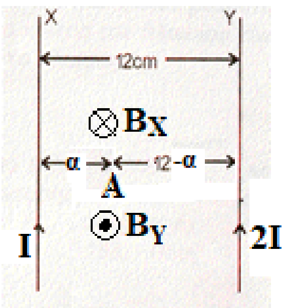
$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m \cdot \upsilon_2^2 \xrightarrow{(1)} K_2 = \frac{1}{2} 3 \cdot m \cdot \frac{4 \cdot \upsilon_1^2}{9} \rightarrow K_2 = \frac{2}{3} \cdot m \cdot \upsilon_1^2 \xrightarrow{(2)} K_2 = \frac{2}{3} \cdot K$$

Αφού το συσσωμάτωμα ακινητοποιήθηκε, όλη η κιντική ενέργεια των σωμάτων, έγινε θερμότητα.

Συνεπώς: $Q = K_1 + K_2 = K + \dfrac{2}{3} \cdot K \rightarrow \boxed{Q = \dfrac{5}{3} \cdot K}$

4→Β

Το ζητούμενο σημείο Α , όπου η ένταση Β του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν, θα βρίσκεται στην περιοχή ανάμεσα στους αγωγούς Χ και Υ και πλησιέστερα προς τον Χ, ο οποίος διαρρέεται από το μικρότερο ρεύμα. Έστω σε απόσταση α από τον Χ. Θα είναι:



$\overrightarrow{B_{o\lambda}} = 0 \rightarrow B_X = B_Y \rightarrow \dfrac{k_\mu 2I}{\alpha} = \dfrac{k_\mu 4I}{12-\alpha} \rightarrow 12 - \alpha = 2\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 4cm}$

5. Α→Σ

Β→Σ

Γ→Σ
Δ→Σ
Ε→Λ $(P = \upsilon \cdot \iota \rightarrow P = V\eta\mu\omega t \cdot I\eta\mu\omega t \rightarrow P = VI\eta\mu^2\omega t > 0)$

ΘΕΜΑ 2ο

1.Σωστό το (iii).

Αιτιολόγηση:

Την στιγμή $t = \frac{3\ln 2}{\Lambda}$ το πλάτος είναι:

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda \frac{3\ln 2}{\Lambda}} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-3\ln 2} \rightarrow$$

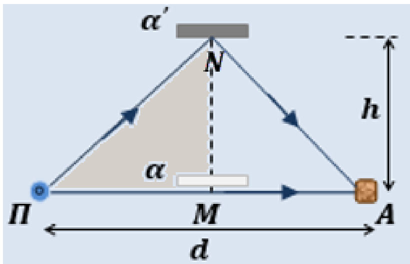
$$A = A_0 \cdot e^{\ln 2^{-3}} \rightarrow A = A_0 \cdot 2^{-3} \rightarrow A = \frac{A_0}{8}$$

και η ενέργεια: $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(\frac{A_0}{8}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \frac{A_0^2}{64} \rightarrow E = \frac{E_0}{64}$

Συνεπώς η «απώλεια» ενέργειας του συστήματος στον παραπάνω χρόνο είναι $\Delta E = E_0 - E = E_0 - \frac{E_0}{64} \rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{63}{64} E_0}$

2. Σωστό το (i)

Αιτιολόγηση:



Καθώς μετακινούμε τον ανακλαστήρα α, πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΠΑ, στον ανιχνευτή Α φτάνουν δύο κύματα, τα οποία ξεκινούν από την πηγή Π και διατρέχουν διαφορετικές αποστάσεις μέχρι να φτάσουν σε αυτόν. Ανιχνεύουμε ταλάντωση μέγιστου πλάτους στον ανιχνευτή, για τέταρτη φορά από τότε που αρχίσαμε να μετακινούμε τον ανακλαστήρα α, όταν για τις αποστάσεις αυτές, ισχύει η σχέση: $r_1 - r_2 = 4 \cdot \lambda$, $(\Pi N) + (NA) - (\Pi A) = 4 \cdot \lambda$,

$2 \cdot (\Pi N) - (\Pi A) = 4 \cdot \lambda$

ή $2 \cdot (\Pi N) = d + 4 \cdot \lambda = 6 \cdot \lambda + 4 \cdot \lambda = 10 \cdot \lambda$

$(\Pi N) = 5 \cdot \lambda$

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΝ:
$(\Pi N)^2 = (\Pi M)^2 + (MN)^2$, $(5 \cdot \lambda)^2 = (\frac{d}{2})^2 + h^2$, $h^2 = (5 \cdot \lambda)^2 - (3 \cdot \lambda)^2 = 16 \cdot \lambda^2$

Άρα $h = 4 \cdot \lambda = 4 \cdot \frac{\upsilon_\delta}{f}$ Τελικά $\upsilon_\delta = \frac{h \cdot f}{4}$

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow A' = \sqrt{2 \cdot A_1^2 + 2 \cdot A_1^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow A' = \sqrt{A_1^2} \rightarrow A' = A$$

Άρα $E = \frac{1}{2} \cdot D' \cdot A'^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A_1^2 = E_1 = E_2$

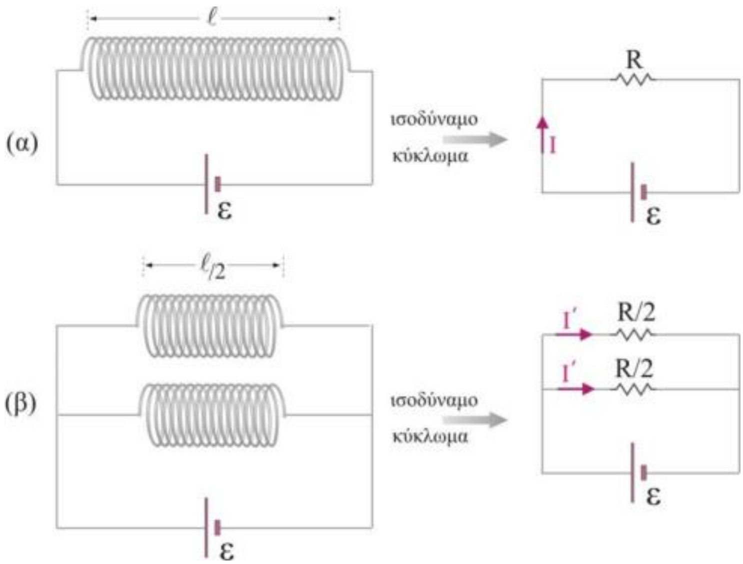
Συνεπώς: $E = E_1 = E_2$

3. Σωστό το ii

<u>Αιτιολόγηση:</u>
Από τη διατήρηση της ενέργειας, έχουμε
$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} + Q \rightarrow 0 + mgh = K + 0 + \frac{K}{8} \rightarrow mgh = \frac{9K}{8} \rightarrow \quad mgh = \frac{9}{8}\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \boxed{v = \frac{4}{3}\sqrt{gh}}$

4. Σωστό το (ii).

<u>Αιτιολόγηση:</u>
Το αρχικό σωληνοειδές έχει Ν σπείρες, μήκος ℓ και αντίσταση R. Όταν το σωληνοειδές κοπεί στη μέση θα έχει Ν/2 σπείρες, μήκος ℓ/2 και αντίσταση R/2. Στο σχήμα (α), όπου αυτό έχει

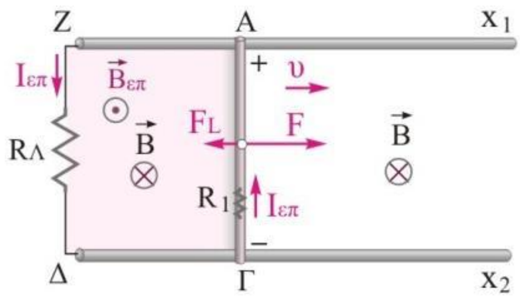


συνδεθεί με ιδανική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης Ε, η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει είναι $I = \frac{E}{R}$ και η ένταση του μαγνητικού πεδίου Β στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση $B = k_\mu 4\pi \frac{E}{R}\frac{N}{\ell}$.
Στο σχήμα (β) έχουμε συνδέσει την ίδια ιδανική πηγή με τα δύο σωληνοειδή παράλληλα
μεταξύ τους, επομένως η ένταση του ρεύματος Ι΄ που διαρρέει το κάθε σωληνοειδές είναι $I' = \frac{E}{R/2} \rightarrow I' = \frac{2E}{R}$ και η ένταση του μαγνητικού πεδίου Β΄ στο εσωτερικό του δίνεται από τη σχέση $B' = k_\mu 4\pi I' \frac{N/2}{\ell/2} \rightarrow$
$B' = k_\mu 4\pi \frac{2E}{R}\frac{N}{\ell} \rightarrow \boxed{B' = 2B}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Οι δύο μεταλλικοί οδηγοί, η ράβδος και ο αντιστάτης αποτελούν ένα κλειστό πλαίσιο από το οποίο διέρχεται μαγνητική ροή Φ=BS, όπου S το εμβαδόν του σχηματιζόμενου πλαισίου. Καθώς η ράβδος κινείται, μεταβάλλεται η επιφάνεια S με συνέπεια να αυξάνεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο και να εμφανίζεται επαγωγική τάση. Αν σε χρόνο Δt η ράβδος έχει μετατοπιστεί κατά Δx, τότε το μέτρο της επαγωγικής τάσης που εμφανίζεται στο πλαίσιο είναι

$$E_{\varepsilon\pi} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Phi_{\tau\varepsilon\lambda} - \Phi_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{BS_{\tau\varepsilon\lambda} - BS_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{B(S_{\tau\varepsilon\lambda} - S_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t} = \frac{B\Delta x L}{\Delta t} \rightarrow$$
$$E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon L \ (1)$$



Έχουμε κλειστό κύκλωμα, οπότε αναπτύσσεται επαγωγικό ρεύμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Για να συμβεί αυτό, το δευτερογενές μαγνητικό πεδίο, $B_{\varepsilon\pi}$, πρέπει να έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, για την δημιουργία μαγνητικού πεδίου σε κυκλικό αγωγό, αφού το μαγνητικό πεδίο έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη,

το επαγωγικό ρεύμα, $I_{επ}$, έχει φορά αντίθετη με αυτήν των δεικτών του ρολογιού.
Η ράβδος ΑΓ βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης Β και διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Γ προς το Α, άρα δέχεται δύναμη Laplace η οποία σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού έχει φορά αντίθετη από αυτήν της ταχύτητας και μέτρο ίσο με

$F_L = BIL = B\frac{E_{επ}}{R_{ολ}}L = B\frac{BυL}{R_Λ+R_1} \rightarrow F_L = \frac{B^2L^2υ}{R_Λ+R_1}$ (2)

Στη σχέση αυτή, όλοι οι όροι είναι σταθεροί εκτός από την ταχύτητα υ. Στην αρχή η ταχύτητα είναι μηδέν, άρα και η F_L . Έτσι, η ράβδος επιταχύνεται εξαιτίας της δύναμης F. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Η επιτάχυνση της ράβδου προκύπτει από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$ΣF = ma \rightarrow F - F_L = ma \rightarrow F - \frac{B^2L^2υ}{R_Λ+R_1} = ma \rightarrow a = \frac{F-\frac{B^2L^2υ}{R_Λ+R_1}}{m}$ (3)

Επειδή η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, η ταχύτητα της ράβδου διαρκώς αυξάνεται με συνέπεια, όπως προκύπτει από τη σχέση (3), το μέτρο της επιτάχυνσης της ράβδου να μειώνεται.
Έτσι, η κίνηση που θα εκτελέσει η ράβδος είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που το μέτρο της μειώνεται σε σχέση με το χρόνο.

Β. Όταν η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, δηλαδή η F_L γίνει ίση με την F, τότε η κίνηση θα γίνει ευθύγραμμη ομαλή με την οριακή ταχύτητα $υ_{ορ}$, με την οποία θα κινείται τελικά η ράβδος. Έτσι είναι $ΣF = 0 \rightarrow F = F_L \rightarrow$
$F = \frac{B^2L^2υ_{ορ}}{R_Λ+R_1} \rightarrow υ_{ορ} = \frac{F(R_Λ+R_1)}{B^2L^2}$ (4)

Πρέπει να υπολογίσουμε την αντίσταση $R_Λ$ του λαμπτήρα. Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα 6W/3V, η αντίσταση του λαμπτήρα είναι $P = \frac{V_K^2}{R_Λ} \rightarrow R_Λ = \frac{V_K^2}{P} \rightarrow R_Λ = 1,5Ω$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε: $\boxed{υ_{ορ} = 4\frac{m}{s}}$

Γ. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος βρίσκεται από τη σχέση $I = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \rightarrow$
$I = \frac{BυL}{R_Λ+R_1}$

και σταθεροποιείται όταν σταθεροποιηθεί η ταχύτητα, άρα είναι ίση με:
$I_1 = \frac{Bυ_{ορ}L}{R_Λ+R_1} \rightarrow I_1 = 2A$

Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα 6W/3V, προκύπτει η ένταση κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα $P_K = V_K I_K \rightarrow I_K = \frac{P_K}{V_K} \rightarrow$
$I_K = 2A$
Άρα, μετά τη σταθεροποίηση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά, αφού η ένταση που τον διαρρέει ισούται με την ένταση κανονικής λειτουργίας του.

Δ. Θα υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης Laplace τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα

της ράβδου είναι ίση με το ένα τέταρτο της $\upsilon_{ορ}$. $(2) \rightarrow F_L = \frac{B^2 L^2 \frac{\upsilon_{ορ}}{4}}{R_Λ + R_1} \rightarrow$
$F_L = 0{,}5N$
Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από τη δύναμη Laplace είναι

$$\frac{|\Delta W_{F_L}|}{\Delta t} = \frac{F_L \Delta x}{\Delta t} = F_L \upsilon = F_L \frac{\upsilon_{ορ}}{4} \rightarrow \boxed{\frac{|\Delta W_{F_L}|}{\Delta t} = 0{,}5\frac{J}{s}}$$

Την ίδια χρονική στιγμή ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από τους αντιστάτες είναι

$$P_{R_{ολ}} = I^2 R_{ολ} = \left(\frac{E_{επ}}{R_{ολ}}\right)^2 R_{ολ} = \frac{B^2 L^2 \upsilon^2}{R_Λ + R_1} = \frac{B^2 L^2 \left(\frac{\upsilon_{ορ}}{4}\right)^2}{R_Λ + R_1} \rightarrow \boxed{P_{R_{ολ}} = 0{,}5W}$$

Όπως παρατηρούμε ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από τη δύναμη Laplace και ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από τους αντιστάτες είναι ίσοι, κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς η ισχύς της F_L αντιπροσωπεύει τον ρυθμό παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία μετατρέπεται όλη σε θερμική πάνω στους αντιστάτες.

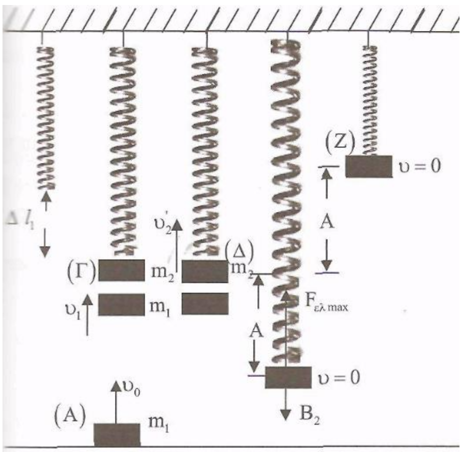
ΘΕΜΑ 4ο

Α. (i) Για την κίνηση του m_1 (Α→Γ) Θ.Μ.Κ.Ε έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \rightarrow K_Γ - K_A = W_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1 g h \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0 - 2gh} \rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 4m/s}.$$



(ii) Η κίνηση του m_1 είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη ,

με σταθερή επιβράδυνση $g = 10m/s^2$.
Άρα

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - gt \rightarrow t = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_1}{g} \rightarrow \boxed{t = 0,2s}.$$

(iii) Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες $(m_1 = m_2)$, θα ανταλλάξουν ταχύτητες, άρα:

$\upsilon_1' = \upsilon_2 \rightarrow \boxed{\upsilon_1' = 0}$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1 \rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 4m/s}$.

Β. Στη συνέχεια, το m_2 εκτελεί Γ.Α.Τ με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{50}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{5}s$ και κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \boxed{5rad/s}$.

Επειδή η ταχύτητα υ_2' αποκτήθηκε στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, θα είναι η μέγιστη ταχύτητα, άρα:

$$\upsilon_2' = \omega \cdot A \rightarrow A = \frac{\upsilon_2'}{\omega} \rightarrow \boxed{A' = 0,8m}.$$

Επίσης, για την Γ.Α.Τ είναι $\left.\begin{array}{c} x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ t = 0 \\ x = 0 \\ \upsilon > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 0 = \eta\mu\varphi_0 \\ \varphi_0 = 0 \\ \acute{\eta} \\ \varphi_0 = \pi \end{array}\right\} \xrightarrow{\upsilon>0}$

$\boxed{\varphi_{(0)} = 0}$

Η εξίσωση ταχύτητας της Γ.Α.Τ είναι :

$\upsilon = \upsilon_{MAX}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow \boxed{\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu 5t}$ (S.I).

Γ. Για την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, είναι:

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow x = 0,8\eta\mu 5t$ (S.I).

Επίσης έχουμε: $\Sigma F = -Dx \xrightarrow{D=K} \Sigma F = -50 \cdot 0,8\eta\mu 5t \rightarrow$

και $\left.\begin{array}{l} \Sigma F = -40\eta\mu 5t \\ \Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} - B_2 \end{array}\right\} \rightarrow \ \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - m_2 g = \Sigma F \rightarrow \boxed{F_{\varepsilon\lambda} = 20 - 40\eta\mu t}$ S.I

Είναι: $F_{ελ}=0 \to 20-40ημ5t=0 \to ημ5t=\frac{1}{2} \xrightarrow[φορα]{1η} 5t_1=\frac{\pi}{6} \to$

$\to t_1=\frac{\pi}{30}s$

$F_{ελ}=F_{ελ_{MAX}}=60N(*) \to 20-40ημ5t=60 \to ημ5t=-1$

και $\xrightarrow[φορα]{1η} 5t_2=\frac{3\pi}{2} \to \boxed{t_2=\frac{3\pi}{10}s}$ (*) Στην Θ.Ι

είναι ΣF=0 $\to F_{ελ}=B_2 \to K\Delta l_1=m_2g \to \Delta l_1=0,4m$.Όταν το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση ($x=-A$) της ταλάντωσης, τότε το ελατήριο έχει την μέγιστη παραμόρφωσή του.

$\Delta l_{MAX}=\Delta l_1+A \to \Delta l_{MAX}=1,2m$

και είναι $F_{ελ_{MAX}}=K\Delta l_{MAX} \to F_{ελ_{MAX}}=60N$.

Δ. Είναι $x=0,8ημ5t \xrightarrow{t=\frac{\pi}{10}s} x=0,8ημ\frac{\pi}{2} \to x=0,8m$.

Δηλαδή το m_2 βρίσκεται στη θέση Ζ που είναι η ακραία θέση της Γ.Α.Τ (x=+A).

Έτσι:

i) $W_{B_2}=B_2\cdot Aσυν180=20\cdot 0,8\cdot(-1) \to \boxed{W_{B_2}=-16J}$

ii) $$\left.\begin{aligned} &W_{F_{ελ}}=U_{ελ}^{(αρχ)}-U_{ελ}^{(τελ)}=\frac{1}{2}K\Delta l_{αρχ}^2-\frac{1}{2}K\Delta l_{τελ}^2 \\ &\text{όμως}\ \begin{aligned}\Delta l_{αρχ}&=\Delta l_1=0,4m\\ \Delta l_{τελ}&=A-\Delta l_1=0,4m\end{aligned}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{W_{Fελ}=0}$$

iii) $W_{ΣF}=W_{B_2}+W_{F_{ελ}} \to \boxed{W_{ΣF}=-16J}$

Εναλλακτικά: $W_{ΣF}=\Delta K=0-\frac{1}{2}m_2υ_2'^2 \to W_{ΣF}=-16J$

ή $W_{ΣF}=U_{ΤΑΛ}^{αρχ}-U_{ΤΑΛ}^{τελ}=0-\frac{1}{2}KA^2=-16J$.

Επιμέλεια: Βλαχόπουλος Άρης

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1 → δ
2 → γ
3→ β
4→ β

5.

Α→Σωστό
Β → Λάθος
Γ →Σωστό
Δ → Σωστό
Ε →Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

1. σωστό το (α)
   <u>Αιτιολόγηση</u>:

Η εξίσωση που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι: $E = E_{max}ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$
οπότε από την εξίσωση $E = 30ημ2π(6 \cdot 10^{10}t - 2 \cdot 10^{2}x) \quad (S.I.)$ της (α) απάντησης προκύπτει:
$T = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10}\ s \Rightarrow f = 6 \cdot 10^{10}\ Hz$ και $λ = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\ m$
Άρα η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το ηλεκτρικό πεδίο του αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι:
$υ = λf = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{10} = 3 \cdot 10^{8}\ m/s = c$
Συνεπώς αυτή η εξίσωση της (α) απάντησης είναι αποδεκτή. Αντίθετα οι άλλες δύο απαντήσεις δεν είναι αποδεκτές γιατί για την εξίσωση $E = 30ημ2π(8 \cdot 10^{10}t - 3 \cdot 10^{2}x) \quad (S.I.)$ της (β) απάντησης προκύπτει

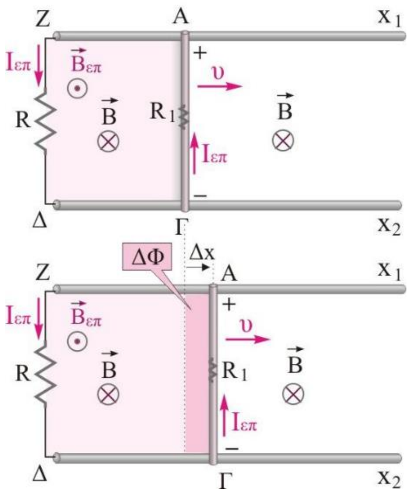
$T = \frac{1}{8} \cdot 10^{-10} s \Rightarrow f = 8 \cdot 10^{10}$ Hz και $\lambda = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$ m οπότε $\upsilon = \lambda f = \frac{8}{3} \cdot 10^{8}$ m/s $\neq c$

για την εξίσωση $E = 30\eta\mu 2\pi(9 \cdot 10^{10} t - 4 \cdot 10^{2} x)$ (S.I.) της (γ) απάντησης προκύπτει

$T = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} s \Rightarrow f = 9 \cdot 10^{10}$ Hz και $\lambda = \frac{1}{4} \cdot 10^{-2}$ m οπότε $\upsilon = \lambda f = \frac{9}{4} \cdot 10^{8}$ m/s $\neq c$

2. σωστό το (γ)

Αιτιολόγηση:



Οι δύο μεταλλικοί οδηγοί, η ράβδος και ο αντιστάτης αποτελούν ένα κλειστό πλαίσιο από το οποίο διέρχεται μαγνητική ροή Φ=BS, όπου S το εμβαδόν του σχηματιζόμενου πλαισίου. Καθώς η ράβδος κινείται, μεταβάλλεται η επιφάνεια S με συνέπεια να αυξάνεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο και να εμφανίζεται επαγωγική τάση. Αν σε χρόνο Δt η ράβδος έχει μετατοπιστεί κατά Δx, τότε η επαγωγική τάση που εμφανίζεται στο πλαίσιο είναι

$E_{\varepsilon\pi} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Phi_{\tau\varepsilon\lambda} - \Phi_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{BS_{\tau\varepsilon\lambda} - BS_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \rightarrow$

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{B(S_{\tau\varepsilon\lambda} - S_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t} \rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t} \rightarrow E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon L$$

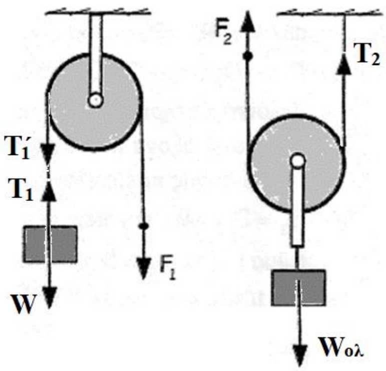
Το κλειστό κύκλωμα ΖΔΓΑΖ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα του οποίου η ένταση είναι

$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} = \frac{B\upsilon L}{R+R_1} = \frac{B\upsilon L}{R+2R} = \frac{B\upsilon L}{3R}$

Η διαφορά δυναμικού $V_{Z\Delta}$, στα άκρα της αντίστασης R, σύμφωνα με τον νόμο του Ohm είναι $V_{Z\Delta} = I_{\varepsilon\pi} R = \frac{B\upsilon L}{3R} R \rightarrow \boxed{V_{Z\Delta} = \frac{1}{3} B\upsilon L}$

3. σωστό το (γ)

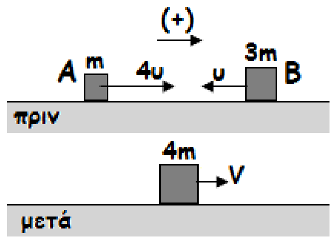
Αιτιολόγηση:



Στο πρώτο σύστημα:
Για το σώμα: $\Sigma F = 0 \to T_1 = W$
Όμως $T_1{}' = T_1 \to T_1{}' = W$
Για την τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \to F_1 R = T_1{}'R \to F_1 = W$ (1)
Στο δεύτερο σύστημα:
$\Sigma\tau = 0 \to F_2 R = T_2 R \to F_2 = T_2$ (2)
$\Sigma F = 0 \to F_2 + T_2 = W_{o\lambda} \to F_2 + T_2 = \frac{3W}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} 2F_2 = \frac{3W}{2} \to F_2 = \frac{3W}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} F_2 = \frac{3}{4}F_1 \to \boxed{F_1 = \frac{4}{3}F_2}$

4. **σωστό το (α)**

Αιτιολόγηση:



Κατά την πλαστική κρούση, το σύστημα των δύο σωμάτων θεωρείται μονωμένο (δηλαδή $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0$) άρα ισχύει η αρχή διατήρηση της ορμής (ΑΔΟ):
$\vec{p}^{\,o\lambda}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}^{\,o\lambda}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m4\upsilon\text{-}3m\upsilon=4mV \Rightarrow V=\frac{\upsilon}{4}$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάθηκε κατά την κρούση είναι: $\frac{E_{\alpha\pi\omega\lambda}}{K^{o\lambda}_{\alpha\rho\chi}} = \frac{K^{o\lambda}_{\alpha\rho\chi} - K^{o\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda}}{K^{o\lambda}_{\alpha\rho\chi}} =$

$$\frac{\frac{1}{2}m(4\upsilon)^2+\frac{1}{2}3m\upsilon^2-\frac{1}{2}4mV^2}{\frac{1}{2}m(4\upsilon)^2+\frac{1}{2}3m\upsilon^2} = \frac{16m\upsilon^2+3m\upsilon^2-4m(\frac{\upsilon}{4})^2}{16m\upsilon^2+3m\upsilon^2} = \frac{19\upsilon^2-\frac{\upsilon^2}{4}}{19\upsilon^2} = \frac{\frac{75}{4}\upsilon^2}{19\upsilon^2} = \frac{75}{76}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας για τη θερμική συσκευή βρίσκουμε το ρεύμα κανονικής της λειτουργίας και την αντίστασή της.
$I_K = \frac{P_K}{V_K} = \frac{400}{160} \to I_K = 2{,}5A$ και $R_\Sigma = \frac{V_K}{I_K} = \frac{160}{2{,}5} \to \boxed{R_\Sigma = 64\Omega}$
Επειδή η συσκευή λειτουργεί κανονικά, $I_{\varepsilon\nu}=I_K \to \boxed{I_{\varepsilon\nu} = 2{,}5A}$

Β. Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι : $R_{o\lambda} = R + R_\Sigma = 80\Omega$
Επίσης: $V_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu}R_{o\lambda} \to V_{\varepsilon\nu} = 200V$ και $V = V_{\varepsilon\nu}\sqrt{2} = 200\sqrt{2}V$

Η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης δίνεται από τη σχέση $f=\frac{N}{\Delta t}=\frac{6000}{120}\rightarrow f=50Hz$ και η γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi f\rightarrow$ $\omega=100\pi\frac{rad}{s}$

Άρα η εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης, είναι: $\upsilon=V\eta\mu\omega t\rightarrow$

$\boxed{\upsilon=200\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t\ \ (SI)}$

Γ. Το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι $I=I_{\varepsilon\nu}\sqrt{2}=2{,}5\sqrt{2}A$

Άρα, η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης έντασης είναι

$i=I\eta\mu\omega t\rightarrow i=2{,}5\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t\ \ (SI)$

για $t=\frac{11}{600}s$, είναι: $i=2{,}5\sqrt{2}\eta\mu\frac{11\pi}{6}\rightarrow i=2{,}5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\rightarrow i=-1{,}25\sqrt{2}A$

Ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας στο κύκλωμα είναι η στιγμιαία ισχύς

$\frac{dQ}{dt}=P=i^2R_{o\lambda}=\left(-1{,}25\sqrt{2}\right)^2 80\rightarrow\boxed{\frac{dQ}{dt}=250\frac{J}{s}}$

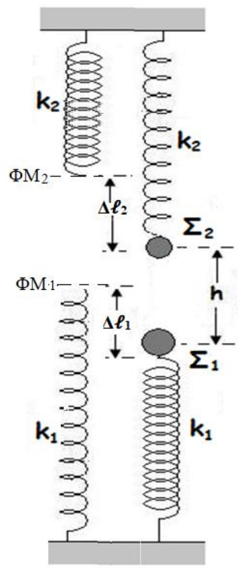
Δ. Πρέπει $V_{\varepsilon\nu}{}'=V_K=160V$, άρα $V'=160\sqrt{2}V$

Αρχικά είναι $V=NBA\omega$ και τελικά $V'=NB'A\omega$

Οπότε: $\frac{V'}{V}=\frac{NB'A\omega}{NBA\omega}\rightarrow\frac{160\sqrt{2}}{200\sqrt{2}}=\frac{B'}{B}\rightarrow B'=\frac{4}{5}B$

Άρα, $\pi\%=\frac{B'-B}{B}100\%=\frac{\frac{4}{5}B-B}{B}100\%\rightarrow\boxed{\pi\%=-20\%}$

ΘΕΜΑ 4ο



Α. Για την Α.Α.Τ του σώματος Σ_1 το πλάτος είναι A=d=0,4m.

Επίσης $k_1=m_1\omega_1^2\rightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\rightarrow\omega_1=20\frac{rad}{s}$

Είναι $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\xrightarrow{t=0,\ x=A}A=A\eta\mu\varphi_0\rightarrow$ $\eta\mu\varphi_0=1\xrightarrow{0\leq\varphi_0<2\pi}\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

Οπότε $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\rightarrow$

$$x=0{,}4\eta\mu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (SI)\ \ (1)$$

Έχουμε: $\Sigma F=-k_1x\rightarrow w_1-F_{\varepsilon\lambda,1}=-kx\rightarrow$ $F_{\varepsilon\lambda,1}=m_1g+kx\rightarrow$

$\boxed{F_{\varepsilon\lambda,1}=40+640\eta\mu\left(20t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (SI)}$

Β. Η κρούση θα γίνει την στιγμή t_1 κατά την οποία

$x_1 = -h \xrightarrow{(1)} x_1 = 0{,}4\eta\mu\left(20t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}2 \ \rightarrow \eta\mu\left(20t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{(1\eta\ \varphi o\rho\acute{\alpha})} \ 20t_1 + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} \ \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{30}s}$

Η ταχύτητα ταλάντωσης είναι:

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow \upsilon = 8\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{t_1 = \frac{\pi}{30}s} \upsilon_1 =$
$8\sigma\upsilon\nu\left(20\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \upsilon_1 = -4\sqrt{3}\frac{m}{s}$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του Σ_1 την στιγμή t_1, είναι

$\frac{dU_T}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F\upsilon = -(-k_1x_1)\upsilon_1 = k_1x_1\upsilon_1 =$
$1600(-0{,}2)(-4\sqrt{3}) \rightarrow \boxed{\frac{dU_T}{dt} = 1280\sqrt{3}\frac{J}{s}}$

Γ. Στη θέση ισορροπίας του Σ_2, είναι $\Sigma F = 0 \rightarrow W_2 = F_{\varepsilon\lambda,2} \rightarrow m_2g = k_2\Delta l_2 \rightarrow \Delta l_2 = \frac{1}{30}m$

Το Σ_2 κατά την ταλάντωσή του, δέχεται από το ελατήριο την μεγαλύτερη κατά μέτρο δύναμη όταν βρίσκεται στην κατώτερη θέση, όπου η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου, θα είναι: $\Delta l_{2,max} = \Delta l_2 + A_2$, όπου A_2 το πλάτος της ταλάντωσής του.

Είναι: $F_{\varepsilon\lambda,max} = k_2(\Delta l_2 + A_2) \rightarrow \Delta l_2 + A_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda,max}}{k_2} \rightarrow A_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda,max}}{k_2} - \Delta l_2 \rightarrow A_2 = 0{,}32m$

Αμέσως μετά την κρούση το Σ_2, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (και ΦΜ), έχοντας μέγιστη ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2' = \omega_2A_2 \rightarrow \upsilon_2' = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}A_2 \rightarrow$

$$\upsilon_2' = 3{,}2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Κατά την κρούση, το σύστημα των σωμάτων μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, οπότε εφαρμόζουμε ΑΔΟ, θεωρώντας την προς τα πάνω φορά ως θετική. $\vec{p}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} \rightarrow m_1\upsilon_1 + 0 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \rightarrow$

$$\upsilon_1' = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2'}{m_1} \rightarrow \upsilon_1' = 0$$

Άρα το Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία μετά την κρούση, οπότε ξεκινά να εκτελεί μια νέα ΑΑΤ με πλάτος Α΄= h=0,2m

Κατά την ταλάντωση του $Σ_1$, το ελατήριο k_1, αποκτά τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης στην κατώτερη ακραία θέση, όπου $Δl_{1,max} = Δl_1 + A'$

Στη θέση ισορροπίας του $Σ_1$, είναι: $ΣF = 0 \to W_1 = F_{ελ,1} \to m_1 g = k_1 Δl_1 \to Δl_1 = \frac{1}{40} m$

Οπότε: $U_{ελατ,1max} = \frac{1}{2} k_1 (Δl_1 + A')^2 \to \boxed{U_{ελατ,1max} = 40{,}5J}$

Επιμέλεια: Βλαχόπουλος Άρης

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

Α1. β

Α2. δ

Α3. δ

Α4. β

Α5. Λ Σ Λ Λ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Σωστό το (iii)

Ξέρουμε ότι για την σκέδαση Compton, ισχύει: $λ' - λ = \frac{h}{m_e c}(1 - συνθ)$ (1)

Για να είναι το λ΄ μέγιστο, πρέπει το 1-συνθ να είναι μέγιστο, οπότε $συνθ = -1$, δηλαδή η γωνία σκέδασης να είναι $θ=180^0$.

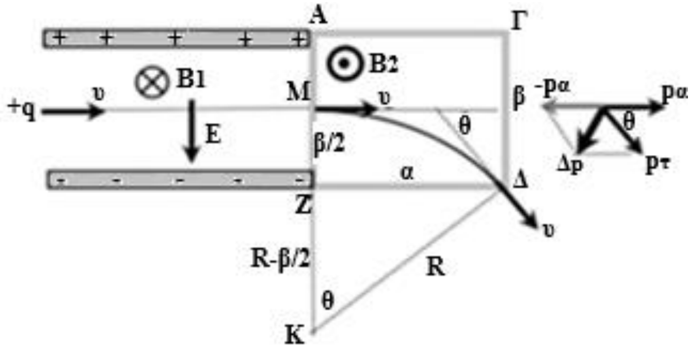
Τότε $(1) \to λ' - λ = \frac{h}{m_e c}[1 - (-1)] \to λ' - λ = \frac{2h}{m_e c} \to λ' - λ = 2λ \to λ' = 3λ$ (2)

Από την διατήρηση της ενέργειας, έχουμε: $E_φ = E_φ' + K_e \to K_e = hf - hf' \to K_e = \frac{hc}{λ} - \frac{hc}{3λ} \to K_e = \frac{2hc}{3λ} \to K_e = \frac{2hc}{3\frac{h}{m_e c}} \to \boxed{K_e = \frac{2}{3} m_e c^2}$ **(2+6Μ)**

Β2. Σωστό το (i)

Στον επιλογέα ταχυτήτων, αφού το σωματίδιο δεν εκτρέπεται, έχουμε:

$\Sigma F = 0 \rightarrow qE = B_1 \upsilon q \rightarrow \upsilon = \frac{E}{B_1}$ (1)



Στο μαγνητικό πεδίο B₂, κάνει ΟΚΚ με ακτίνα R και βγαίνοντας από το σημείο Δ, η γωνιακή απόκλιση είναι θ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΖΔ, από πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει: $R^2 = \alpha^2 + \left(R - \frac{\beta}{2}\right)^2 \rightarrow$

$R^2 = \alpha^2 + R^2 - R\beta + \frac{\beta^2}{4} \quad \rightarrow R\beta = \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} \ \rightarrow R\beta = \beta^2 \rightarrow R = \beta$

Είναι: $\eta\mu\theta = \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{\beta\sqrt{3}}{2}}{\beta} \rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60^0$

Έχουμε: $|\Delta p|^2 = |-p_\alpha|^2 + |p_\tau|^2 + 2|-p_\alpha||p_\tau|\sigma\upsilon\nu(180^0 - 60^0) \rightarrow$

$|\Delta p|^2 = |p|^2 + |p|^2 + 2|p||p|\sigma\upsilon\nu 120^0 \rightarrow$

$|\Delta p|^2 = |p|^2 \rightarrow \Delta p = p = m\upsilon \xrightarrow{(1)} \boxed{\Delta p = \upsilon = \frac{mE}{B_1}}$

Β3. Σωστό το (iii)

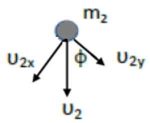
Σε μια χορδή με στερεωμένα άκρα (δεσμοί), όταν δημιουργηθεί στάσιμο κύμα μήκους κύματος λ, με συνολικά Ν δεσμούς, το μήκος της χορδής είναι: $D = (N-1)\frac{\lambda}{2}$ (1)

Έχουμε: $\upsilon_1 = 3\upsilon_2 \rightarrow \lambda_1 f = 3\lambda_2 f \rightarrow \lambda_1 = 3\lambda_2$ (2)

$D_1 = D_2 \rightarrow (N_1 - 1)\frac{\lambda_1}{2} = (N_2 - 1)\frac{\lambda_2}{2} \xrightarrow{N_1=5} (5-1)3\lambda_2 = (N_2 - 1)\lambda_2 \rightarrow$

$12 = N_2 - 1 \rightarrow$

ΘΕΜΑ 3ο



Γ1. Κατά την κρούση, ισχύει η ΑΔΟ μόνο στον άξονα της κίνησης, δηλαδή τον x΄x. Άρα: $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_{2x} = (m_1 + m_2)V$ $\xrightarrow{(V=0)}$ $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \eta\mu 30^0 = 0 \rightarrow \upsilon_1 = 3\frac{m}{s}$

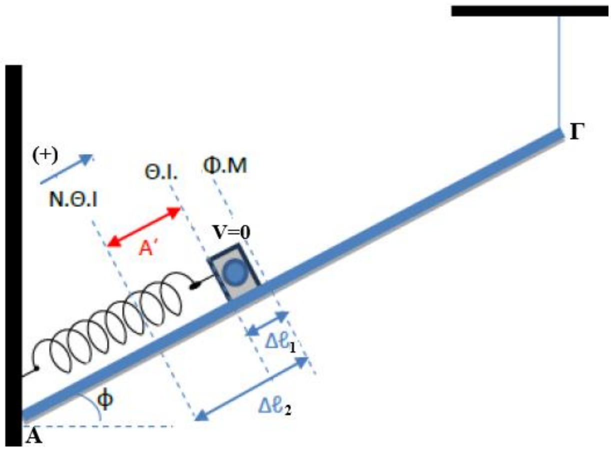
Για την ΑΑΤ του m_1 έχουμε $k = m_1\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$

Τη στιγμή της κρούσης, το m_1 διέρχεται από τη ΘΙ, άρα:

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A \rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \rightarrow A = 0{,}3m$

Άρα η ενέργεια ταλάντωσης πριν την κρούση είναι:

$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow \boxed{E_T = 9J}$



Γ2. Στη Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.) του m_1 πάνω στη ράβδο, η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα της κίνησης είναι μηδέν:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_{1x} \rightarrow k\Delta\ell_1 = m_1 g\,\eta\mu 30^0 \rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}05m$

Στη Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.) του συσσωματώματος είναι $\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_{o\lambda x} \rightarrow k\Delta\ell_2 = (m_1 + m_2)g\,\eta\mu 30^0 \rightarrow \Delta\ell_2 = 0{,}2m$

Το πλάτος της ΑΑΤ του συσσωματώματος είναι:

$A' = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \rightarrow A' = 0{,}15m$

Επίσης: $k = (m_1 + m_2)\omega'^2 \rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \rightarrow \omega' = 5\frac{rad}{s}$.

Είναι $x = A'\eta\mu(\omega' t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0,\quad x=+A'} A' = A'\eta\mu\varphi_0 \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Η εξίσωση ταχύτητας είναι: $\upsilon = \omega' A'\sigma\upsilon\nu(\omega' t + \varphi_0) \rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = 0{,}75\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$$

Γ3. Για την ΑΑΤ του συσσωματώματος έχουμε:

$$K = 8U_T \rightarrow E_T - U_T = 8U_T \rightarrow U_T = \frac{E_T}{9} \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{\frac{1}{2}kA'^2}{9} \rightarrow x = \pm\frac{A'}{3} \rightarrow$$

$$x = \pm 0{,}05m \xrightarrow{2^{\eta}\varphi o\rho\acute{\alpha}} x = -0{,}05m$$

Επίσης: $K = 8U_T \rightarrow K = 8(E_T - K) \rightarrow K = \frac{8E_T}{9} \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 = \frac{8\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_{max}^2}{9} \rightarrow$

$$\upsilon = \pm\frac{2\sqrt{2}\,\upsilon_{max}}{3} \rightarrow \upsilon = \pm\frac{2\sqrt{2}\,0{,}75}{3} \xrightarrow{2^{\eta}\varphi o\rho\acute{\alpha}} \upsilon = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης είναι:

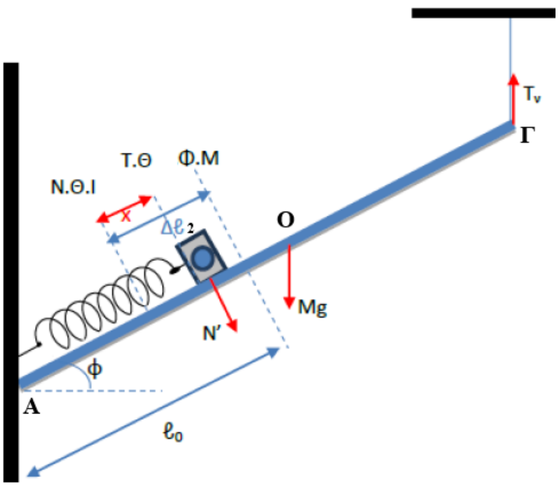
$$\frac{dU_T}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F\upsilon = -(-kx)\upsilon = kx\upsilon = 200(\,-0{,}05)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dU_T}{dt} = 5\sqrt{2}\,\frac{J}{s}}$$

Γ4. Για το συσσωμάτωμα πάνω στη ράβδο, είναι: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = (m_1 + m_2)g\,\sigma\upsilon\nu 30^0 \rightarrow N = 40\sqrt{3}\,N$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, η ράβδος δέχεται αντίθετη δύναμη ίσου μέτρου $N' = N = 40\sqrt{3}\,N$

Κάποια στιγμή το συσσωμάτωμα καθώς ταλαντώνεται, βρίσκεται σε μια τυχαία θέση (ΤΘ) που απέχει απόσταση x>0 από τη νέα ΘΙ.



Η ράβδος δεν στρέφεται, άρα $\Sigma\tau(A) = 0 \rightarrow \tau_{T_\nu} = \tau_{Mg} + \tau_{N'} \rightarrow$

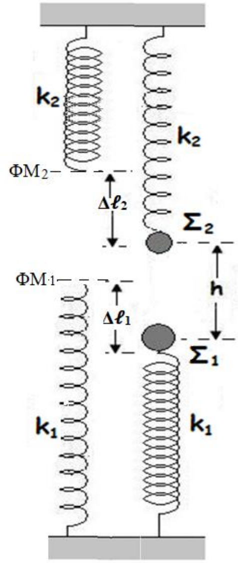
$$T_\nu d\sigma\upsilon\nu 30^0 = Mg\frac{d}{2}\sigma\upsilon\nu 30^0 + N'(\ell_0 - \Delta\ell_2 + x) \rightarrow \qquad T_\nu\, 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$3\,10\,\frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 40\sqrt{3}\,(0{,}7 - 0{,}2 + x) \rightarrow \qquad T_\nu = 15 + 40\,(0{,}5 + x) \rightarrow$$

$$T_\nu = 35 + 40x$$

$$\frac{T_{\nu max}}{T_{\nu min}} = \frac{35+40A'}{35+40(-A')} = \frac{35+40\,0{,}15'}{35+40(-0{,}15)} \rightarrow \boxed{\frac{T_{\nu max}}{T_{\nu min}} = \frac{41}{29}}$$

ΘΕΜΑ 4ο



Δ1. Ισορροπία του αγωγού ΜΝ:

$\Sigma F=0 \Rightarrow F_L = w \rightarrow BI_2L = mg \rightarrow I_2 = \frac{mg}{BL} \rightarrow I_2 = 5A$

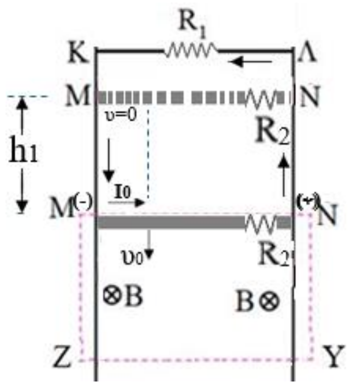
Είναι: $V_{MN} = I_2R_2 = 1V = V_{K\Lambda} = V_{\Pi O\Lambda IKH}$

Οπότε: $V_{K\Lambda} = I_1R_1 \rightarrow I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_1} \rightarrow I_1 = \frac{5}{4}A$

1ος κανόνας Κίρχωφ: $I = I_1 + I_2 \rightarrow I = \frac{25}{4}A$

$V_{\Pi O\Lambda IKH} = E - Ir \rightarrow E = V_{\Pi O\Lambda IKH} + Ir \rightarrow \boxed{E = 1{,}25V}$

Δ2. Με το άνοιγμα του διακόπτη (δ) τα ρεύματα μηδενίζονται, ο αγωγός ΜΝ αφήνεται από ύψος h_1 πάνω από την πλευρά ΣΤ, κάνει ελεύθερη πτώση και εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα υ_0.



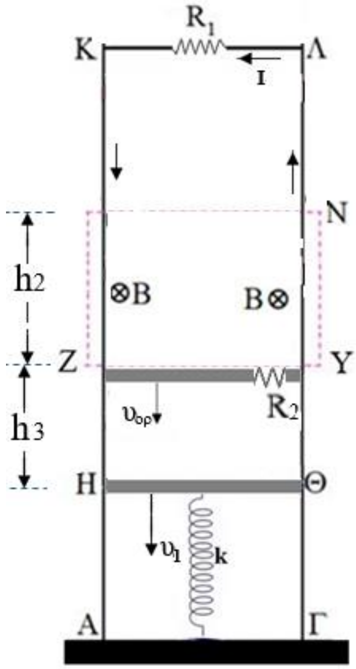
Για την κίνηση αυτή, εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ:

$\Delta K = \Sigma W \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - 0 = mgh_1 \rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gh_1} \rightarrow \upsilon_0 = 3\frac{m}{s}$

Τώρα αναπτύσσεται ΗΕΔ στη ράβδο $E_{\varepsilon\pi,0} = B\upsilon_0L \rightarrow E_{\varepsilon\pi,0} = 3V$ με το (+) στο Ν και κατά συνέπεια ρεύμα, έντασης:

$I_0 = \frac{E_{\varepsilon\pi,0}}{R_1+R_2} \rightarrow \boxed{I_0 = 3A}$

Δ3. Καθώς κινείται στο μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται ΗΕΔ $E_{επ} = BυL$ με το (+) στο Ν και κατά συνέπεια ρεύμα, έντασης $I = \frac{E_{επ}}{R_1+R_2} \rightarrow$ $I = \frac{BυL}{R_1+R_2}$.
Ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace μέτρου $F_L = BIL \rightarrow F_L = \frac{B^2υL^2}{R_1+R_2}$ αντίθετη με την φορά της κίνησης.
Αποκτά τελική ταχύτητα (οριακή), όταν
$ΣF=0 \Rightarrow F_L = w \rightarrow \frac{B^2υ_{ορ}L^2}{R_1+R_2} = mg \rightarrow υ_{ορ} = \frac{mg(R_1+R_2)}{B^2L^2} \rightarrow \boxed{υ_{ορ} = 5\frac{m}{s}}$



Δ4. Το φορτίο που μετακινήθηκε στο κύκλωμα, υπολογίζεται από το νόμο του Neumann: $q = \frac{ΔΦ}{R_1+R_2} \rightarrow q = \frac{B\,ΔA}{R_1+R_2} \rightarrow q = \frac{BLh_2}{R_1+R_2} \rightarrow$ $\boxed{q = 1C}$
Η θερμότητα που εκλύθηκε συνολικά στο κύκλωμα είναι ίση με την απόλυτη τιμή του έργου της δύναμης Laplace.
Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση της ράβδου μέσα στο μαγνητικό πεδίο:
$ΔK = ΣW \rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_{F_L} \rightarrow$
$\frac{1}{2}mυ_{ορ}^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = mgh_2 + W_{F_L} \rightarrow W_{F_L} = -1J$
Άρα $Q_{ολ} = |W_{F_L}| = 1J \rightarrow Q_1 + Q_2 = 1J$ (1)

Όμως $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sum I^2R_1Δt}{\sum I^2R_2Δt} = \frac{R_1\sum I^2Δt}{R_2\sum I^2Δt} = \frac{R_1}{R_2} = 4 \rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{4}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\boxed{Q_1 = 0{,}8J}$

Δ5. Η ράβδος, βγαίνοντας από το μαγνητικό πεδίο έχει ταχύτητα $υ_{ορ}$, κάνει κατακόρυφη βολή προς τα κάτω και αφού διανύσει απόσταση h_3, αποκτά ταχύτητα $υ_1$ με την οποία καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας στη ράβδο, οπότε στην συνέχεια εκτελεί ΑΑΤ.
Στη ΘΙ της ΑΑΤ είναι: $ΣF=0 \Rightarrow F_{ελ} = w \rightarrow kΔ\ell = mg \rightarrow Δ\ell = \frac{mg}{k} \rightarrow Δ\ell = 0{,}05m$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ: $K + U_T = E_T \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{40}\frac{m}{s}$

Για την κίνηση της ράβδου από τη στιγμή εξόδου από το μαγνητικό πεδίο, μέχρι να καρφωθεί στη ράβδο, εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ:

$\Delta K = \Sigma W \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 = mgh_3 \rightarrow$

$\boxed{h_3 = 0{,}75\text{m}}$

Επιμέλεια: Βλαχόπουλος Άρης

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Σωστό είναι το β.
Α2.Σωστό είναι το β.
Α3.Σωστό είναι το δ.
(γιατί $\omega = \alpha_\gamma t$ με $\alpha_\gamma = \sigma\tau\alpha\theta$. Η φορά βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού).
Α4.Σωστό είναι το δ.

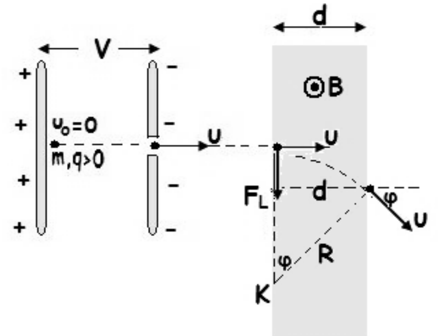
Α5. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Σωστό είναι το α.
Για την κίνηση του σωματιδίου στο ηλεκτρικό πεδίο από ΘΜΚΕ έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow \ \Rightarrow \frac{1}{2}m_p\upsilon^2 - 0 = e \cdot V \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}} \ (1)$$

Με την ταχύτητα που απόκτησε από την κίνηση στο ηλεκτρικό πεδίο, το σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο και με την επίδραση της δύναμης Laplace F_L διαγράφει κύκλο (εδώ μέρος του κύκλου). Η γωνιακή απόκλιση φ που σχηματίζει η ταχύτητα εισόδου με την ταχύτητα εξόδου είναι ίση με την επίκεντρη γιατί έχουν τις πλευρές τους κάθετες.



Για την κυκλική κίνηση έχουμε $F_L = F_K \Rightarrow$
$B\upsilon e = \frac{m_p\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m_p\upsilon}{Be}$ (2).

Από (1), (2) $\Rightarrow R = \frac{m_p}{Be}\sqrt{\frac{2eV}{m_p}} \Rightarrow R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_pV}{e}}$ (3).

Έτσι $\eta\mu\varphi = \frac{d}{R} \xrightarrow{(3)} \eta\mu\varphi = \frac{d}{\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_pV}{e}}} \Rightarrow \eta\mu\varphi = d \cdot B\sqrt{\frac{e}{2m_pV}} \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi = 30°}}$.

Β2. Σωστό είναι το β.

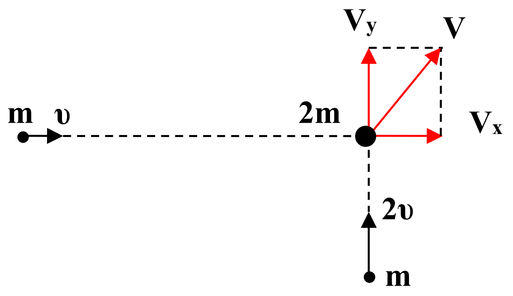
ΑΔΟ στον x΄x άξονα: $m\upsilon = 2mV_x \to V_x = \frac{\upsilon}{2}$

ΑΔΟ στον y΄y άξονα: $m \cdot 2\upsilon = 2mV_y \to V_y = \upsilon$

Άρα $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{4} + \upsilon^2} = \frac{\upsilon\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{\Delta K_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2mV^2 - \left[\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m(2\upsilon)^2\right]}{\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m(2\upsilon)^2} =$$

$$= \frac{\frac{5\upsilon^2}{4}}{\frac{5\upsilon^2}{2}} - 1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5 \text{ ή απώλεια } 50\%.$$



Β3. Σωστό είναι το α.

Ισχύει ότι: η ακτίνα της τροχιάς είναι $r = \frac{m\upsilon_\perp}{qB} = \frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{qB}$ άρα $\upsilon = \frac{rqB}{m\eta\mu\theta}$

και η περίοδός της $T = \frac{2\pi m}{qB}$.

Το βήμα της έλικας είναι:

$$\beta = \upsilon_\parallel T \Rightarrow \beta = \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta\frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \beta = \frac{rqB}{m\eta\mu\theta}\sigma\upsilon\nu\theta\frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \beta = \frac{2r\,\pi\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\beta = \frac{2\cdot 2\pi}{\varepsilon\varphi\theta} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = \pi\ \mathrm{cm}}}$$

Β4. Σωστό είναι το β.

Η τάση του νήματος παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, δηλαδή:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{l} \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{T\cdot l}{m}}$$

Τη στιγμή που σπάει το νήμα $\upsilon = \sqrt{\frac{T_{\theta\rho.}\cdot l}{m}} \overset{(SI)}{=} \sqrt{\frac{5\cdot 0,5}{0,1}} = 5\ \ \mathrm{m/s}$.

Η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \alpha_\gamma \cdot t \Leftrightarrow \omega R = \alpha_\gamma \cdot R\cdot t$

$$\Leftrightarrow \upsilon = \alpha t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{5}{2}s = 2{,}5\ \mathrm{sec}.$$

Επομένως $\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}t^2 \overset{(SI)}{=} \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{0,5}2{,}5^2 = \boxed{12{,}5\ \ \mathrm{rad}} \rightarrow (\beta)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Παρατηρούμε ότι $\underline{\lambda = 4\ \text{m}}$

Στο χρόνο t_1 το σώμα έχει διανύσει απόσταση $\frac{5\lambda}{4}$, επομένως $\frac{5T}{4} = 10\ \text{sec} \Leftrightarrow \underline{T = 8\ \text{s}}$ (αφού υ=σταθερή).

Το σημείο $O(x=0)$ στον χρόνο t_1 έχει διανύσει απόσταση ίση με $5A = 1{,}5\ \text{m} \Leftrightarrow \underline{A = 0{,}3\ \text{m}}$ $\left(\text{αφού σε χρόνο}\ \frac{T}{4}\ \text{διανύει απόσταση 1A}\right)$

Εξίσωση κύματος: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$$y_1 = 0{,}3\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} - \frac{x}{4}\right)\ (\text{SI})$$

β. i. $\upsilon = 0$ έχουν όσα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις, δηλαδή τα σημεία Ο, Γ και Ε.

ii. $\upsilon > 0$ έχουν τα σημεία Β και Ζ.

iii. τα ζεύγη των σημείων (O,Γ), (B,Δ), (Γ,E), (Δ,Z), γιατί έχουν Δx=(2k+1)λ/2, με k∈ℤ.

γ. $y_2 = 0{,}3\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} + \frac{x}{4}\right)\ (\text{SI})$.

Εξίσωση στάσιμου κύματος:

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow \boxed{y = 0{,}6\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu\frac{\pi t}{4}\ (\text{SI})}.$$

δ. Το σημείο Γ είναι κοιλία, επομένως: $\upsilon_{max} = \omega\cdot 2A = \boxed{0{,}15\pi\ \text{m/s}}$

ε. Το μήκος L του σχοινιού ΟΖ είναι $L = 5\ \text{m}$. Αν λ' είναι το νέο μήκος κύματος τότε $L = (N-1)\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4}$, όπου N το πλήθος των ακίνητων σημείων (δεσμοί).

Θέλουμε: $N = 3 + 2 = 5$

Επομένως $L=4\frac{\lambda'}{2}+\frac{\lambda'}{4}\Leftrightarrow 5=\frac{9\lambda'}{4}\Leftrightarrow \lambda'=\frac{20}{9}\ \text{m}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των αρχικών κυμάτων δεν αλλάζει,

επομένως: $\upsilon=\lambda'f'\Leftrightarrow \lambda f=\lambda'f'\Leftrightarrow f'=\frac{\lambda f}{\lambda'}\overset{(SI)}{=}\frac{4\cdot\frac{1}{8}}{\frac{20}{9}}=\boxed{\frac{9}{40}\ \text{Hz}}$ ή $\boxed{0,225\ \text{Hz}}$

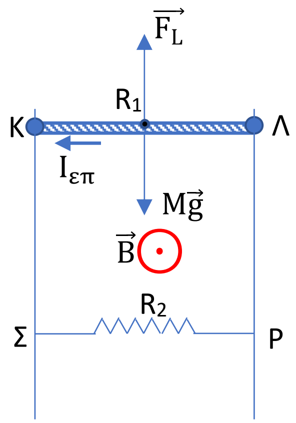
ΘΕΜΑ 4ο

α. Καθώς η ράβδος ΚΛ κατέρχεται τέμνοντας κάθετα τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, σαρώνει μια επιφάνεια μεταβλητού εμβαδού ΔΑ, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται στα άκρα της ΗΕΔ από επαγωγή:

.$E_{\varepsilon\pi}=B\upsilon\ell$.

Τότε στο κλειστό κύκλωμα δημιουργείται επαγωγικό ρεύμα έντασης.

$$I_{\varepsilon\pi}=\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}\ \Longrightarrow\ I_{\varepsilon\pi}=\frac{B\upsilon\ell}{R_1+R_2}$$



Η πολικότητα της ΗΕΔ είναι τέτοια ώστε, η δύναμη Lorentz που ασκείται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου να τα ωθεί στο άκρο της Λ, οπότε αυτό το άκρο να αποκτά αρνητικό δυναμικό και στο άλλο της άκρο να πλεονάζουν τα θετικά ιόντα, οπότε το σημείο Κ να αποκτά θετικό δυναμικό .

Αρχικά η ράβδος επιταχύνεται αλλά σταδιακά αυξάνεται το μέτρο της δύναμης Laplace $F_L=BI_{\varepsilon\pi}\ell\ \Longrightarrow\ F_L=\frac{B^2\upsilon\ell^2}{R_1+R_2}$ με αποτέλεσμα κάποια στιγμή $\Sigma F=0\Leftrightarrow F_L=Mg$, οπότε η ταχύτητα γίνεται μέγιστη (οριακή) και η ράβδος και κάνει πλέον ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Τότε

$$Mg=F_{L,}\Rightarrow Mg=\frac{B^2L^2}{R_1+R_2}\upsilon_{o\rho}\Rightarrow \upsilon_{o\rho}=\frac{R_1+R_2}{B^2L^2}Mg=\frac{40}{400}\cdot 10\frac{m}{s}\Rightarrow$$

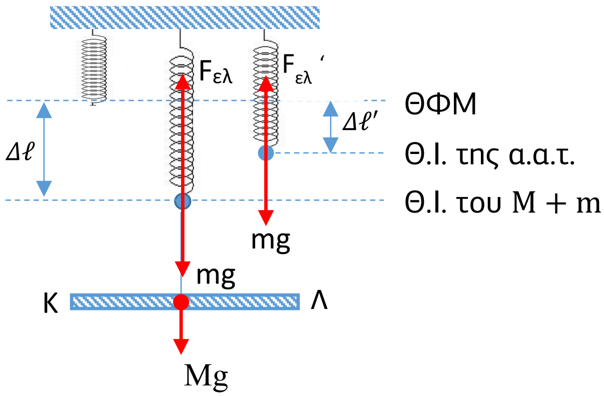
$\boxed{\upsilon_{o\rho}=1\frac{m}{s}}$.

β. Επειδή $\upsilon_{ορ} = 1\dfrac{m}{s} = σταθ.$ είναι $\upsilon_{ορ} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, για $\Delta x = \dfrac{H}{2}$ είναι $\Delta t = \dfrac{H/2}{\upsilon_{ορ}} = 1 sec$.

Όμως $\Delta t = \dfrac{T}{2}$, γιατί το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο το σφαιρίδιο μεγιστοποιεί δύο φορές διαδοχικά την κινητική του ενέργεια είναι $\dfrac{T}{2}$, με T την περίοδο της αατ (είναι ο χρόνος από τη Θ.Ι. ξανά τη Θ.Ι.).

Έτσι Τ=2·Δt=2s .Επομένως $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} \overset{(SI)}{\Longrightarrow} k = 20\dfrac{N}{m}$.

γ. Στη Θ.Ι. του συστήματος ράβδος – σφαιρίδιο:



$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} = mg + Mg \Leftrightarrow k\Delta\ell = (M+m)g \Leftrightarrow \Delta\ell = (M+m)g/k$.
Σε αυτήν τη θέση κόβουμε το νήμα και το σφαιρίδιο αρχίζει να κάνει αατ, ξεκινώντας με ταχύτητα υ=0, (ΑΘ).
Στη Θ.Ι. της αατ : $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ}' = mg \Leftrightarrow k\Delta\ell' = mg \Leftrightarrow \Delta\ell' = mg/k$
Τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι: $A = \Delta\ell - \Delta\ell' = Mg/k = 0{,}5m$.

δ. $E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}5^2 J = 2{,}5J$. Θεωρώντας κβαντικό αυτόν τον ταλαντωτή, η ενέργειά του είναι κβαντισμένη ,δηλαδή είναι της μορφής:

$E = nhf$ (n είναι ο κβαντικός αριθμός)$\Longrightarrow$

$E = nh\frac{1}{T} \Longrightarrow n=\frac{E\cdot T}{h}=\frac{2,5\cdot 2}{\frac{20}{3}}\cdot 10^{34}=0,75\cdot 10^{34}=7,5\cdot 10^{33}$.

ε. i. Αφού ΣF=0, $\frac{dK}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon_{op} = 0$ J/s

ii. $\frac{dWFL}{dt} = -F_L\cdot\upsilon_{op} = -M\cdot g\cdot\upsilon_{op} = -10$ J/s

iii. $\frac{dU\beta\alpha\rho}{dt} = -M\cdot g\cdot\upsilon_{op} = -10$ J/s

iv. $\frac{dQ}{dt} = I_{\varepsilon\pi}^{\ 2}\cdot R_{o\lambda} = |\frac{dWFL}{dt}| = 10$ J/s.

Επιμέλεια: Γκιώνη Βασιλική

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Σωστό είναι το β.

Α2. Σωστό είναι το α.

Αιτιολόγηση:

$$B_{o\lambda} = 0 \xrightarrow{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha} B_1 = B_2 \Leftrightarrow \cancel{k_\mu}\frac{2I_1}{r_1} = \cancel{k_\mu}\frac{2I_2}{r_2}\left(\Rightarrow \frac{I_1}{r_1} = \frac{4I_1}{r_2} \Leftrightarrow r_2 = 4r_1\right)$$

Α3. Σωστό είναι το γ.

Α4. Σωστό είναι το γ.

Α5.
- **α.** Σωστό
- **β.** Λάθος
- **γ.** Σωστό
- **δ.** Σωστό
- **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. α ⟶ **Λάθος,** γιατί T=2π s άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1\ rad/s$. Έτσι:

$$i = I \cdot \eta\mu\omega t = \underline{4 \cdot \eta\mu t}\ \text{(SI)}$$

β ⟶ **Σωστή.**

γ ⟶ **Σωστή,** γιατί $\bar{P} = V_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{V \cdot I}{2} = \frac{I^2 R}{2} = \frac{4 \cdot 10}{2} W = \underline{80\ W}$

δ ⟶ **Λάθος**, γιατί $Q = I_{\varepsilon\nu}^2 \cdot R \cdot t = \frac{I^2}{2} \cdot R \cdot t = \frac{4^2}{2} \cdot 10 \cdot 120\ J = \underline{9600\ J}$

ε ⟶ **Σωστή**, γιατί $P = i^2 R = 4^2 \cdot 10 = 160\ W$, μια και τη στιγμή αυτή,

$$i = I = 4\ A.$$

Β2. Σωστό είναι το α.

Ο αγωγός θα κινηθεί προς τα δεξιά με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, και έτσι στα άκρα του αναπτύσσεται επαγωγική τάση

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell \quad (1),$$

με πολικότητα Κ(-) και Λ(+), αφού η δύναμη Lorentz που ασκείται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου τα ωθεί στο άκρο της Κ, οπότε αυτό το άκρο να αποκτά αρνητικό δυναμικό και στο άλλο της άκρο να πλεονάζουν τα θετικά ιόντα, οπότε το σημείο Λ αποκτά θετικό δυναμικό.

Η επαγόμενη ΗΕΔ προκαλεί ρεύμα στον αγωγό το οποίο σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, ισούται με $I_{\varepsilon\pi} = \frac{E\varepsilon\pi}{2R} \overset{(1)}{\Rightarrow} I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{2R}$ (2).
Στον αγωγό θα ασκείται δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell \overset{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2\ell^2}{2R}\upsilon \quad (3),$$

η οποία αντιστέκεται στην κίνηση (κανόνας του Lenz).
Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή συνισταμένη δύναμη στον αγωγό ισούται με μηδέν άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = \frac{B^2\ell^2}{2R}\upsilon\ (4).$$

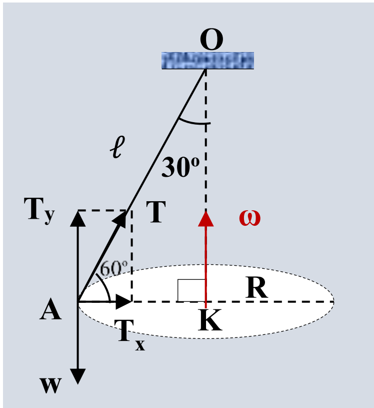
Παρατηρούμε ότι $V_{ΚΛ}= V_{ΑΓ}=I_{\varepsilon\pi}R=\frac{B\upsilon\ell}{2R}\ R\ =\frac{B\upsilon\ell}{2}$ (5).
Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5),(4)$\longrightarrow \frac{V_{ΚΛ}}{F}=\frac{R}{B\ell} \Rightarrow V_{ΚΛ}=\frac{F\cdot R}{B\cdot\ell}$.

Β3. Σωστό είναι το δ.

Στο σώμα ασκούνται το βάρος του Β = mg και η τάση του νήματος Τ.
Αφού κινείται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο έχουμε ότι :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow Τημ60^o = mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{ημ60^o}} \Rightarrow \boxed{T = 40N}$$



Και:

$$\Sigma F_x = \frac{m\upsilon^2}{R}(\text{κεντρομόλος}) \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{στο } \overset{\triangle}{ΟΚΑ} \text{ αφού } Α\hat{Ο}Κ = 30^o \Rightarrow \\ (AK) = \frac{\ell}{2} = R\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T_x = \frac{m\upsilon^2}{\ell/2} \Rightarrow Τσυν60^o = \frac{2m\upsilon^2}{\ell} \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon = 5\frac{m}{s}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ως προς τον άξονα ΟΚ θα είναι :

$\upsilon = \omega R \Leftrightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Leftrightarrow \omega = \frac{\upsilon}{\ell/2}$, άρα $\omega = \frac{5\cdot 2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}$.

Β4. Σωστό είναι το β.
Η πηγή (με $\varphi_0 = 0$) περνά για 6^{η} φορά από τη θέση y = + A σε χρόνο

$$5T + \frac{T}{4} = 42s \Leftrightarrow \frac{21T}{4} = 42s \Leftrightarrow \boxed{T = 8\ s}.$$

Στον ίδιο χρόνο η απόσταση που έχει διανύσει η διαταραχή θα είναι
$21\,\frac{\lambda}{4} = 21\ m \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 4m}$ και η πηγή έχει διανύσει απόσταση
$5 \cdot 4A + A = 42m \Leftrightarrow \boxed{A = 2m}$.

Άρα: $y = A\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} - \frac{x}{4}\right)$ (SI) ή
$y = \eta\mu\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right)$ (SI).

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού η κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι κεντρική κι ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή $\upsilon_1{}' = \upsilon_2 = 0$.
Επομένως το πλάτος της ταλάντωσης του ταλαντωτή Σ_1 - ελατήριο, μετά την κρούση, θα είναι $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m, αφού βρίσκεται σε ακραία θέση.

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \overset{t=0}{\leftrightarrow} A = A\,\eta\mu\varphi_0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\eta\mu\varphi_0 = 1\\ 0 \le \varphi_0 < 2\pi\end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}.$$

Για την κυκλική συχνότητα: $D = m_1\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} \overset{D=k}{\Rightarrow} \boxed{\omega = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$.

Η απομάκρυνση τη στιγμή $t = \frac{\pi}{8}$s θα είναι: $x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$

$$x \overset{(SI)}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\,\eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\eta\mu\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{4}\ m}.$$

Επομένως: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx \overset{(SI)}{=} -200 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \boxed{50\sqrt{6}\ kg\ \frac{m}{s^2}}$.

β. Το Σ_1 μόλις πριν τη σύγκρουσή του με το Σ_2, στη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$m έχει την ταχύτητα υ_1 που σύμφωνα με την ΑΔΕ είναι:

$$E = K + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m_1}}.$$

Άρα $\upsilon_1 \overset{(SI)}{=} \sqrt{\frac{200\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \sqrt{100 \cdot \frac{9}{4}} = 10 \cdot \frac{3}{2}$ ή $\boxed{\upsilon_1 = 15\ \frac{m}{s}}$.

Το Σ_2 αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα: $\boxed{\upsilon_2{}' = \upsilon_1 = 15\ \frac{m}{s}}$ κι επειδή το δάπεδο είναι λείο $(\Sigma F = 0)$, θα συγκρουστεί με το σώμα Σ_3 μ' αυτή την ταχύτητα.

ΑΔΟ: $m_2\upsilon_2' = (m_2 + m_3)V \Leftrightarrow V = \frac{m_2\upsilon_2'}{m_2+m_3} = \frac{2\cdot 15}{3}\ \frac{m}{s}$ ή $\boxed{V = 10\ \frac{m}{s}}$.

γ. Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς (Γ), επειδή το συσσωμάτωμα κινείται κυκλικά, πρέπει $\Sigma F = (m_2 + m_3)\ \frac{\upsilon^2}{\ell}$ (κεντρομόλος).

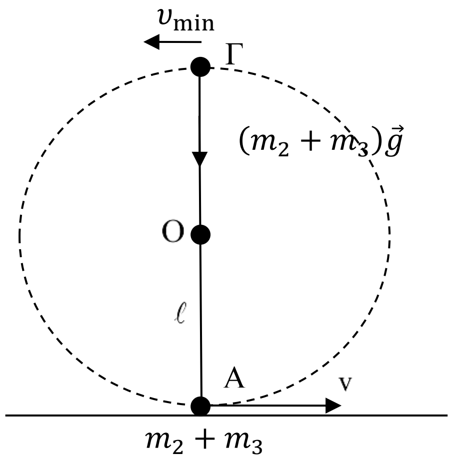
Επομένως: $(m_2 + m_3)g + T = (m_2 + m_3)\ \frac{\upsilon^2}{\ell}$, οριακά $T \simeq 0$, οπότε $\upsilon = \upsilon_{min}$

Επομένως: $\cancel{(m_2 + m_3)}g = \cancel{(m_2 + m_3)}\ \frac{\upsilon_{min}^2}{\ell} \Leftrightarrow \upsilon_{min} = \sqrt{g\ell}$ (1)

ΘΜΚΕ Α → Γ: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_{min}^2 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)V^2 == -(m_2 + m_3) \cdot g \cdot 2\ell \Leftrightarrow$$

$\upsilon_{min}^2 - V^2 = -4g\ell \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g\ell - V^2 = -4g\ell \Leftrightarrow V^2 = 5g\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{V^2}{5g}$ ή $\boxed{\ell = 2\ m}$.



Το μέτρο της στροφορμής του συσσωματώματος στη θέση Γ, ως προς το Ο είναι:

$|L| = (m_2 + m_3) \cdot \upsilon_{min}\ell = (m_2 + m_3) \cdot \sqrt{g\ell} \cdot \ell = 3\sqrt{2 \cdot 10} \cdot 2\ kg\ \frac{m}{s^2}$ ή $\boxed{|L| = 12\sqrt{5}\ kg\ \frac{m^2}{s}}$.

δ. Εφόσον το δάπεδο είναι λείο ($\Sigma F = 0$), είναι $d = \upsilon_2' \cdot t$,

όπου $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10}$ s.

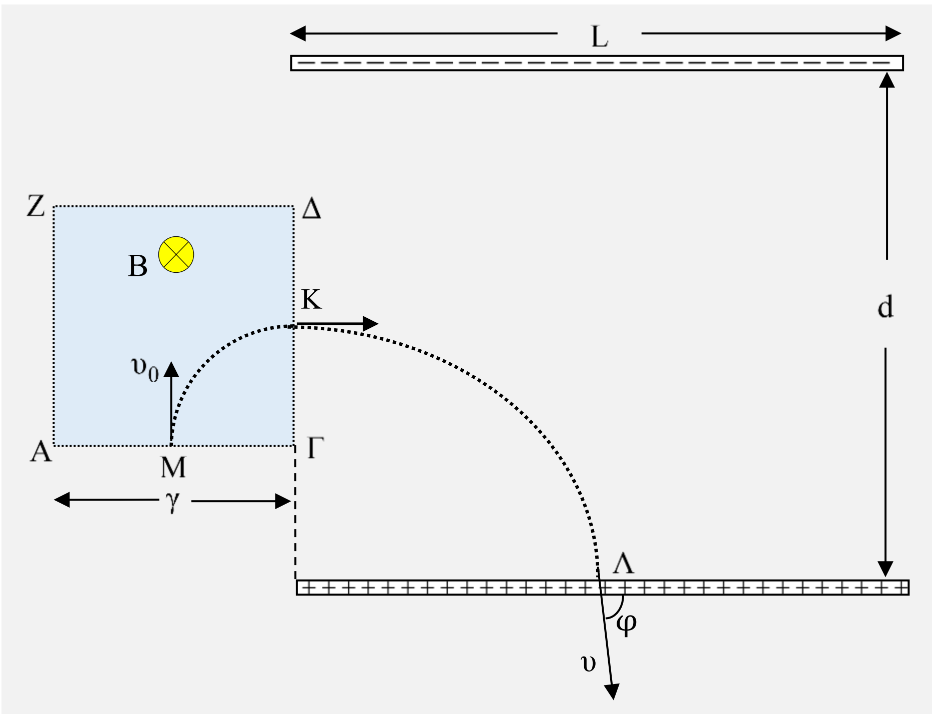
Άρα, $d = 15 \cdot \frac{\pi}{10}$ m $= \frac{3\pi}{2}$ m ή $\boxed{d = 4{,}71\ m}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Στο ηλεκτρόνιο μόλις μπει στο μαγνητικό πεδίο, ασκείται δύναμη Lorentz, μέτρου $F_L = B\upsilon_0|q| = B\upsilon_0 \cdot e$ και κατεύθυνσης από το Μ προς το Γ.

Η δύναμη αυτή παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, επομένως:

$$F_L = B\upsilon_0 \cdot e \Leftrightarrow \frac{m\upsilon_0^{\cancel{2}}}{R} = B\cancel{\upsilon_0} \cdot e \Leftrightarrow \upsilon_0 = \frac{RBe}{m}$$, όπου:



$R = \frac{\gamma}{2} = 9{,}1\ \mu m = 9{,}1 \cdot 10^{-6}$ m, όπως βλέπουμε στο σχήμα.

Συνεπώς:

$$\upsilon_0 = \frac{9{,}1\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\cdot 0{,}5\ \mathrm{T}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\mathrm{C}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\mathrm{kg}} \Rightarrow \upsilon_0 = 0{,}8\cdot 10^{6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 8\cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

.

β. Το σωματίδιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο με τη υ_0 αφού η κίνηση που έκανε ήταν ομαλή κυκλική. Εκεί θα κάνει σύνθετη κίνηση που αναλύεται ως εξής:

<u>Στον $x'x$ άξονα</u>

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$ κίνηση ευθύγραμμη ομαλή

$$\begin{cases} \upsilon_x = \sigma\tau\alpha\theta. = \upsilon_0 \\ x = \upsilon_0 \cdot t \end{cases}$$

<u>Στον $y'y$ άξονα</u>

$\Sigma F_y = F_{\eta\lambda} = E\cdot e = \dfrac{V\cdot e}{d} = \sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow$ κίνηση ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη.

$$\begin{cases} \upsilon_y = \alpha\cdot t \\ y = \dfrac{1}{2}\alpha\cdot t^2 \\ \Sigma F_y = m\alpha \end{cases}$$

Μόλις φτάσει στο σημείο Λ θα έχει κάνει $y = \dfrac{d}{2} = 0{,}8\ \mathrm{m}$.

Όμως $\Sigma F_y = m\alpha \Leftrightarrow \dfrac{Ve}{d} = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{Ve}{md}$, άρα:

$$\alpha = \frac{\cancel{9{,}1}\cdot 10^{3}\mathrm{V}\cdot \cancel{1{,}6}\cdot 10^{-19}\mathrm{C}}{\cancel{9{,}1}\cdot 10^{-31}\mathrm{kg}\cdot \cancel{1{,}6}\mathrm{m}} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}}.$$

Είναι $y = \dfrac{1}{2}\alpha\cdot t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\dfrac{2y}{\alpha}} \Leftrightarrow t = \sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}8\mathrm{m}}{10^{15}\mathrm{m/s^2}}} = \sqrt{16\cdot 10^{-16}}\ \mathrm{s} \Leftrightarrow$

$\boxed{t = 4\cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}}$

Τότε: $x = \upsilon_0\cdot t$ ή $x = 8\cdot 10^{5}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 4\cdot 10^{-8}\mathrm{s} \Rightarrow \boxed{x = 32\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}$.

Όμως $L = 2x \Rightarrow \boxed{L = 64\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}$.

γ. $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\alpha t}{\upsilon_0} = \frac{10^{15}\frac{m}{s^2}\cdot 4\cdot 10^{-8}s}{8\cdot 10^5\frac{m}{s}} = \boxed{50}$$ (άρα $\varphi \simeq 88,85^o$)

δ. $$W_{o\lambda} = W_{MK} + W_{K\to\Lambda}$$

Όμως $W_{MK} = 0$, γιατί η δύναμη Lorentz (κεντρομόλος) είναι κάθετη στη κάθε στοιχειώδη μετατόπιση.

Η $F_{\eta\lambda}$ είναι συντηρητική δύναμη, συνεπώς το έργο που παράγει σε μια διαδρομή είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Άρα:

$$W_{K\to\Lambda} = W_{K\to Z} + W_{Z\to\Lambda} = F_{\eta\lambda}\cdot(KZ) + 0 = Ee\cdot\frac{d}{2} = \frac{V}{\cancel{d}}e\frac{\cancel{d}}{2} = \frac{Ve}{2},$$

άρα:

$W_{K\to\Lambda}=7,28\cdot10^{-16}$ J. Συνεπώς:

$$\boxed{W_{o\lambda} = 7,28\cdot 10^{-16}\ J}$$

Β.

α. Για να ισορροπήσει πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow E\cdot|q| = mg \Leftrightarrow \frac{V}{d}|q| = mg \Leftrightarrow |q| = \frac{dmg}{V}$$

Άρα

$$|q| = \frac{1,6m\cdot \cancel{9,1}\cdot 10^{31}kg\cdot 10m/s^2}{\cancel{9,1}\cdot 10^3 V} \Rightarrow \boxed{|q| = 1,6\cdot 10^{-33}\ C < e}$$

Το μικρότερο φορτίο που φέρει ένα ελεύθερο σωματίδιο είναι κατ' απόλυτη τιμή $e = 1,6\cdot 10^{-19}C$. Εδώ $|q| < e$, το οποίο θεωρούμε αδύνατο.

β. Ομοίως,

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow \frac{V}{d}e = mg \Leftrightarrow m = \frac{Ve}{gd} = \frac{9,1\cdot 10^3 V\cdot \cancel{1,6}\cdot 10^{-19}C}{10\ m/s^2\cdot \cancel{1,6}m} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow m = 9,1\cdot 10^{-17}kg$ που είναι δυνατόν να υπάρχει.

Επιμέλεια: Γκιώνη Βασιλική

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Σωστό είναι το α.

Α2. Σωστό είναι το β, (γιατί $\upsilon_A = 2\upsilon_{cm}$).

Α3. Σωστό είναι το α.

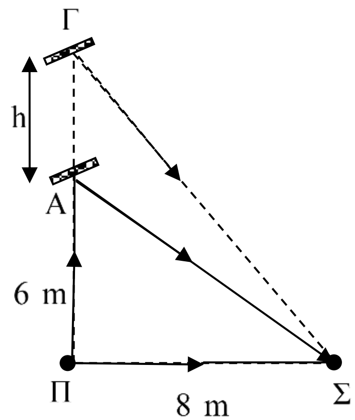
Α4. Σωστό είναι το δ.

Α5. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\Pi A \Sigma}$:
$(A\Sigma)^2 = 6^2 + 8^2 \ (SI) \Leftrightarrow \boxed{(A\Sigma) = 10 \text{ m}}$.

Εάν $r_1 = (\Pi A) + (A\Sigma) = 16 \text{ m}$ και
$r_2 = (\Pi\Sigma) = 8 \text{ m}$ τότε
$r_1 - r_2 = N\lambda \Leftrightarrow 8 = N \cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{N = 4} \rightarrow$
σημείο ενίσχυσης.



Όταν τα κύματα που συμβάλλουν στο σημείο Σ ακολουθήσουν τις διαδρομές ΠΓΣ και ΠΣ, το σημείο θα είναι πάλι σημείο ενίσχυσης οπότε για την ελάχιστη απόσταση h θα ικανοποιείται η εξίσωση της ενίσχυσης για Ν=5.

Τότε $r_1' - r_2' = 5\lambda$, όπου

$$r_1' = (\Pi\Gamma) + (\Gamma\Sigma) \overset{(\Pi.\Theta.)}{=} 6 + h + \sqrt{(6+h)^2 + 8^2} = 6 + h + \sqrt{100 + 12h + h^2}$$

$r_2' = (\Pi\Sigma) = 8\ m$.

Άρα: $6 + h + \sqrt{100 + 12h + h^2} - 8 = 10 \Leftrightarrow$

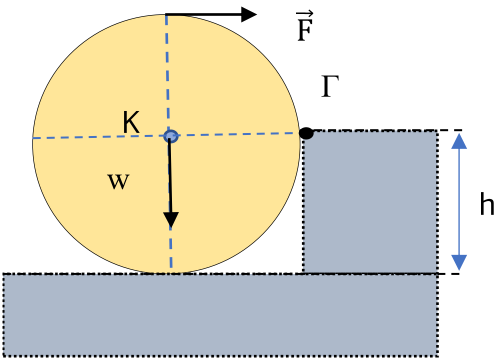
$$\sqrt{100 + 12h + h^2} = 12 - h \Leftrightarrow$$

$$100 + 12h + h^2 = (12 - h)^2 \Leftrightarrow$$

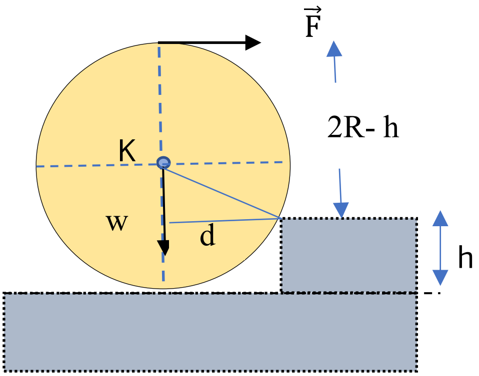
$$100 + 12h + \cancel{h^2} = 144 - 24h + \cancel{h^2} \Leftrightarrow 36h = 44 \Leftrightarrow \boxed{h = \frac{11}{4}\ m} \rightarrow (\gamma)$$

Β2.

Ι. Σωστό είναι το α. Για να υπερπηδήσει το εμπόδιο πρέπει να στραφεί ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ, που είναι το σημείο επαφής του δίσκου με το εμπόδιο. Για να συμβεί αυτό πρέπει:
$|\tau_F| > |\tau_w| \Longrightarrow F \cdot R > w \cdot R \Longrightarrow F > w$.



ΙΙ. Σωστό είναι το β.
Πυθαγόρειο θεώρημα,
$(R - h)^2 + d^2 = R^2 \Longrightarrow$
$(R/2)^2 + d^2 = R^2 \Longrightarrow d = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Πρέπει $|\tau_F| > |\tau_w| \Longrightarrow$
$F \cdot (2R-h) > w \cdot d \Longrightarrow F > w\frac{\sqrt{3}}{3}$



Β3.Ι. Σωστό είναι το γ. Επειδή $f = \frac{2\varphi}{h} \Longrightarrow hf = 2\varphi \Longrightarrow hf > \varphi$,από την κάθοδο εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια με ταχύτητα υ≠0.Εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση. Για να μην φτάσουν στη άνοδο πρέπει R≤D $\Longrightarrow \frac{m\upsilon}{eB} \leq D$ (1)

Από την φωτοηλεκτρική εξίσωση $hf = K + \varphi \Longrightarrow 2\varphi = K + \varphi \Longrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \varphi \Longrightarrow$

$\upsilon = \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{m\sqrt{\frac{2\varphi}{m}}}{eB} \leq D \Longrightarrow \frac{\sqrt{2m\varphi}}{eB} \leq D \Longrightarrow$

$B \geq \frac{\sqrt{2m\varphi}}{eD} \Longrightarrow B_{min} = \frac{\sqrt{2m\varphi}}{eD}$.

ΙΙ. Σωστό είναι το γ. Επειδή η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα κατωφλίου ,εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια.

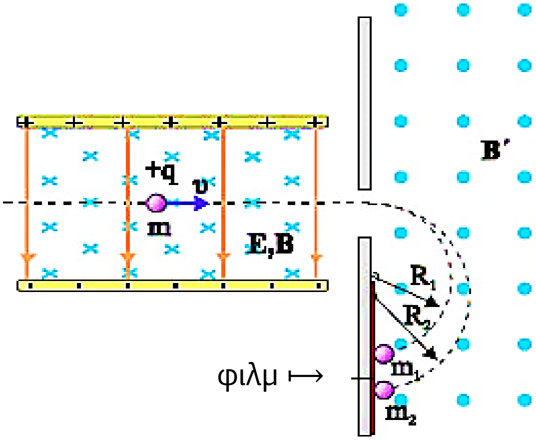
Για να μην ανιχνεύεται ηλεκτρικό ρεύμα από το αμπερόμετρο, πρέπει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο με την μέγιστη κινητική ενέργεια να μην φτάνουν στην άνοδο. Τότε αν $V_0 = V_{\alpha\nu} - V_{\kappa\alpha\theta}$ είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου (ή σε απόλυτη τιμή δυναμικό αποκοπής), για ένα φωτοηλεκτρόνιο που κινείται στον θάλαμο κενού από την κάθοδο στην άνοδο ισχύει το ΘΜΚΕ στην μορφή:

$0 - K_{max} = -eV_0 \Longrightarrow V_0 = \frac{K_{max}}{e} \Longrightarrow V_0 = \frac{hf-\varphi}{e} \Longrightarrow hf = eV_0 - \varphi \Longrightarrow f = \frac{eV_0+\varphi}{h}$.

ΘΕΜΑ 3ο

ΜΕΡΟΣ Ι

α.



β. Δεν θα εκτραπούν όσα δέχονται αντίθετες δυνάμεις από το ηλεκτρικό και από το μαγνητικό πεδίο, οπότε για τα μέτρα τους έχουμε ότι:

$F_{πλ} = F_L \Rightarrow |q|E = Bυ|q| \Rightarrow υ = \frac{E}{B}$ (1)

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψει ένα ιόν όταν εισέλθει σε μαγνητικό πεδίο B΄ κάθετα στις δυναμικές γραμμές είναι $R = \frac{mυ}{eB}$. Η σχέση αυτή γίνεται, από την (1), $\frac{m}{e} = \frac{RBB'}{E}$.Εφόσον στη φωτογραφική πλάκα δημιουργούνται δύο στίγματα, οι μάζες των ιόντων διαφέρουν, άρα τα ιόντα χλωρίου αποτελούνται από δύο ισότοπα.

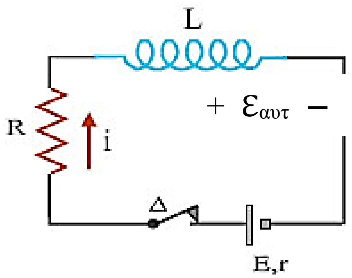
γ. Έστω m_1 και m_2 οι μάζες των δύο ισοτόπων. Η απόσταση d των δύο στιγμάτων στη φωτογραφική πλάκα είναι: $d=2R_2-2R_1=\frac{2E(m_2-m_1)}{eB'B} \Longrightarrow$

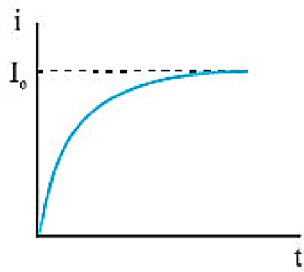
$m_2-m_1 = \frac{dBB'e}{2E}$ = 3,2·10^{-27}kg.

Τα δύο ισότοπα διαφέρουν κατά $\frac{m_2-m_1}{m_n}$ =**2 νετρόνια**.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

α. $I_o = \frac{E}{R+r} = \frac{12}{10+2} \Rightarrow \boxed{I_o = 1A}$.





β. Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη, αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου ΗΕΔ αυτεπαγωγής, με αποτέλεσμα να μην παίρνει ακαριαία τη μέγιστη τιμή I_0 η ένταση του ρεύματος.

Θα ισχύει: $i = \frac{E - |E_{αυτ}|}{R+r} \Rightarrow |E_{αυτ}| = E - i(R+r) \Rightarrow L\frac{di}{dt} = E - i(R+r) \Rightarrow$
$\frac{di}{dt} = \frac{E - i(R+r)}{L} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = 30\,\frac{A}{s}}$.

γ. Η προσφερόμενη ισχύς στο εξωτερικό κύκλωμα είναι:
$P_{εξ} = V_π \cdot i = (E - ir)i = E \cdot i - i^2 r \Rightarrow \boxed{P_{εξ} = 5{,}5W}$.
Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου θα είναι:
$P_L = P_{ολ} - P_{Rολ} = E \cdot i - i^2(R+r) \Rightarrow \boxed{P_L = 3W}$ ή
$P_L = |E_{αυτ}| \cdot i = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \Rightarrow \boxed{P_L = 3W}$.
Η αποθηκευμένη στο πηνίο ενέργεια θα είναι: $U_B = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \Rightarrow \boxed{U_B = 0{,}025J}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η ΗΕΔ στο πηνίο είναι $\mathcal{E}_{επ1} = |\frac{dΦ}{dt}| = |\frac{dB_1}{dt}|\, ΑΝ = λΑΝ$.
Αφού η ράβδος ισορροπεί $ΣF = 0 \Longrightarrow F_L = mg \Longrightarrow B_2 I_{επ1} \ell =$
$mg \Longrightarrow B_2 \frac{\mathcal{E}_{επ1}}{R_1 + R_2} \ell = mg \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$B_2 \frac{λΑΝ}{R_1 + R_2} \ell = mg \Longrightarrow λ = \frac{(R_1 + R_2) mg}{B_2 ΑΝ \ell} \Longrightarrow \mathbf{λ = 2\ T/s}$.
Δ2. α. Ο αγωγός θα κινηθεί προς τα κάτω με την επίδραση του βάρους του $m\vec{g}$, μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και έτσι στα άκρα του αναπτύσσεται επαγωγική τάση $\mathcal{E}_{επ} = Bυ\ell$, [με θετικό πόλο (+) στο Λ και αρνητικό πόλο (−) στο Κ].

Επειδή $\frac{dQ_3}{dt} = P_3 = I_{επ}^2 R_3$, προκύπτει ότι $I_{επ}$=1A .
Τότε $V_{ΚΛ}$= $-I_{επ}R_3 = \mathbf{-1,2V}$.

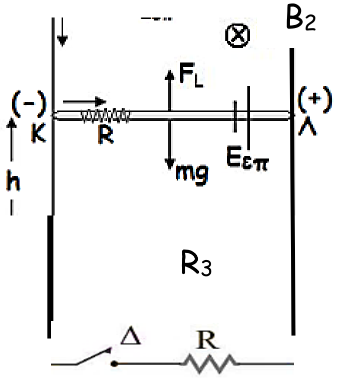
β. Είναι $F_L = B_2 I_{επ} \ell = 1N$ και $\Sigma F = mg - F_L = 2N - 1N = 1N$.

$$I_{επ} = \frac{\mathcal{E}_{επ}}{R_2 + R_3} \Longrightarrow \mathcal{E}_{επ} = I_{επ}(R_2 + R_3) \Longrightarrow \mathcal{E}_{επ} = 2V.$$

$$\mathcal{E}_{επ} = B_2 \upsilon \ell \Longrightarrow$$

$\upsilon = \frac{\mathcal{E}_{επ}}{B_2 \ell} = \frac{2m}{s}$ Τότε

$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon$ =2 J/s.



γ. Θα αποκτήσει αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα όταν μηδενιστεί η συνισταμένη δύναμη, δηλαδή $\Sigma F = 0 \Longrightarrow mg = F_L \Longrightarrow mg = \frac{B_2{}^2 \ell^2}{R_2 + R_3} \upsilon_{ορ} \Rightarrow \upsilon_{ορ} = \frac{R_2 + R_3}{B_2{}^2 \ell^2} mg = \mathbf{4m/s}$.

Επιμέλεια: Γκιώνη Βασιλική

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. α

Α2. β

Α3. α

Α4. γ

Α5. α. Σ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{T_1}{2}}{\frac{T_2}{2}} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi m_1}{Bq_1}}{\frac{2\pi m_2}{Bq_2}} = \frac{1}{16}$ άρα σωστό το (ii).

Β2. Ισχύει $K_{max}^{(1)} = hf_1 - \varphi$ και $K_{max}^{(1)} = e \cdot V_1$

άρα $e \cdot V_1 = hf_1 - \varphi \Rightarrow f_1 = \frac{eV_1 - \varphi}{h}$ (1)

ομοίως και $K_{max}^{(2)} = hf_2 - \varphi$ και $K_{max}^{(2)} = e \cdot V_2$

άρα $f_2 = \frac{eV_2 - \varphi}{h}$ (2)

αφαιρούμε (2) - (1) και $f_2 = f_1 + \frac{e}{h}(V_2 - V_1)$ σωστό το (i)

Β3. Υπολογίζουμε το ποσό θερμότητας σε χρόνο μια περιόδου σε αντιστάτη R για το περιοδικό ρεύμα:

$$Q_{\theta\varepsilon\rho\mu.} = (4I)^2 R\frac{T}{4} + (2I)^2 R\frac{T}{4} + (2I)^2 R\frac{T}{4} + 0 = \frac{24I^2RT}{4}$$
$$= 6I^2RT \quad (1)$$

και $Q_{\theta\varepsilon\rho\mu.}$ για το $I_{\varepsilon\nu}$ είναι: $Q_{\theta\varepsilon\rho\mu.} = I_{\varepsilon\nu}^2 RT$ (2)

από (1) και (2) $Q_{\theta\varepsilon\rho\mu.\ (\pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa o\acute{u}\ \rho\varepsilon\acute{u}\mu\alpha\tau o\varsigma)} = Q_{\theta\varepsilon\rho\mu.\ (I_{\varepsilon\nu})}$

$$6I^2RT = I_{\varepsilon\nu}^2 RT$$

$I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{6}I$ άρα σωστό το (iii)

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. $T + \frac{T}{2} = 6\,sec$, άρα $T = 4\,sec$

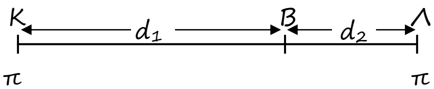
$\lambda = \upsilon\delta \cdot T = 2\,m$

Άρα το κύμα φτάνει στο σημείο την t_1 = 30 sec και το σημείο Σ σταματά να ταλαντώνεται, άρα ακυρωτική συμβολή.

και $d_1^{\Sigma} = \upsilon\delta \cdot t_1 = 0{,}5 \cdot 30 = 15\,m$ $\quad d_2^{\Sigma} = 0{,}5 \cdot 20 = 10\,m$

$$d_1^{\Sigma} - d_2^{\Sigma} = (2MH)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 15 - 10 = (2MH) \cdot 1 \Rightarrow M = 2$$

Γ2.

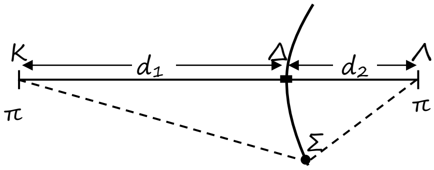


Έστω σημείο Β σημείο ενισχυτικής συμβολής, τότε

$$\left.\begin{aligned} d_1^B - d_2^B &= N_{o\lambda} \quad (1) \\ d_1^B + d_2^B &= d \quad (2) \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 2d_1^B = N \cdot \lambda + d\,, \quad d_1^B = 3 + N$$

όμως $0 < d_1^B < 6 \Rightarrow 0 < 3 + N < 6$ άρα $-3 < N < 3$

$N \in [-2, -1, 0, 1, 2]$ συνολικά 5 σημεία ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των πηγών.



$$d_1^{\Delta} - d_2^{\Delta} = 5$$
$$d_1^{\Delta} + d_2^{\Delta} = 6$$
$$2d^{\Delta} = 11 \qquad d_1^{\Delta} = 5{,}5\,m$$

Γ3. $E_{MHX}^{(t_1)} = E_{MHX}^{+A}$

$$\frac{1}{2}Dy_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \quad , \quad v_1^2 = \omega^2(A^2 - y_1^2) \quad , \quad \upsilon_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{20}\; m/sec$$

και $\frac{K_{\kappa\iota\nu}}{\upsilon_{\Delta\upsilon\nu}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}Dy_1^2} = 1$

Γ4. Ισχύει $d_1^{\Delta} - d_2^{\Delta} = N\lambda'$

$5 = N\lambda'$

$\lambda' = \frac{5}{N}$

όταν $N_{min} = 1$ τότε $\lambda' = \max$ $\quad \lambda' = 5\,m$

άρα $\left.\begin{aligned} f_{min} &= \frac{\upsilon\delta}{\lambda'} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\,Hz \\ f &= \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,Hz \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \Delta f &= |f' - f| \\ \Delta f &= |0{,}25 - 0{,}1| = 0{,}15\,Hz \end{aligned}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.i. $E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\omega l_{OK}^2}{2} = 5\,V$

$$\left.\begin{aligned} R_{OK} &= \frac{\rho l_{OK}^2}{S} \\ R_{O\Sigma} &= \frac{\rho l_{O\Sigma}}{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R_{OK}}{R_{O\Sigma}} - \frac{1}{2{,}5} \Rightarrow R_{OK} = 1\,\Omega$$

$$I_0 = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{OK}} = \frac{5}{1+1} = 2{,}5\,A \quad \Big| \quad F_L = BI_0 l_{OK} = 2{,}5\,N$$

$$\tau_{F_L} = F_L \cdot \frac{l_{OK}}{2} = 1{,}25\ N \cdot m$$

ii. $P_{F_{\varepsilon\xi}} = P_{\theta\varepsilon\rho\mu.}$,

$F_{\varepsilon\xi} \cdot \upsilon_{\Sigma} = {I_0}^2 R_{o\lambda}$

$F_{\varepsilon\xi} \cdot \omega l_{O\Sigma} = {I_0}^2 (R_{OK} + R) \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = 0{,}5\ N$

Δ2.i. αν t_1 $E_{\alpha\upsilon\tau\varepsilon\pi\alpha\gamma\omega\gamma\iota\kappa\acute{\eta}} = I_0(R + 3R) = 10\ V \Rightarrow \frac{d_i}{d_t} = -\frac{E_\alpha}{2} = -5\ A/sec$

ii. όταν $E'_\alpha = \frac{E_\alpha}{2} = 5\ V \Rightarrow i' = \frac{E'_\alpha}{4R} = \frac{5}{4} A$

και $\frac{\Delta\upsilon_{\mu\alpha\gamma\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}}}{\Delta t} = E'_\alpha \cdot i' = \frac{25}{4}\ Watt$

iii. $\upsilon^{max}_{\mu\alpha\gamma\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}} = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2{,}5^2 = 6{,}25\ J$

άρα $Q_{\theta\varepsilon\rho\mu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha} = 6{,}25\ J$

Επιμέλεια: Σακελλαρίου Χρήστος

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. β

A2. β

A3. δ

A4. γ

A5.α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

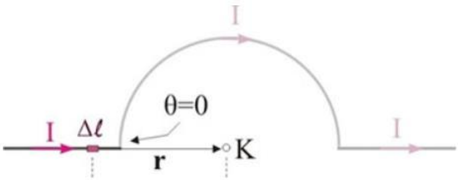
Β1. β.

$$P_2 = P_1 + 3P_1 = 4P_1 \Leftrightarrow$$
$$I_{\varepsilon\nu}^2 R = 4I_1^2 R \Leftrightarrow$$
$$\frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R^2} = 4(\frac{E}{2R})^2 \Rightarrow \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R^2} = 4\frac{E^2}{4R^2} \Leftrightarrow$$
$$V\varepsilon\nu = \mathrm{E}$$
$$\acute{\alpha}\rho\alpha : V = V\varepsilon\nu\sqrt{2} = \mathrm{E}\sqrt{2}$$

B2. β.

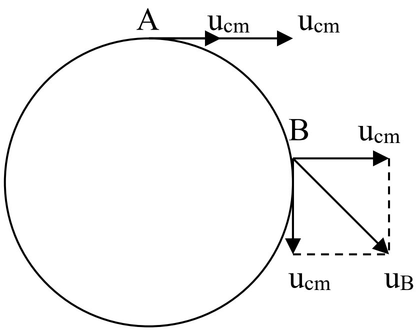
Το πολύ μικρό τμήμα του αγωγού, μήκους $\Delta\ell$, δημιουργεί στο σημείο Κ που απέχει r από το τμήμα $\Delta\ell$ μαγνητικό πεδίο ΔΒ του οποίου η ένταση έχει μέτρο

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{r^2}\eta\mu\theta$$



τη σχέση αυτή θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{\Delta\ell}$ και **r**. Το τμήμα $\boldsymbol{\Delta\ell}$ θεωρείται προσανατολισμένο με τη φορά του να είναι ίδια με τη φορά του ρεύματος. Έτσι για τη γωνία θ έχουμε : *θ=0°, ημθ*=0 και *ΔΒ=0*.

B3. β.



$$u_A = 2u_{cm}$$
$$u_B = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{cm}^2} = u_{cm}\sqrt{2}$$
$$\acute{\alpha}\rho\alpha : \frac{u_A}{u_B} = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι το μισό του μήκους κύματος είναι 1m.Άρα λ=2m.

Συμπεραίνουμε επίσης ότι το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση 2λ. Άρα το κύμα διένυσε με σταθερή ταχύτητα απόσταση x_1=4m σε χρόνο t_1=10s .

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι: $u = \frac{x_1}{t_1} = 0{,}4m$

Γ2. $u = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathrm{T} = \frac{\lambda}{u} = 5s$

Γ3. Στάθμη σταθερή, άρα :$\Pi_1 = \Pi_3 = \Pi \Leftrightarrow$

$$\psi = \mathrm{A}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

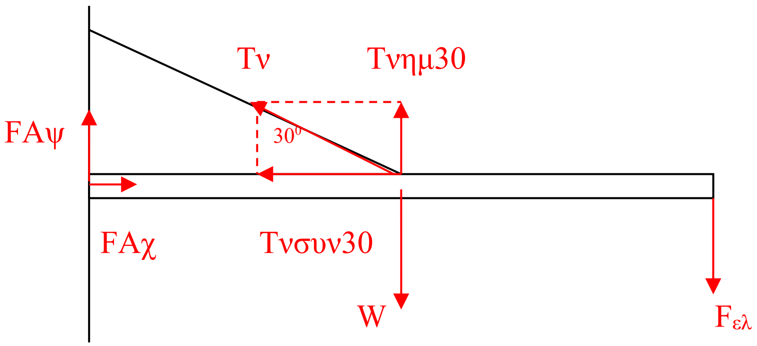
Γενικός τύπος: *με αντικατάσταση προκύπτει:*

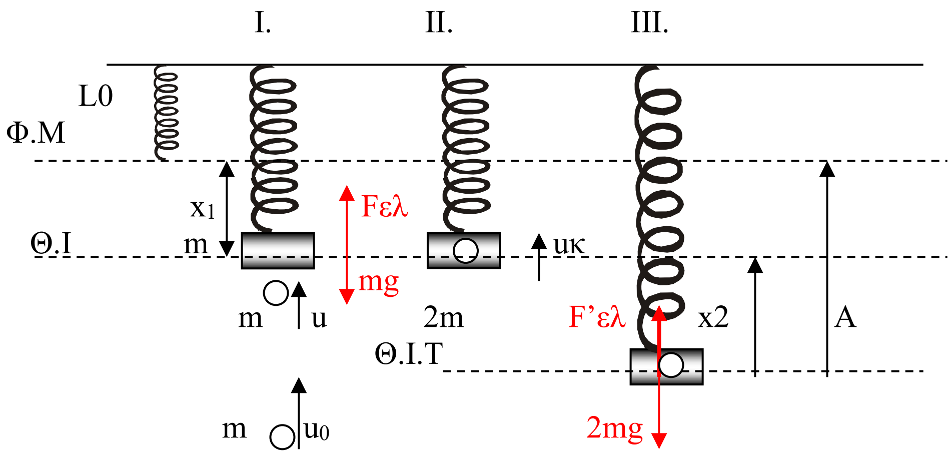
$$\psi = 0{,}2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{5} - \frac{x}{2}\right)$$

Γ4.Από το διάγραμμα προκύπτει x_Λ=3m και x_K=3,5m

Άρα: $\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{x_K - x_\Lambda}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}5}{2} = \frac{\pi}{2}rad$

ΘΕΜΑ 4ο





$$F\varepsilon\lambda = mg$$

$$F\varepsilon\lambda = 10\text{N}$$

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\text{A})} = \vec{0}$$

$$\text{T}\nu\eta\mu 30\frac{L}{2} = \text{M}g\frac{L}{2} + F\varepsilon\lambda L$$

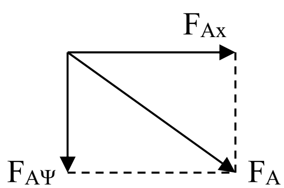
$$T\nu = 140N$$

$$\Sigma\vec{F}x = \vec{0}$$

$$F_{AX} = \text{T}\nu\sigma\upsilon\nu 30 = 70\sqrt{3}\text{N}$$

$$\Sigma\vec{F}\psi = \vec{0}$$

$$FA\psi = Mg + F\varepsilon\lambda - T\nu\eta\mu 30 = -10\text{N}$$



$$FA = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{A\psi}^2} = 20\sqrt{37}\text{N}$$

$$(\mathrm{I}):\Sigma\vec{F}=\vec{0}$$

$$F\varepsilon\lambda=mg\Leftrightarrow Kx1=mg\Leftrightarrow x1=\frac{mg}{K}(1)$$

Δ2. $(\mathrm{III}):\Sigma\vec{F}=\vec{0}$

$$F\varepsilon\lambda=2mg\Leftrightarrow K(x1+x2)=2mg\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x=\frac{mg}{K}$$

$$A=x1+x2=\frac{2mg}{K}$$

για το Δt ισχύει: $\Delta t=\frac{\mathrm{T}}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{10}=\frac{\mathrm{T}}{4}\Leftrightarrow\mathrm{T}=\frac{2\pi}{5}s$

άρα : $\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}=5s$

$$D=K=2m\omega^2\Leftrightarrow\mathrm{K}=50\mathrm{N}/m$$

και A=0,4m και x1=x2=0,2m

Δ3. Α.Δ.Ε.Τ (ΙΙ): $\frac{1}{2}\mathrm{K}\mathrm{A}^2=\frac{1}{2}\mathrm{K}x_2^2+\frac{1}{2}2mu_k^2\Leftrightarrow uk=\sqrt{2}m/s$

Α.Δ.Ο:

$$\vec{P}_A=\vec{P}_T\Leftrightarrow mu=2muk\Leftrightarrow u=2\sqrt{3}m/s$$

Θ.Μ.Κ.Ε(για το m πριν την κρούση):

$$\mathrm{K}_{\mathrm{T}}-\mathrm{K}_{\mathrm{A}}=\Sigma W$$

$$\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{2}mu_0^2=W_W=-mgh$$

$$h=0{,}65m$$

Δ4.

$$\frac{\Delta P}{\Delta t}=\Sigma F=-Kx=-KA\eta\mu\omega t=-20\eta\mu 5t$$

Επιμέλεια: Σαγνός Σωκράτης

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

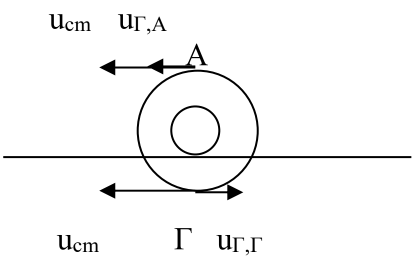
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. γ.
A2. α.
A3. α.
A4. β.
A5. α. Σ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

B1. β.



$$u_{cm} = \omega R$$
$$u_{A} = u_{cm} + u_{\Gamma,A} = \omega R + \omega 2R = 3\omega R$$
$$u_{\Gamma} = u_{cm} - u_{\Gamma,\Gamma} = \omega R - \omega 2R = -\omega R$$
$$\acute{\alpha}\rho\alpha : \frac{u_A}{u_\Gamma} = -3$$

B2. γ.
Για το σημείο Ν ισχύει:
$$(\mathrm{KN}) - (\Lambda\mathrm{N}) = -2\lambda \Rightarrow (\mathrm{KN}) - (2\mathrm{KN}) = -2\lambda \Rightarrow -(\mathrm{KN}) = -2\lambda$$
$$(\mathrm{KN}) = 2\lambda$$
Επίσης ισχύει ότι : $(\mathrm{KN}) + (\Lambda\mathrm{N}) = d \Rightarrow 3(\mathrm{KN}) = d \Rightarrow d = 6\lambda$

Για ένα τυχαίο σημείο μεταξύ των δύο πηγών που βρίσκεται σε συμβολή απόσβεσης και απέχει απόσταση r1 και r2 από τις δύο πηγές αντίστοιχα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2\kappa+1)\lambda/2 \\ r_1 + r_2 = d \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2r_1 = \frac{(2\kappa+1)\lambda}{2} + d \Rightarrow r_1 = \frac{(2\kappa+1)\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$0 < r_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{(2\kappa+1)\lambda}{4} + \frac{d}{2} < d \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow -\frac{13}{2} < \kappa < \frac{11}{2}$$

΄Αρα αφού οι ακέραιοι αριθμοί που περιέχονται στην παραπάνω ανίσωση ειναι 12,συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν 12 σημεία απόσβεσης.

Β3.β.

$f_1=2f_0$:

$$K_1 = hf_1 - \phi = 2hf_0 - \phi = \frac{2h\phi}{h} - \phi = \phi (1)$$

$$V0 = \frac{K}{e} \overset{(1)}{=} \frac{\phi}{e} (2)$$

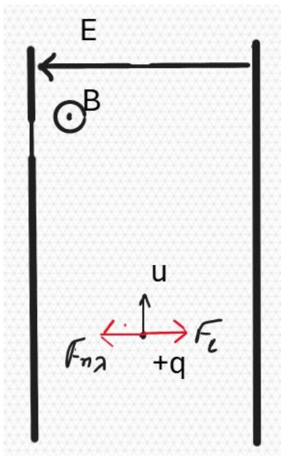
$f_2=3f_1=6f_0$:

$$K_2 = 6\phi - \phi = 5\phi$$

$$\Theta.M.K.E: K_2^{'} - K_2 = -eV_0 \Rightarrow K_2^{'} = K_2 - eV_0 = 5\phi - \phi = 4\phi$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1.



$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow FL = F\eta\lambda \Rightarrow Buq = Eq \Rightarrow$$

$$u = \frac{E}{B_1} = 10^4 m/s$$

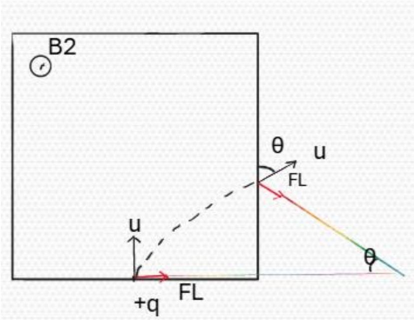
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του πλ. φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο:

$$\frac{1}{2}mu^2 - 0 = qV \Rightarrow V = 1Volt$$

Γ2.

$$R = \frac{mu}{Bq} = 0{,}2m$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



$$\theta = \omega t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6} = \frac{1}{6}\frac{2\pi m}{Bq}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{3}10^{-5}\sec$$

Γ3.

$$R_3 = \frac{mu\sigma\upsilon\nu 60}{B_3 q} = 0{,}01m$$

$$\beta = u\eta\mu 60 T = u\eta\mu 60\frac{2\pi m}{B_3 q}$$

$$\beta = 0{,}02\pi\sqrt{3}m$$

Γ4. $\mathrm{N} = \frac{L\sqrt{3}}{\beta} = \frac{10}{\pi}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$

$$x = u\eta\mu 60 t \Rightarrow L\sqrt{3} = u\eta\mu 60 t_3 \Rightarrow t_3 = 4.10^5\sec$$

$$s = ut_3 = 0{,}4m$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Από το διάγραμμα παρατηρούμε οτι το σημείο Κ ξεκινά την ταλάντωσή του το έκτο δευτερόλεπτο. Αρα: $x_k = ut = 12m$

Δ2. Από το διάγραμμα παρατηρούμε επίσης οτι η περίοδος της ενέργειας είναι 4 sec , άρα η περίοδος του κύματος είναι διπλάσια ,δηλαδή Τ=8sec.

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{\pi}{4} rad/\sec$$

$$U\max = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\mathrm{A}^2 \Rightarrow \mathrm{A} = 0{,}04m$$

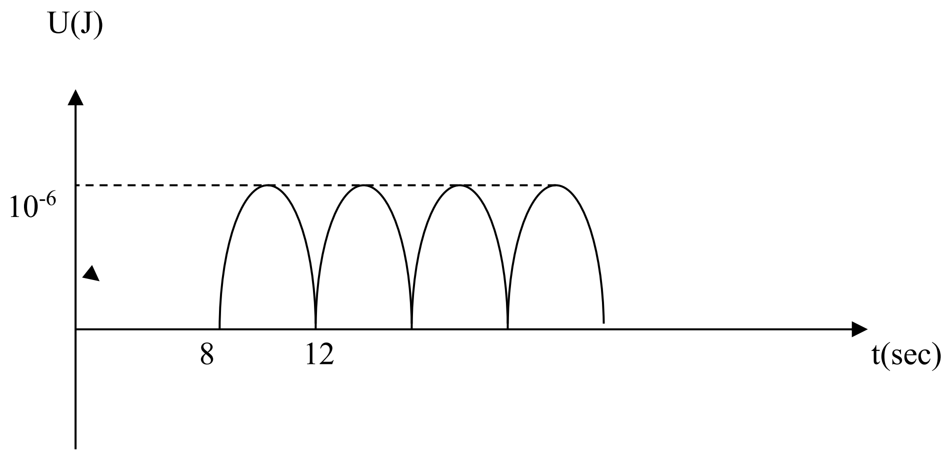
$$\kappa\alpha\iota \quad \lambda = uT = 16m$$

Δ3. $\psi = \mathrm{A}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \psi = 0{,}04\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} - \frac{x}{16}\right)(S.I)$

Δ4. $\psi_{\mathrm{M}} = 0{,}04\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} - \frac{16}{16}\right) = 0{,}04\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{8} - 1\right)(S.I)$

$$x_M = ut \Rightarrow t = 8\sec$$

$$U = \frac{1}{2}D\psi^2 = 10^{-6}\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{t}{8} - 1\right)$$



Επιμέλεια: Σαγνός Σωκράτης

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1 (δ),
Α2 (β),
Α3 (δ),
Α4 (β),
Α5 (α) Λ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Σύμφωνα με την θεωρία της σκέδασης Compton, κατά την αλληλεπίδραση του φωτονίου «1» με στο ηλεκτρόνιο «1», το φωτόνιο «2» επανεκπέμπεται με μήκος κύματος

$$\lambda' = 2\frac{h}{mc} + \frac{h}{mc}[1 - \text{συν}(\theta)].$$

Αναλόγως κατά την αλληλεπίδραση του φωτονίου «2» με το ηλεκτρόνιο «2», το φωτόνιο «3» σκεδάζεται με μήκος κύματος,

$$\lambda'' = \lambda' + \frac{h}{mc}[1 - \text{συν}(\pi - \theta)]$$

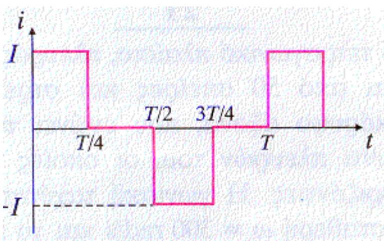
$$= 2\frac{h}{mc} + \frac{h}{mc}[1 - \text{συν}(\theta)] + \frac{h}{mc}[1 + \text{συν}(\theta)]$$

ή

$$\boxed{\lambda'' = 4\frac{h}{mc}}.$$

Σωστή απάντηση η (γ).

Β2. Το ρεύμα του διπλανού σχήματος είναι περιοδικό με περίοδο T, και στα χρονικά διαστήματα $[0, T/4]$ και $[T/2, 3T/4]$ είναι συνεχές με σταθερή ένταση I, ενώ στα χρονικά διαστήματα $[T/4, T/2]$ και $[3T/4, T]$ είναι μηδέν. Συνεπώς η θερμότητα που



αναπτύσσεται στην αντίσταση R
σε μία περίοδο ισούται με

$$Q = 2 \cdot I^2 R \frac{T}{4}.$$

Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό της ενεργούς έντασης του ρεύματος, η θερμότητα Q γράφεται επίσης ως

$$Q = I_{\varepsilon\nu}^2 RT.$$

Συνεπώς

$$I_{\varepsilon\nu}^2 RT = 2 \cdot I^2 R \frac{T}{4} \Longrightarrow \boxed{I_{\varepsilon\nu} = \frac{I}{\sqrt{2}}}.$$

Σωστή είναι η απάντηση (α).

Β3. Σύμφωνα με την εκφώνηση,

$$K_1' = 3K_2' \Longrightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 \Longrightarrow \upsilon_1' = \sqrt{3}\upsilon_2'.$$

Επίσης σύμφωνα με την ΑΔΕ,

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 \Longrightarrow \upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 = 4\upsilon_2'^2 \Longrightarrow \upsilon_1 = 2\upsilon_2'$$

και σύμφωνα με την ΑΔΟ,

$$m_1 \upsilon_1 = \sqrt{m_1^2 \upsilon_1'^2 + m_2^2 \upsilon_2'^2 + 2 m_1 m_2 \upsilon_1' \upsilon_2' \text{συν}(\theta + \varphi)} \Longrightarrow 2\upsilon_2' = \upsilon_2' \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}\text{συν}(\theta + \varphi)}$$

ή

$$4 = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\text{συν}(\theta + \varphi) \Longrightarrow \text{συν}(\theta + \varphi) = 0 \Longrightarrow \theta + \varphi = 90° \Longrightarrow \boxed{\varphi = 60°}.$$

Σωστή είναι η απάντηση (γ).

Β4. Σύμφωνα με το γράφημα της εκφώνησης:

α) Το κύμα από την πηγή «1» φτάνει στο σημείο την στιγμή $t_1 = 3\text{s}$, άρα η απόσταση της πηγής από το σημείο ισούται με $r_1 = 2\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 3\text{s} = 6\text{cm}$.

Το κύμα από την πηγή «2» φτάνει στο σημείο την στιγμή $t_2 = 5\text{s}$, άρα η απόσταση της πηγής από το σημείο ισούται με $r_2 = 2\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 5\text{s} = 10\text{cm}$.

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β) Η συμβολή των κυμάτων ξεκινά την χρονική στιγμή όπου και τα δύο κύματα διαμορφώνουν την κίνηση του σημείου για πρώτη φορά. Σύμφωνα με το διάγραμμα αυτό συμβαίνει την στιγμή $t_2 = 5\text{s}$.
Η πρόταση (β) είναι λάθος.

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου από 2cm πριν την έναρξη της συμβολής, γίνεται 4cm μετά την έναρξή της.
Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

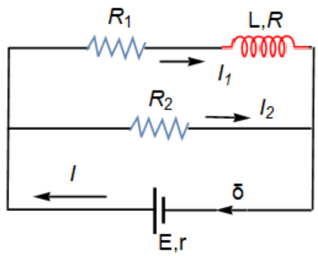
Β5. Η περίοδος του κύματος ισούται με $T = 1\text{s}$ και η ταχύτητα διάδοσής του είναι $2\ \text{cm/s}$, συνεπώς το μήκος κύματος ισούται με $\lambda = 2\ \text{cm}$.
Το μήκος της χορδής ισούται με

$$\boxed{\lambda + \frac{\lambda}{4} = 2.5\text{cm}}.$$

Σωστή είναι η απάντηση (β).

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν το κύκλωμα στην μόνιμη κατάστασή του, με το διακόπτη κλειστό.



Η τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 ισούται με την πολική τάση στα άκρα της πηγής, οπότε

$$I_2R_2 = E - Ir \Rightarrow$$
$$I = \frac{E - I_2R_2}{r} = \frac{32 - 24}{1}\text{A} = 8\text{A}.$$

Σύμφωνα με τον 1ο κανόνα του Kirchhoff, $I_1 = I - I_2 = 6\text{A}$.

Γ1. Η τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 ισούται με την τάση στα άκρα του συνδυασμού αντιστάτη R_1 –πηνίου, οπότε σύμφωνα με τον νόμο του Ohm,

$$I_2R_2 = I_1(R_1 + R) \Rightarrow R = \frac{I_2}{I_1}R_2 - R_1$$

ή

$$R = \frac{I_2}{I_1}R_2 - R_1 = \left(\frac{2}{6} \cdot 12 - 1\right)\Omega \Rightarrow \boxed{R = 3\Omega}.$$

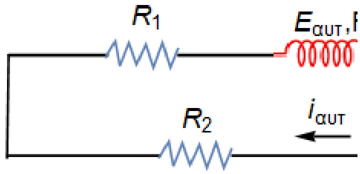
Επίσης

$$U_0 = \frac{1}{2}LI_1^2 \Rightarrow L = \frac{2U_0}{I_1^2} = \frac{2 \cdot 3.6}{36}\mathrm{H} \Rightarrow \boxed{L = 0.2\mathrm{H}}.$$

Γ2. Η τάση στα άκρα του πηνίου ισούται με

$$V_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon} = I_1 R = 6 \cdot 3\mathrm{V} \Rightarrow \boxed{V_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon} = 18\mathrm{V}}.$$

Γ3. Ανοίγοντας τον διακόπτη την χρονική στιγμή $t = 0$ απομονώνουμε την πηγή του συνεχούς ρεύματος από το κύκλωμα, το οποίο απεικονίζεται τώρα στο διπλανό σχήμα.



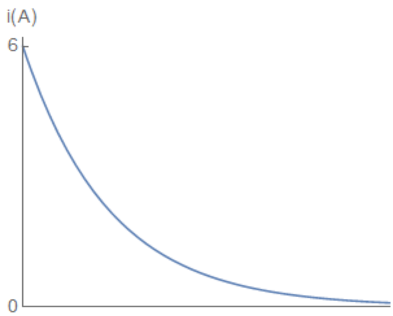
Με το κλείσιμο του διακόπτη το ρεύμα στο πηνίο την χρονική στιγμή $t = 0$ τείνει να μηδενιστεί και στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται τάση από αυτεπαγωγή, η οποία σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz τείνει να αναιρέσει τον μηδενισμό του ρεύματος, ήτοι

$$\mathcal{E}_{\alpha\upsilon\tau} = -L\frac{di}{dt}.$$

Συνεπώς το πηνίο λειτουργεί ως πηγή με ΗΕΔ $\mathcal{E}_{\alpha\upsilon\tau}$ και εσωτερική αντίσταση R.

Το αρχικό ρεύμα το οποίο διαρρέει λόγω αυτεπαγωγής τον μοναδικό κλάδο του κυκλώματος, ισούται με $I_1 = 6\mathrm{A}$.

Το ζητούμενο γράφημα απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



Γ4. Σύμφωνα με την διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα, η ενέργεια που παρέχει το πηνίο λόγω αυτεπαγωγής (δηλαδή η ενέργεια U_0 που είχε αποθηκευμένη στο εσωτερικό του στην μόνιμη κατάσταση) γίνεται θερμική ενέργεια στους αντιστάτες, άρα

$$P_{\alpha\upsilon\tau} = P_{\mathrm{Joule}} \Rightarrow \mathcal{E}_{\alpha\upsilon\tau} i_{\alpha\upsilon\tau} = i_{\alpha\upsilon\tau}^2(R_1 + R_2 + R) \Rightarrow -L\frac{di_{\alpha\upsilon\tau}}{dt} = i(R_1 + R_2 + R).$$

Την $t = 0$ (όπου $i_{\alpha\upsilon\tau} = I_1$) ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στον κλάδο του κυκλώματος, άρα και της έντασης στον αντιστάτη R_2, ισούται με

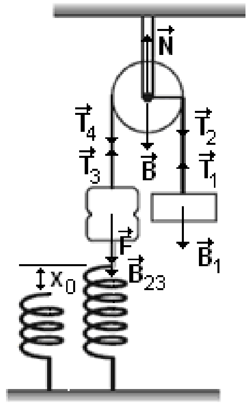
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{I_1}{L}(R_1 + R_2 + R) = -\frac{6}{0.2} \cdot 16\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -480\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}}.$$

Γ5. Η τάση στα άκρα του πηνίου ισούται τώρα με

$$V_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon}(t) = i_{\alpha\upsilon\tau}(t)\,(R_1 + R_2) \Rightarrow V_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon}(0) = I_1\,(R_1 + R_2)$$
$$= 6 \cdot 13\text{V} \Rightarrow$$
$$V_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon}(0) = 78\text{V}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Αρχικά θα εξετάσουμε την κατάσταση ισορροπίας του συστήματος των τεσσάρων σωμάτων. Οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σε κάθε σώμα φαίνονται στο διπλανό σχήμα και είναι:



Σώμα Σ1:

- Το βάρος $\vec{B}_1 = m_1\vec{g}$,
- Η τάση του νήματος $\vec{T}_1$.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την ισορροπία:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \quad (1).$$

Τροχαλία:

- Το βάρος της $\vec{B} = M\vec{g}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας της
- Η δύναμη $\vec{N}$ από το σημείο στήριξης.
- Η τάσεις του νήματος $\vec{T}_2$ και $\vec{T}_4$ με διεύθυνση εφαπτόμενη στην περιφέρεια της τροχαλίας.

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική ισορροπία:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow Mg + T_2 + T_4 = N \quad (2),$$
$$\sum \tau_{\text{cm}} = 0 \Rightarrow T_2 R = T_4 R \quad (3).$$

όπου $\sum \tau_{\text{cm}}$ η συνισταμένη των ροπών ως προς κατακόρυφο στην τροχαλία άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

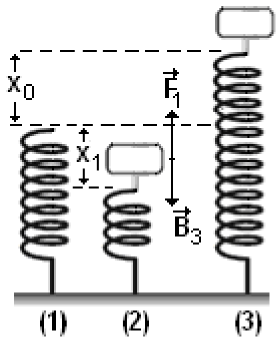
Συσσωμάτωμα Σ2+Σ3:

- Το βάρος $\vec{B}_{2,3} = (m_2 + m_3)\vec{g}$.
- Η δύναμη του ελατηρίου με μέτρο $F = kx_0$ και φορά προς τα κάτω (υπόθεση), όπου x_0 η επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση ελευθέρου μήκους (δες σχήμα).

- Η τάση του νήματος $\vec{T}_3$.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την ισορροπία
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow (m_2 + m_3)g + kx_0 = T_3 \quad (4).$$
Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, οπότε οι τάσεις στα άκρα του είναι ίσες. Δηλαδή $T_2 = T_1$ και $T_3 = T_4$. Τότε μέσω της σχέσης (3) έπεται ότι $T_2 = T_4$.
Η εξίσωση (4) μέσω της (1), οδηγεί στην εξίσωση
$$(m_2 + m_3)g + kx_0 = m_1 g \Rightarrow x_0 = \frac{m_1 - m_2 - m_3}{k} g.$$
Με αντικατάσταση προκύπτει ότι η επιμήκυνση του ελατηρίου ισούται με
$$x_0 = \frac{4 - 1 - 1}{100} \cdot 10\mathrm{m} \Rightarrow \boxed{x_0 = 0.2\mathrm{m}}.$$
Η παραμόρφωση του ελατηρίου προκύπτει θετική, άρα η αρχική μας υπόθεση για την φορά της δύναμης του ελατηρίου είναι σωστή. Συνεπώς το ελατήριο βρίσκεται σε κατάσταση επιμήκυνσης.

Δ2. Μόλις αποκολληθούν τα σώματα Σ₂ και Σ₃, η μάζα m_3 βρίσκεται στην άκρη του ελατηρίου και αρχίζει να ταλαντώνεται. Στη μάζα ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου και το βάρος της.



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η κατάσταση ελευθέρου μήκους του ελατηρίου (1), η κατάσταση του ελατηρίου στην αποκόλληση (3) και η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (2).
Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη συνθήκη ισορροπίας
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow m_3 g - kx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{m_3}{k} g = \frac{1}{100} \cdot 10\mathrm{m} \Rightarrow x_1 = 0.1\mathrm{m}.$$
Παρατηρούμε ότι όταν το σώμα αρχίζει την ταλάντωσή του (θέση (3)) βρίσκεται σε απόσταση $x_0 + x_1$ από τη θέση ισορροπίας του (θέση (2)) με μηδενική ταχύτητα. Οπότε βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του. Συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης ισούται με $A = x_0 + x_1 = 0.3\mathrm{m}$.

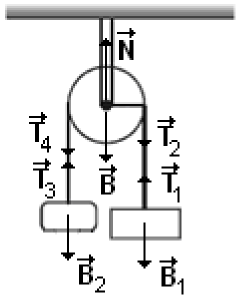
Θεωρούμε ως θετική την φορά προς τα πάνω, οπότε το σώμα Σ3 τη χρονική στιγμή μηδέν βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα η αρχική του φάση φ_0 ισούται με $\pi/_2$. Η δε κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης ισούται με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ3, $x(t) = A\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_0)$, στο S.I., είναι η

$$\boxed{x(t) = 0.3\,\text{ημ}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Δ3. Μετά την αποκόλληση των δύο σωμάτων το σύστημα δεν βρίσκεται πλέον σε κατάσταση ισορροπίας. Οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο σύστημα των τριών σωμάτων φαίνονται στο διπλανό σχήμα:



Σώμα Σ2:

- Το βάρος του $\vec{B}_2 = m_2\vec{g}$, (εξωτερική του συστήματος δύναμη).
- Η τάση του νήματος $\vec{T}_3$ (εσωτερική του συστήματος δύναμη).

Τροχαλία:

- Το βάρος της $\vec{B} = M\vec{g}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας της (εξωτερική του συστήματος δύναμη).
- Η δύναμη $\vec{N}$ από το σημείο στήριξης (εξωτερική του συστήματος δύναμη).
- Η τάσεις του νήματος $\vec{T}_2$ και $\vec{T}_4$ με διεύθυνση εφαπτόμενη στην περιφέρεια της τροχαλίας (εσωτερικές του συστήματος δυνάμεις).

Η τροχαλία περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της και δεν μεταφέρεται. Η συνισταμένη εξωτερική ροπή του συστήματος των τριών σωμάτων, την χρονική στιγμή μηδέν, ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας ισούται με

$$\sum \tau_{\varepsilon\xi} = -B_1 R + B_2 R = (m_2 - m_1) g R = (1-4) \cdot 10 \cdot 0.25\ \mathrm{Ntm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \tau_{\varepsilon\xi} = -7.5\ \mathrm{Ntm}}.$$

Άρα η τροχαλία ξεκινά να περιστρέφεται με φορά την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Δ4. Το νήμα είναι αβαρές, μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, οπότε η μεταφορική ταχύτητα του σώματος Σ_1 ισούται σε κάθε χρονική στιγμή με την επιτρόχια ταχύτητα των σημείων της τροχαλίας, άρα

$$\upsilon_1 = \upsilon_{\varepsilon\pi} \Longrightarrow \upsilon_1 = \omega R \upsilon_1 \Longrightarrow \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \Longrightarrow$$

$$a_1 = a_\gamma R = 15 \cdot 0.25 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{15}{4} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Longrightarrow \boxed{a_1 = 3.75 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}.$$

Συνεπώς το σώμα Σ_1 κινείται με επιτάχυνση $a_1 = 3.75 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, με φορά προς τα κάτω.

Δ5. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μετατοπίζονται σε ίσες αποστάσεις, άρα όταν το σώμα Σ_1 έχει μετατοπιστεί κατά $y_1 = 0.3\mathrm{m}$,

$$y_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2 y_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{10}}{\frac{15}{4}}}\mathrm{s} = \sqrt{\frac{24}{150}}\mathrm{s} = \sqrt{\frac{16}{100}}\mathrm{s}$$
$$= 0.4\mathrm{s}$$

Τότε η ταχύτητα ισούται με

$$\upsilon_1 = a_1 t = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{10} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

ο δε ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας με

$$\frac{dK_1}{dt} = \sum F_1 \upsilon_1 = m_1 a_1 \upsilon_1 = 4 \cdot \frac{15}{4} \cdot 1.5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \Longrightarrow \boxed{\frac{dK_1}{dt} = 22.5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}}.$$

Επιμέλεια: Λεβέτας Στάθης

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. δ **Α2.** α **Α3.** γ **Α4.** β

Α5. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **(α)**.

Σύμφωνα με τους τύπους της μετωπικής ελαστικής κρούσης, η ταχύτητα της μάζας m μετά την κρούση έχει μέτρο

$$\upsilon' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_0 + \frac{2M}{m+M}\upsilon = \frac{\frac{m}{M}-1}{\frac{m}{M}+1}\upsilon_0 + \frac{2}{\frac{m}{M}+1}\upsilon \approx -\upsilon_0 + 2\upsilon.$$

Οπότε

$$\upsilon' > 0 \Rightarrow 2\upsilon > \upsilon_0.$$

Β2. Σωστή απάντηση η **(α)**.

Ο παλμός του laser σε χρόνο $\Delta t = 9 \cdot 10^{-15}\mathrm{s}$ έχει κινηθεί σε απόσταση,

$$\Delta x = c\Delta t \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{-15}\mathrm{m} \approx 27 \cdot 10^{-7}\mathrm{m}.$$

Το φωτόνιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε εντός του εύρους του παλμού, άρα τα $27 \cdot 10^{-7}\mathrm{m}$ είναι κατά προσέγγιση η απροσδιοριστία εύρεσης των φωτονίων στον άξονα της κίνησής τους. Τώρα η απροσδιοριστία στην ορμή των φωτονίων ισούται με

$$\Delta p\Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{h}{4\pi\Delta x}.$$

Ταυτόχρονα η ορμή κάθε φωτονίου της δέσμης ισούται με

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

άρα

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\frac{h}{4\pi \Delta x}}{\frac{h}{\lambda}} \approx \frac{\lambda}{4\pi \Delta x} \approx \frac{180\pi \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 27 \cdot 10^{-7}} \approx \frac{1}{60}.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η **(α)**.

Αιτιολόγηση:

Το υλικό σημείο εκτελεί κυκλική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στην περιφέρεια του δίσκου με επιτρόχιο επιτάχυνση $\alpha = \alpha_\gamma R$ και κεντρομόλο επιτάχυνση $a_\kappa = {}^{\upsilon^2}\!/_{R}$, όπου υ είναι η επιτρόχιος ταχύτητά του. Η επιτρόχιος επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της επιτροχίου ταχύτητας και η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της επιτροχίου ταχύτητας.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης, τη χρονική στιγμή $t = 1\text{sec}$, είναι

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = a_\gamma^2 t^2 R = 1\frac{\text{rad}^2}{\text{sec}^4} \cdot 1\text{sec}^2 \cdot 1\text{m} \Rightarrow a_\kappa = 1\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

και το μέτρο της επιτροχίου επιτάχυνσης είναι

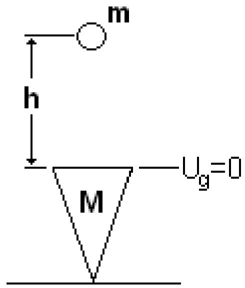
$$a = a_\gamma R = 1\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \cdot 1\text{m} \Rightarrow a = 1\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Τα διανύσματα των επιταχύνσεων αυτών είναι μεταξύ τους κάθετα. Άρα το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης του υλικού σημείου, τη χρονική στιγμή $t = 1\text{sec}$ είναι

$$a_{o\lambda} = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Αρχικά θα μελετήσουμε την πτώση της μάζας m από το ύψος h για να υπολογίσουμε την ταχύτητά της ακριβώς πριν την πλαστική κρούση με τον πάσσαλο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας της μάζας θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται ακριβώς πάνω από τον πάσσαλο (δες σχήμα). Συμβολίζουμε ως θέση (1) τη θέση της μάζας στο ανώτερο ύψος και ως θέση (2) τη θέση της μάζας ακριβώς πριν την κρούση, στο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, οπότε:



$$E_{(1)} = E_{(2)} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας της μάζας ακριβώς πριν την κρούση είναι

$$v = \sqrt{2 \cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \cdot 7.2\mathrm{m}} \Rightarrow v = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

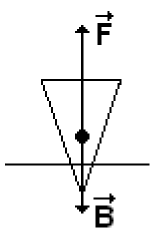
Γ2. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος ακριβώς πριν και ακριβώς μετά την κρούση:

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow mv = (m+M)V.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση ισούται με

$$V = \frac{m}{m+M}v = \frac{1\mathrm{Kg}}{4\mathrm{Kg}} \cdot 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \Rightarrow V = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Γ3. Τέλος θα μελετήσουμε την κίνηση του συσσωματώματος καθώς αυτό εισέρχεται στο έδαφος. Στο σύστημα ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους $\vec{B} = (m+M)\vec{g}$ και η σταθερή αντίσταση $\vec{F}$ από το έδαφος, οι οποίες εικονίζονται στο σχήμα.



Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης (1) του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση και της τελικής του θέσης (2), στην οποία υποθέτουμε ότι έχει ακινητοποιηθεί αφού έχει εισχωρήσει στο έδαφος κατά απόσταση x:

$$K_{(2)} - K_{(1)} = W_B + W_F \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gx - Fx$$

$$\Rightarrow x = \frac{(m+M)V^2}{2[F-(m+M)g]}.$$

Το βάθος στο οποίο εισχωρεί το συσσωμάτωμα είναι

$$x = \frac{4\mathrm{Kg}\cdot 9\,\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2}}{2\left[100\mathrm{Nt} - 4\mathrm{Kg}\cdot 10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\right]} \Rightarrow x = 0.3\mathrm{m}.$$

Γ4. Θερμότητα παράγεται κατά την πλαστική κρούση των δύο μαζών (ΔE) και από το έργο της σταθερής δύναμης της αντίστασης κατά την εισχώρηση του συσσωματώματος στο έδαφος.

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας κατά την πλαστική κρούση

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} + \Delta E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \Delta E.$$

Άρα

$$\Delta E = \frac{1}{2}[mv^2 - (m+M)V^2] = \frac{1}{2}\left[1\mathrm{Kg}\cdot 144\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2} - 4\mathrm{Kg}\cdot 9\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta E = 54\mathrm{J}.$$

Το έργο της σταθερής δύναμης $\vec{F}$ δίνεται μέσω της σχέσης

$$W_F = -Fx = -100\mathrm{Nt}\cdot 0.3\mathrm{m} \Rightarrow W_F = -30\mathrm{J}.$$

Άρα η συνολική θερμότητα η οποία απελευθερώνεται στο περιβάλλον ισούται με

$$Q = \Delta E + |W_F| = 84\mathrm{J}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Σύμφωνα με την γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι η περίοδος ισούται με $T = 1\mathrm{sec}$ και το πλάτος ταλάντωσης με $A = 2\mathrm{cm}$. Άρα το μήκος κύματος ισούται με

$$\lambda = cT = 2\mathrm{cm}.$$

Δ2. Μέσω της γραφικής παράστασης, παρατηρούμε ότι από την στιγμή που το κύμα της πηγής «1» προσεγγίζει το σημείο M, αυτό εκτελεί δύο πλήρεις ταλαντώσεις (χρονικό διάστημα $[3\mathrm{sec}, 5\mathrm{sec}]$) και στη συνέχεια το δεύτερο κύμα συμβάλει με το πρώτο όταν το σημείο M

βρίσκεται σε απομάκρυνση $y = 1\text{cm}$, έχοντας αρνητική ταχύτητα. Η συμβολή συμβαίνει λοιπόν, βάσει του σχήματος, κατά την διάρκεια της τρίτης ταλάντωσης του σημείου M. Αν

$$y_1(r_1,t) = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right] = 2\eta\mu[2\pi(t-3)] \text{ σε cm},$$
$$3\text{sec} \leq t \leq t_2,$$

η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M εξ' αιτίας του κύματος «1», τότε την στιγμή της συμβολής t_2, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι αρνητική, οπότε

$$y_1(r_1,t_2) = 1cm => \eta\mu[2\pi(t-3)] = \frac{1}{2} => 2\pi(t-3)$$
$$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Οι λύσεις που αντιστοιχούν σε αρνητική ταχύτητα είναι

$$t_2 = \frac{12k+41}{12}, \qquad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Στην διάρκεια της τρίτης περιόδου, $5\text{sec} < t_2 < 6\text{sec}$, οπότε $k_2 = 2$ και $t_2 = {}^{65}/_{12}\,\text{sec}$.

Δ3. Η απόσταση του σημείου M από την δεύτερη, πιο απομακρυσμένη πηγή, είναι

$$r_2 = ct_2 = \frac{65}{6}\text{cm}.$$

Δ4. Το σημείο Μ την χρονική στιγμή $t_0 = 3.5\text{s}$ ταλαντώνεται υπό την επίδραση μόνο του πρώτου κύματος, άρα η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του ισούται με

$$y = y_1 = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t_0}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right]$$

και η ταχύτητά του με

$$\upsilon = \upsilon_1 = \omega A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{t_0}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right]$$

ή

$$\upsilon = 2\pi\cdot 2\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{3.5}{1}-\frac{6}{2}\right)\right] = -4\pi\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Διαφορετικά το σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται από την ΘΙ του με θετική ταχύτητα την χρονική στιγμή 3s και την χρονική στιγμή 3.5sέχει ταλαντωθεί για μισή περίοδο. Συνεπώς βρίσκεται ξανά στην ΘΙ, με την μέγιστη αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης.

Επιμέλεια: Λεβέτας Στάθης

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

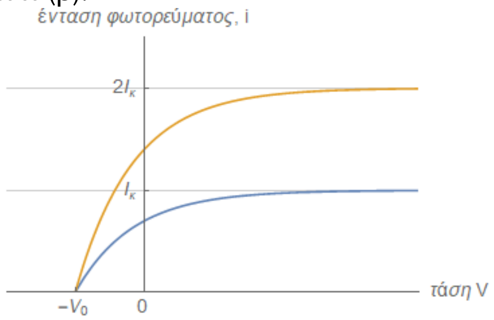
Α1 (β) **Α2** (β) **Α3** (γ) **Α4** (γ)

Α5 **(α)** Λάθος, **(β)** Σωστό, **(γ)** Σωστό, **(δ)** Λάθος, **(ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Β1

Σωστή επιλογή η (β).



Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ($K_{max} = hf - W$), η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχομένων ηλεκτρονίων εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα f της ακτινοβολίας και το υλικό της καθόδου (έργο εξαγωγής W). Εφόσον η συχνότητα παραμένει σταθερή, η $K_{\max}$ δεν αλλάζει, άρα το δυναμικό αποκοπής (V_0) παραμένει το ίδιο. Γραφικά, η καμπύλη θα ξεκινά από το ίδιο σημείο στον άξονα των τάσεων.
Η ένταση της ακτινοβολίας, τώρα, είναι ανάλογη του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στην κάθοδο στη μονάδα του χρόνου. Διπλασιάζοντας την ένταση (με σταθερή συχνότητα), διπλασιάζουμε τον αριθμό των προσπιπτόντων φωτονίων. Εφόσον κάθε φωτόνιο αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρόνιο, θα διπλασιαστεί και ο αριθμός των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων ανά μονάδα χρόνου. Το ρεύμα κόρου ορίζεται ως το φωτόρευμα όταν κάθε εξερχόμενο ηλεκτρόνιο από την κάθοδο, συλλαμβάνεται και καταγράφεται στην άνοδο. Άρα, το νέο ρεύμα κόρου θα είναι διπλάσιο.

B2 Σωστή απάντηση η (β).

Όταν μια χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα f_s, αναγκάζει τα μόρια του αέρα σε επαφή μαζί της να ταλαντωθούν με την ίδια ακριβώς συχνότητα. Επομένως, η συχνότητα του ήχου στον αέρα που παράγει η χορδή, είναι πάντα ίση με τη συχνότητα του στάσιμου κύματος στη χορδή, $f_\alpha = f_{(1)}$.

Η ταχύτητα διάδοσης κυμάτων στην χορδή (1) ισούται με $\upsilon_{(1)} = \lambda_s f_{(1)}$, όπου στην θεμελιώδη κατάσταση $\lambda_s = 2L$. Η ταχύτητα διάδοσης κυμάτων στην χορδή (2) ισούται με $\upsilon_{(2)} = \lambda_s f_{(2)}$, όπου και πάλι στην θεμελιώδη κατάσταση $\lambda_s = 2L$. Άρα

$$\upsilon_{(2)} = 2\upsilon_{(1)} \Rightarrow \lambda_s f_{(2)} = 2\lambda_s f_{(1)} \Rightarrow f_{(2)} = 2f_{(1)}$$

Συνεπώς στην χορδή (2) η συχνότητα διπλασιάζεται, όπως και η συχνότητα του ήχου στον αέρα.

B3 Σωστή απάντηση η (γ).

Σύμφωνα με την θεωρία του φαινομένου Compton, η μεταβολή στο μήκος κύματος του πρωτογενούς (εισερχομένου) και του δευτερογενώς εκπεμπομένου φωτονίου για την συγκεκριμένη γωνία σκέδασης ισούται με

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c[1 - \text{συν}(180°)] = 2\lambda_c,$$

όπου λ_c το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου. Παρατηρούμε ότι για κάθε γωνία σκέδασης θ, το δευτερογενές φωτόνιο έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος, $\lambda' > \lambda$, ίσο με

$$\lambda' = 2\lambda_c + \lambda.$$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι ίση με την ενέργεια που έχασε το φωτόνιο,

$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} hc = \frac{2\lambda_c}{\lambda\lambda'} hc$$

Αρχικά $\lambda'_1 = \lambda_1 + 2\lambda_c$, οπότε

$$K_{e,1} = \frac{2\lambda_c}{\lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_c)} hc$$

και στην συνέχεια $\lambda'_2 = \lambda_2 + 2\lambda_c = 0.5\lambda_1 + 2\lambda_c$, οπότε

$$K_{e,2} = \frac{2\lambda_c}{0.5\lambda_1(0.5\lambda_1 + 2\lambda_c)} hc.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{K_{e,1}}{K_{e,2}} = \frac{0.5\lambda_1(0.5\lambda_1 + 2\lambda_c)}{\lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_c)} = \frac{0.25\lambda_1 + \lambda_c}{\lambda_1 + 2\lambda_c} < 1 \Rightarrow K_{e,1} < K_{e,2}$$

Συνεπώς στην δεύτερη περίπτωση το ηλεκτρόνιο θα αποκτήσει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

Η ακτίνα τροχιάς φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και απόλυτου φορτίου $|q|$, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, συνδέεται με την κινητική του ενέργεια K μέσω της σχέσης

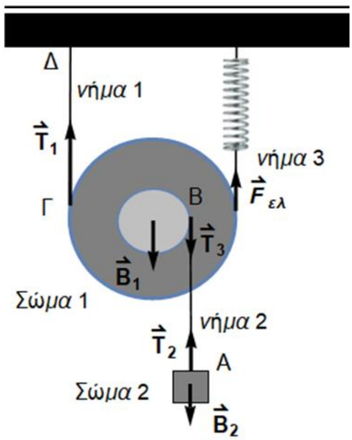
$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{\sqrt{2mK}}{|q|B}$$

Βάσει των παραπάνω,

$$R_1 = \frac{\sqrt{2mK_{e,1}}}{|q|B} < R_2 = \frac{\sqrt{2mK_{e,2}}}{|q|B}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1 Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο σωμάτων, στην κατάσταση ισορροπίας του.



Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα για την ισορροπία του Σ_2 προκύπτει ότι

$$T_2 = mg \quad (1),$$

όπου $T_2 = T_3$ γιατί το νήμα (2) είναι αβαρές.

Επίσης από τις εκφράσεις του 1ου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική ισορροπία του σώματος Σ_1 προκύπτει ότι

$$T_3 + Mg = T_1 + F_{ελ} \overset{(1)}{\Rightarrow} mg + Mg = T_1 + k(l - l_0) \quad (2),$$

$$T_3\frac{R}{2} + T_1R = F_{ελ}R \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}mg + T_1 = k(l - l_0) \quad (3)$$

αντίστοιχα. Στην σχέση (3) οι ροπές είναι υπολογισμένες ως προς το κέντρο της διπλής τροχαλίας. Επίσης η τάση του νήματος (3) είναι ίση με την δύναμη του ελατηρίου, εφόσον το νήμα (3) είναι μη εκτατό.

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$(2)+(3) \rightarrow Mg+\frac{3}{2}mg=2k(l-l_0) \Rightarrow m=\frac{2k(l-l_0)-Mg}{3g/2}$$

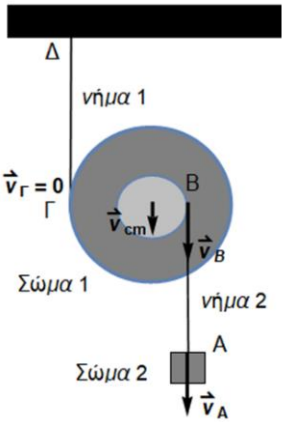
ή

$$m=\frac{2\cdot 100\cdot 0.125-10}{15}\ \mathrm{kg}=1\ \mathrm{kg}$$

Γ2. Κατά την κίνηση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 παρατηρούμε τα εξής:

Το νήμα (1) είναι μη εκτατό συνεπώς τα σημεία Γ και Δ έχουν σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μηδέν, $\upsilon_\Gamma=\upsilon_\Delta=0$.

Επίσης η τροχαλία μεταφέρεται και περιστρέφεται ωρολογιακά, συνεπώς $\upsilon_\Gamma=\upsilon_{cm}-\omega R=0 \Rightarrow \upsilon_{cm}=\omega R$.



Ο ρυθμός μεταβολής της τελευταίας σχέσης δίνει την σχέση της μεταφορικής, a_{cm}, και γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας,

$$a_{cm}=a_\gamma R \quad (4).$$

Το νήμα (2) είναι επίσης μη εκτατό, άρα τα σημεία του Β και Α έχουν σε κάθε χρονική στην ίδια κατά μέτρο ταχύτητα, $\upsilon_A=\upsilon_B$.

Αλλά το Β ως σημείο της εξωτερικής περιφέρειας της τροχαλίας και σημείο του μη ολισθαίνοντος νήματος έχει ταχύτητα $\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\omega\, R/2$ ή μέσω της (4), $\upsilon_B=1.5\upsilon_{cm}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τελευταίας σχέσης δίνει την σχέση της μεταφορικής επιτάχυνσης της τροχαλίας, a_{cm}, και της επιτάχυνσης, α, του Σ_2,

$$\alpha=\frac{3}{2}\alpha_{cm}=\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Η δε τάση του νήματος (2) προκύπτει μέσω του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα για την κίνηση του Σ_2, συγκεκριμένα

$$mg-T_2=ma \Rightarrow T_2=0.$$

Συνεπώς το Σ_2 κινείται μόνον υπό την επίδραση του βάρους του και εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Γ3 Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από το εσωτερικό αυλάκι της τροχαλίας ισούται με $S = \theta\frac{R}{2}$, άρα

$$S = R \Rightarrow \theta\frac{R}{2} = R \Rightarrow \theta = 2\,\mathrm{rad}$$

Τότε ο αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας ισούται με

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Γ4 Την χρονική στιγμή του ερωτήματος Γ3 η γωνία ισούται με $\theta = 2\,\mathrm{rad}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι από τους κινηματικούς συνδέσμους του ερωτήματος Γ2, ότι

$$y_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}x_{cm} = \frac{3}{2}\theta R = 3R$$

Τέλος το Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα

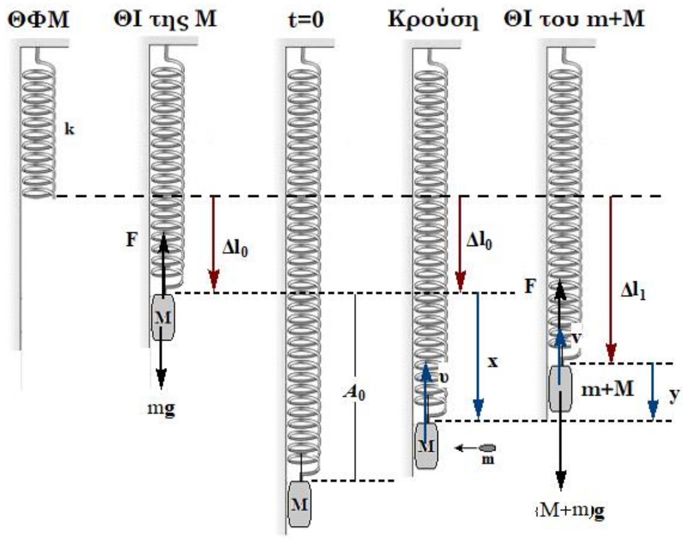
$$v = \sqrt{2g\cdot 3R} = \sqrt{6gR} = \sqrt{10}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της κιντικής ενέργειας του σώματος Σ_2 ισούται με

$$\frac{dK}{dt} = \sum F\,v = mgv = 1\cdot 10\cdot\sqrt{10}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 10\sqrt{10}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1



Σχήμα 1

Θετική φορά προς τα «κάτω».

- **ΘΙ της $\boldsymbol{M}$:**

$$Mg = k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{M}{k}g = \frac{0.6}{10}10\mathrm{m} \Rightarrow \Delta l_0 = 0.6\mathrm{m} \quad \text{(i)}.$$

- **ΘΙ του $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{M}$:**

$$(m+M)g = k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m+M}{k}g = \frac{0.2+0.6}{10}10\mathrm{m} \Rightarrow \Delta l_1 = 0.8\mathrm{m} \quad \text{(ii)}.$$

- **Αρχική ταλάντωση του $\boldsymbol{M}$:**

Σύμφωνα με την διατήρηση της ενέργειας, η ταχύτητα του σώματος υ σε τυχαία απομάκρυνση x, ισούται στο S.I. με

$$\frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k}{M}(A_0^2 - x^2) = \frac{10}{0.6}(0.16 - x^2) \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{50}{3}(0.16 - x^2), \qquad \text{(iii)}.$$

- **Διατήρηση της ορμής στην κρούση, κατά τον κατακόρυφο άξονα:**

$$M\upsilon = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{M}{m+M}\upsilon \quad \text{(iv)}$$

ή μέσω της (iii), πάντα στο S.I.,

$$v^2 = \frac{Mk}{(m+M)^2}(A_0^2 - x^2) = \frac{0.6 \cdot 10}{(0.8)^2}(0.16 - x^2) \Rightarrow v^2 = \frac{75}{8}(0.16 - x^2) \quad \text{(v)}.$$

- **Ταλάντωση του συσσωματώματος:**

Σύμφωνα με το σχήμα,

$$\Delta l_0 + x = \Delta l_1 + y \Rightarrow y = \Delta l_0 - \Delta l_1 + x = 0.6 - 0.8 + x \Rightarrow y = x - 0.2 \quad \text{(vi)}.$$

Σύμφωνα τώρα με την διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης,

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m+M}{k}v^2 + y^2 \quad \text{(vii)},$$

οπότε στο S.I.,

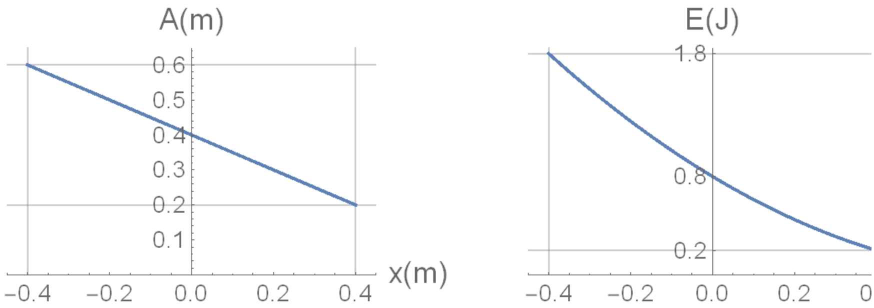
$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{0.2+0.6}{10}\cdot\frac{75}{8}\cdot(0.16-x^2)+(x-0.2)^2\\
&= 0.75\cdot(0.16-x^2)+(x-0.2)^2\\
&= 0.75\cdot 0.16-0.75x^2+x^2+0.04-0.4x\\
&= 0.25x^2-0.4x+0.16=(0.5x)^2-2\cdot(0.5x)\cdot(0.4)+(0.4)\\
&= (0.5x-0.4)^2
\end{aligned}$$

ή εφ' όσον $-0.4 \le x \le 0.4$,

$$A(x) = |0.5x-0.4| \Rightarrow \boxed{A(x)=0.4-0.5x} \quad \text{(viii)}.$$

Έπεται ότι η εξίσωση της ενέργειας στο S.I., λαμβάνει την μορφή

$$E(x) = \frac{1}{2}kA^2(x) \Rightarrow \boxed{E(x)=5(0.4-0.5x)^2} \quad \text{(ix)}.$$



Σχήμα 2

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (vi) και (vii) δίνονται στο παραπάνω σχήμα 2.

Δ2 Μέσω των εξισώσεων (viii) και (ix), αλλά και των γραφικών παραστάσεων του σχήματος 2, προκύπτει ότι

$$A_{\min} = A(+0.4) = [0.4-0.5(+0.4)]\text{m} = 0.2\text{m},$$

$$E_{\min} = \frac{1}{2}kA_{\min}^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0.04\text{J} = 0.2\text{J}$$

και

$$A_{\max} = A(-0.4) = [0.4-0.5(-0.4)]\text{m} = 0.6\text{m},$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2}kA_{\max}^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0.36\text{J} = 1.8\text{J}.$$

Δ3 Σύμφωνα με την εξίσωση (viii), το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισούται με το πλάτος $A_0 = 0.4\text{m}$ της αρχικής ταλάντωσης, αν η κρούση συμβεί στην θέση ισορροπίας, $x=0$, της ταλάντωσης του M. Στην περίπτωση αυτή οι ενέργειες των δύο ταλαντώσεων συμπίπτουν αριθμητικά στην τιμή

$$E=\frac{1}{2}kA_0^2=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0.16\mathrm{J}=0.8\mathrm{J}.$$

Τότε η ταχύτητα της μάζας M, σύμφωνα με το σχήμα 1, ισούται με την μέγιστη αρνητική, ήτοι

$$\upsilon_0=-\sqrt{\frac{k}{M}}A_0=-\sqrt{\frac{10}{0.6}}\cdot 0.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Συνεπώς ακριβώς μετά την κρούση η απομάκρυνση της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισούται με

$$y_0=\Delta l_0-\Delta l_1=-0.2\mathrm{m},$$

Επιμέλεια: Λεβέτας Στάθης

ΧΗΜΕΙΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. **β.** 12,5s

Α2. **δ.** $Π_1 < Π_3 < Π_2$

Α3. **β.** Δυνάμεις διπόλου – διπόλου

Α4. **γ.** η συγκέντρωση του O_2 παραμένει σταθερή

Α5.

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος

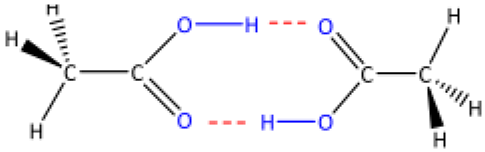
ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

α. u = k[A][B]
β. 2ης τάξης
γ. $M^{-1} \cdot s^{-1}$
δ. πολύπλοκη,

- Α + Β → Δ **βραδύ στάδιο**
- Δ + Α → 2Γ ταχύ στάδιο

Β2. Το CH_3COOH έχει Mr = 60. Σε αυτό το Δ/μα εμφανίζεται να έχει $Mr = \frac{mRT}{PV} = 120$. συμπεραίνουμε ότι τα μόρια ενώνονται ανά δυο με δεσμούς Η όπως φαίνεται στο σχήμα.



B3 .

	α	K_c	mol AB
+A (στερεό)	-	-	-
+V (ίδια mol αερίων)	-	-	-
+Θ (ενδόθερμη)	↑	↑	↑

B4 .

$$K_c = \frac{[HCOO^-]\cdot\ \ [HF]}{[HCOOH]\cdot\ \ [F^-]} \Rightarrow K_c = \frac{[HCOO^-]\cdot[HF]\cdot[H_3O^+]\cdot[OH^-]}{[HCOOH]\cdot[F^-]\cdot[H_3O^+]\cdot[OH^-]} \Rightarrow K_c = \frac{K_a HCOOH}{K_a HF} = 2.$$

ΘΕΜΑ 3ο

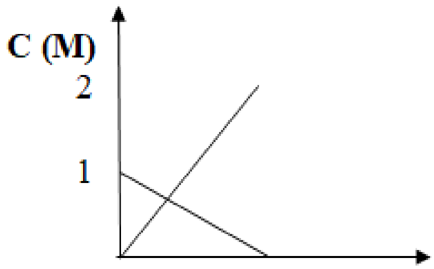
Γ1.

α. u = k, μηδενικής τάξης

β. k = 0,02M·s^{-1}

γ.

	A	→ 2B
αρχ	1	-
α/π	-1	+2
Τελ.	-	2



δ. Δεν επηρεάζεται από την συγκέντρωση των αντιδρώντων, άρα και του όγκου του δοχείου

Γ2. Έστω x mol H_2 και y mol Cl_2. Vμίγματος = V_1 + V_2 ⇒ 11,2 = x·22,4 + y·22,4 ⇒ x + y = 0,5 (1)

H_2 +	Cl_2 →	$2HCl$,	$\Delta H_1 = -44Kcal$
x	y		
-y	-y	2y	y(-44)Kcal
x-y	-	2y	y(-44)Kcal

Τα mol του H_2 που περισσεύουν : n = $\frac{2,24}{22,4}$ = 0,1mol άρα x – y = 0,1 (2)

(1) & (2) ⇒ x = 0,3 mol H_2 , y = 0,2 mol Cl_2.

I) $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **II)** Q = y·44 = 0,2·44 = 8,8Kcal

III) $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$, ΔH_2

0,4 0,4·ΔH_2

άρα 0,4·ΔH_2 = -5,6 Kcal ⇒ ΔH_2 = -14 Kcal

Γ3. α.

$PCl_{3(g)}$ +	$Cl_{2(g)}$ ⇌	$PCl_{5\,(g)}$	$n_{ΟΛ}$ = (3x-0,2) mol
2x	x	-	
-0,2	-0,2	0,2	$n_{ΟΛ} = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T} = \frac{2,46 \cdot 10}{0,082 \cdot 300}$ = 1mol
2x-0,2	x-0,2	0,2	x = 0,4mol

$\alpha = \frac{0,2}{x}$ = 0,5 $K_C = \frac{50}{3}$

β. n Cl_2 = $\frac{P_2 \cdot V_2}{R \cdot T}$ = $\frac{0,492 \cdot 5}{0,082 \cdot 300}$ = 0,1mol

V_3 = 15L (←), +Cl_2 (→) ⇒ Qc = $\frac{50}{3}$ = Kc

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Φ1-Υ3, Φ2-Υ1, Φ3-Υ2, Φ4-Υ4, Φ5-Υ5.

Δ2.

I) c = 0,1 M,

$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$ pH =1 ⇒ C_3 = 0,1M

C_3 C_3 C_3

II) Kb(CH_3NH_2) = 10^{-4}.

$CH_3NH_2 + H_2O \leftrightarrows CH_3NH_3^+ + OH^-$ $k_b = \frac{x^2}{C_4} = 10^{-4}$

C_4-x x x

Δ3. NaOH : 0,1.0,1=C_2' ·1⇒ C_2'=10^{-2}M

CH_3NH_2: 0,1.0,9=C_4' ·1⇒ C_4'=9·10^{-2}M

$CH_3NH_2 + H_2O \leftrightarrows CH_3NH_3^+ + OH^-$

$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$

C4′-y y y

C2′ C2′ C2′

$K_b = \frac{C2' \cdot y}{C4'}$ ⇒ y = 9·10^{-4} [OH-]= C_2'+y = C_2' = 10^{-2}M⇒ pH_3 = 12

I) pH = 12, **II)** [$CH_3NH_3^+$] = 9·10−4M, **III)** α = 0,01.

Δ4. CH_3NH_2 : C_b = 0,05M , CH_3NH_3Cl : Ca = 0,05M

CH_3NH_2 + H_2O ⇆ CH_3NH_3+ + OH-

CH_3NH_3Cl → CH_3NH_3+ + Cl-

Cb – z z z

Ca Ca Ca

$$k_b = \frac{z\cdot(z+c_a)}{c_b - z} = \frac{z\cdot c_a}{c_b} \Rightarrow z = k_b = 10^{-4}M \Rightarrow pH = 10$$

$[OH^-]$ = 10^{-4} M, $[H_3O^+]$ = 10^{-10} M, $[CH_3NH_3^+]$ = 0,05 M, $[Cl^-]$ = 0,05 M.

Επιμέλεια: Αθανασόπουλος Παναγιώτης

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1 Δ) $(CH_3)_3N$

Α2 Β

Α3 Γ

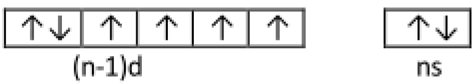
Α4 Δ

Α5.

- **α.** Σ
- **β.** Σ
- **γ.** Σ
- **δ.** Σ
- **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Α. Ο μέγιστος αριθμός μονήρων ηλεκτρονίων για τις υποστιβάδες s και p είναι 1 και 3 αντίστοιχα. Επομένως, για τα στοιχεία της 4 ης περιόδου τα τέσσερα μονήρη ηλεκτρόνια μπορούν να ανήκουν μόνο σε υποστιβάδα d.
Εφαρμογή του κανόνα του Hund:



Η δομή d^4s^2 δεν είναι δυνατή αφού μεταπίπτει στη σταθερότερη $d^5\ s^1$ στην οποία υπάρχουν 6 μονήρη ηλεκτρόνια.
Αφού το Χ είναι στοιχείο της 4ης περιόδου, τα ηλεκτρόνιά του κατανέμονται σε τέσσερις στιβάδες.
Ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου Χ σε υποστιβάδες: $1s^22s^22p^63s^23p^63d^64s^2$
Ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου Χ σε στιβάδες: $K^2\ L^8\ M^{14}\ N^2$
Ατομικός αριθμός: $Z_X = 26$

Β. Από την κατανομή των ηλεκτρονίων σε υποστιβάδες προκύπτει ότι το στοιχείο Χ ταξινομείται στην $8^η$ ομάδα VIIIB και στον τομέα d του Περιοδικού Πίνακα.

Γ. Ηλεκτρονιακή δομή του ιόντος X^{3+} σε υποστιβάδες: $1s^2\ 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5$
Εφαρμογή του κανόνα του Hund για την υποστιβάδα 3d:

↑	↑	↑	↑	↑

$m_\ell = 0$ έχουν τα ηλεκτρόνια: της υποστιβάδας s ενός τροχιακού υποστιβάδας p
ενός τροχιακού υποστιβάδας d.
Οπότε 6 + 4 + 1 = 11 ηλεκτρόνια
$m_\ell = -1$ έχουν τα ηλεκτρόνια: ενός τροχιακού υποστιβάδας p ενός τροχιακού υποστιβάδας d Οπότε 4 + 1 = 5 ηλεκτρόνια

Δ. Ηλεκτρονιακή δομή του ιόντος X^{3+} σε υποστιβάδες: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5$
Ηλεκτρονιακή δομή του ιόντος X^{2+} σε υποστιβάδες: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6$
Τα παραπάνω ιόντα έχουν ίσο πυρηνικό φορτίο (26 πρωτόνια) διότι προέρχονται από το ίδιο άτομο, αλλά διαφέρουν στον αριθμό των ηλεκτρονίων της εξωτερικής στιβάδας. Το ιόν X^{2+} περιέχει 1 επιπλέον ηλεκτρόνιο, με αποτέλεσμα οι απώσεις των ηλεκτρονίων της εξωτερικής στιβάδας να είναι μεγαλύτερες σε σύγκριση με το X^{3+} και το ηλεκτρονιακό νέφος να καταλαμβάνει μεγαλύτερο χώρο.
Επομένως, το X^{2+} έχει μεγαλύτερο μέγεθος από το X^{3+} .
Ε. Αφού σε μια περίοδο του η ατομική ακτίνα αυξάνεται από δεξιά προς τα αριστερά και το στοιχείο Ψ έχει τη μέγιστη τιμή, συμπεραίνουμε ότι αυτό βρίσκεται στο αριστερό μέρος του Περιοδικού Πίνακα και συγκεκριμένα στην 1 η ομάδα. Άρα τα ηλεκτρόνια του κατανέμονται σε 4 στιβάδες με την τελευταία να περιέχει 1 ηλεκτρόνιο.
Ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου Ψ σε υποστιβάδες: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^1$
Ατομικός αριθμός: $Z_Ψ = 19$

ΣΤ.

I. Πρώτος ιοντισμός: $Ω_{(g)} \rightarrow Ω^{+}{}_{(g)} + e^{-}$ $E\ i_{(1)}$

Δεύτερος ιοντισμός: $Ω^{+}{}_{(g)} \rightarrow Ω^{2+}{}_{(g)} + e^{-}$ $E\ i_{(2)}$

Τρίτος ιοντισμός: $Ω^{2+}{}_{(g)} \rightarrow Ω^{3+}{}_{(g)} + e^{-}$ $E\ i_{(3)}$

Τέταρτος ιοντισμός: $Ω^{3+}{}_{(g)} \rightarrow Ω^{4+}{}_{(g)} + e^{-}$ $E\ i_{(4)}$

Από τις τιμές του πίνακα παρατηρούμε ότι υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των ενεργειών δεύτερου και τρίτου ιοντισμού [$E\ i_{(2)} << E\ i_{(3)}$]. Για να αποσπαστεί ηλεκτρόνιο από το ιόν $Ω^{2+}{}_{(g)}$ απαιτείται μεγάλο ποσό ενέργειας, γεγονός που δείχνει ότι το $Ω^{2+}$ έχει αποκτήσει σταθερή ηλεκτρονιακή δομή ευγενούς αερίου. Επειδή το $Ω^{2+}$ αποκτά τη δομή του $_{18}Ar^{+}$ μετά την αποβολή τεσσάρων ηλεκτρονίων, ισχύει $E_{i1}(Ar)<E_{i3}(Ω)$.

Οπότε, η κατανομή των ηλεκτρονίων της εξωτερικής στιβάδας στο άτομο του Ω είναι ns^{2} ώστε αποβάλλοντας 2 ηλεκτρόνια να αποκτά τη δομή του προηγούμενου ευγενούς αερίου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το στοιχείο Ω ανήκει στη 2η ομάδα του Περιοδικού Πίνακα ή αλλιώς στην ομάδα των αλκαλικών γαιών.

II. Πρώτος ιοντισμός $Ar_{(g)} \rightarrow Ar^{+}{}_{(g)} + e^{-}$ $E\ i_{(1)}$

Ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου Ar σε υποστιβάδες: $1s^{2}\ 2s^{2}\ 2p^{6}\ 3s^{2}\ 3p^{6}$

Το στοιχείο Ω βρίσκεται στην 4η περίοδο (ίδια με το Ψ).

Ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου Ω σε υποστιβάδες: $1s^{2}\ 2s^{2}\ 2p^{6}\ 3s^{2}\ 3p^{6}\ 4s^{2}$

Ατομικός αριθμός: $Z_{Ω} = 20$

B2. **α)** Υπάρχουν τρεις θερμοχημικοί κύκλοι:

1ος *:* $A \rightarrow B \rightarrow Γ$

Σύμφωνα με τον νόμο του Hess, ισχύει: $ΔH_1 + ΔH_2 = ΔH_5$ (1)

2ος: $A \rightarrow Γ \rightarrow Δ$

Σύμφωνα με τον νόμο του Hess, ισχύει: $ΔH_5 + ΔH_3 = ΔH_4$ (2)

3ος: $A \rightarrow B \rightarrow Γ \rightarrow Δ$

Σύμφωνα με τον νόμο του Hess, ισχύει: $ΔH_1 + ΔH_2 + ΔH_3 = ΔH_4$ (3)

Στην κλειστή διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow Γ \rightarrow Δ \rightarrow A$ ισχύει $ΔH_1 + ΔH_2 + ΔH_3 + (-ΔH_4)=0$

β) Από τη σχέση (1) στον 1ο θερμοχημικό κύκλο έχουμε:
$\Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H_5 \Rightarrow 100 \text{ kJ} - 40 \text{ kJ} = \Delta H_5 \Rightarrow \Delta H_5 = 60\text{kJ}$
Από τη σχέση (2) στον 2ο θερμοχημικό κύκλο έχουμε:
$\Delta H_5 + \Delta H_3 = \Delta H_4 \Rightarrow 60 \text{ kJ} + (-80 \text{ kJ}) = \Delta H_4 \Rightarrow \Delta K_4 = -20 \text{ kJ}$

γ) Από τον νόμο του Hess :

$$\mathbf{C_vH_{2v-2} + \frac{3v-1}{2}O_2 \rightarrow vCO_2 + (v-1)H_2O, \qquad \Delta H_1 = -466Kcal}$$

$$\mathbf{vCO_2 + (v+1)H_2O \rightarrow C_vH_{2v+2} + \frac{3v+1}{2}O_2, \qquad -\Delta H_2 = 530Kcal}$$

$$\mathbf{2\,H_2 + 2\cdot\frac{1}{2}O_2 \rightarrow 2\,H_2O, \qquad 2\cdot\Delta H_3 = -136Kcal}$$

$\Delta H = \Delta H_1 + (-\Delta H_2) + 2\Delta H_3 = -72$ Kcal

Β3. α) Εξώθερμη αντίδραση ($\Delta H < 0$).

β) $A(g) + B(g) \xrightarrow[k_1]{Ea_1} E(g)$ $\Delta H_1 > 0$ **βραδύ στάδιο**

$E(g) + B(g) \xrightarrow[k_2]{Ea_2} 2\Gamma(g)$ $\Delta H_2 < 0$ **ταχύ στάδιο**

γ) **i)** $E_{a1} > E_{a2}$.
ii) $\Delta H_1 > \Delta H_2$ (ισχύει ότι $\Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H$).
iii) $k_1 < k_2$.

Β4. Ι. α. $HClO + H_2O \rightleftharpoons ClO^- + H_3O^+$
β. $HClO + OH^- \rightleftharpoons ClO^- + H_2O$

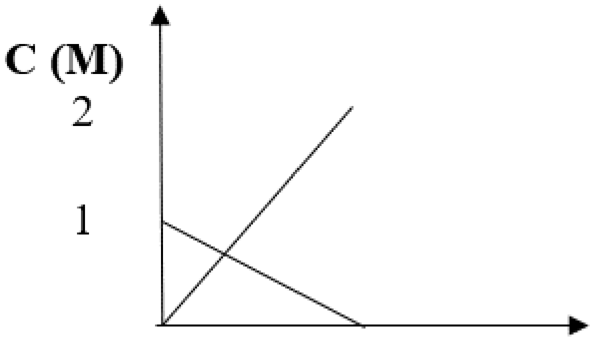
ΙΙ. Το OH^- είναι ισχυρότερη βάση από το H_2O. Η ισχυρότερη βάση προσλαμβάνει πιο εύκολα H^+, άρα το HClO είναι ισχυρότερο οξύ στη β αντίδραση, στην οποία αποβάλλει πιο εύκολα H^+.

ΙΙΙ. Η ιοντική ισορροπία είναι μετατοπισμένη προς το ασθενέστερο οξύ και την ασθενέστερη βάση.
Στην αντίδραση **i.** τα οξέα (B-L): $NH_4^+ > H_2O$, οι βάσεις (B-L): $OH^- > NH_3$
Στην αντίδραση **ii** τα οξέα είναι τα : $HF > NH_4^+$, οι βάσεις (B-L): $NH_3 > F^-$

Άρα για τα οξέα ισχύει: HF > NH_4^+ > H_2O και για τις βάσεις ισχύει: OH^- > NH_3 > F^-.
Σωστή απάντηση η: **β**

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. **I. u = k, μηδενικής τάξης** **II. k = 0,02M·s^{-1}**
I. u = k, μηδενικής τάξης **II. k = 0,02M·s^{-1}**
III.



IV. δεν επηρεάζεται από την συγκέντρωση των αντιδρώντων, άρα και του όγκου του δοχείου

Γ2. **A)** n $_{NaOH}$ =0,2mol n $_{HCl}$ =0,4V mol

n (mol)	**NaOH**	**+HCl**	**→ NaCl**	**+H$_2$O**
Αρχικά	0,2	0,4V		
τελικά			0,2	0,2

0,4V=0,2 $\Rightarrow$ **V=0,5L (HCl)**
B) C $_{NaCl}$ =0,08M

n (mol)	**NaCl**	**→ Na$^+$**	**+Cl$^-$**
Αρχικά	0,08		
τελικά		0,08	0,08

Π = C·R·T =0,16RT=0,16 $\cdot R \cdot \frac{1}{R} = 0{,}16\ atm$

Γ) Στα 0,2 mol εκλύεται Q=11,4 KJ
1mol ? ?= 57KJ άρα **ΔΗ= -57KJ**

ΘΕΜΑ 4ο

α. πρότυπο διάλυμα : HCl =0,2M

Το ογκομετρούμενο διάλυμα περιέχει NH_3 γιατί στο ισοδύναμο σημείο pH < 7 άρα το αλάτι που προκύπτει είναι όξινο. Όξινα άλατα προκύπτουν από την εξουδετέρωση ασθενούς βάσης από ισχυρό οξύ.

β. $\left.\begin{array}{r}\mathrm{HCl}: V = 0{,}04\mathrm{L}\\ C = 0{,}2\mathrm{M}\end{array}\right\} n_{HCl} = 8\cdot 10^{-3}\mathrm{mol}$

$\left.\begin{array}{r}\mathrm{NH_3}: V = 0{,}04\mathrm{L}\\ C_1 = \mathrm{CM}\end{array}\right\} n_{NH_3} = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{C\ mol}$

n (mol)	HCl +	NH_3 →	NH_4Cl
Αρχικά	$8\cdot 10^{-3}$	$4\cdot 10^{-2}\,C$	
Αντιδρούν/παράγονται	$-8\cdot 10^{-3}$	$-8\cdot 10^{-3}$	$+8\cdot 10^{-3}$
τελικά	-	-	$8\cdot 10^{-3}$

$4\cdot 10^{-2}\,C = 8\cdot 10^{-3} \Rightarrow C = 0{,}2\ M$

γ. Σημείο Β

$H\Delta + H_2O \rightleftharpoons \Delta^- + H_3O^+$

$$K_\alpha\, H\Delta = \frac{[\Delta^-]\cdot[H_3O^+]}{[H\Delta]} \Rightarrow [H_3O^+] = \frac{[H\Delta]}{[\Delta^-]}\cdot K_\alpha = \frac{[H\Delta]}{2000[H\Delta]}\cdot 2\cdot 10^{-6} = 10^{-9}$$

pH = -log $10^{-9} \Rightarrow$ pH = 9

το διάλυμα είναι ρυθμιστικό

$\left.\begin{array}{r}\mathrm{HCl}: V = 0{,}02\mathrm{L}\\ C = 0{,}2\mathrm{M}\end{array}\right\} n_{HCl} = 4\cdot 10^{-3}\mathrm{mol}$

$\left.\begin{array}{r}\mathrm{NH_3}: V = 0{,}04\mathrm{L}\\ C_1 = 0{,}2\mathrm{M}\end{array}\right\} n_{NH_3} = 8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol}$

n (mol)	HCl	+	NH_3 →	NH_4Cl
Αρχικά	$4 \cdot 10^{-3}$		$8 \cdot 10^{-3}$	
Αντιδρούν/παράγονται	$-4 \cdot 10^{-3}$		$-4 \cdot 10^{-3}$	$+4 \cdot 10^{-3}$
τελικά	-		$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$

$C_{NH_4Cl} = C_{NH_3} = {}^{1}/_{15}\ M$ $[OH^-] = K_b \frac{C_{NH_3}}{C_{NH_4Cl}} \Rightarrow 10^{-5} =$

$K_b \frac{1/15}{1/15} \Rightarrow K_b = 10^{-5}$

Στο σημείο Γ

$$C_{NH_4Cl} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-2}} = 10^{-1} M$$

C(M)	NH_4Cl	→	NH_4^+	+	Cl^-
Αρχικά	0,1		-		-
τελικά			0,1		0,1

C(M)	NH_4^+ + H_2O ⇌		NH_3 +	H_3O^+
Αρχικά	0,1			
Αντιδρούν /Παράγονται	-ω		+ω	+ω
Χ.Ι	0,1 -ω		ω	ω

$K_a = \frac{K_w}{K_b} = 10^{-9}$ $K_a = \frac{\omega^2}{0{,}1} \Rightarrow \omega = 10^{-5}$ άρα pH=5

δ. $pKa_{H\Delta} = -\log 2 \cdot 10^{-6}$ ⇒ $pKa_{H\Delta} = 6 - \log 2$

περιοχή αλλαγή δείκτη: **5- log2 < pH < 7-log2**

Στο Ι.Σ. pH = 5 άρα ο δείκτης είναι κατάλληλος γιατί το pH βρίσκεται μέσα στην περιοχή αλλαγής χρώματος του δείκτη.

ε. $pH_{\text{τελικό σημείο}} > pH_{Ι.Σ}$ $C_{NH_3} = \frac{C_{HCl} \cdot V_{HCl}}{V_{NH_3}}$

$V_{HCl\ \text{τελικό σημείο}} < V_{HCl\ Ι.Σ}$ άρα $C_{NH_3} < 0{,}2M$

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. β
2. α
3. γ
4. β
5. γ

6. **α.**

Arrhenius:
1. Οξέα είναι οι ενώσεις που όταν διαλυθούν στο νερό δίνουν H^+
2. Τα οξέα είναι ουδέτερα μόρια
3. Η συμπεριφορά ενός οξέος εκδηλώνεται μόνο σε υδατικά διαλύματα

B - L:
1. Οξύ είναι η ουσία που είναι δότης πρωτονίων
2. Τα οξέα μπορεί να είναι ουδέτερα μόρια ή ιόντα
3. Η συμπεριφορά ενός οξέος εκδηλώνεται και εκτός υδατικών διαλυμάτων

β.
<u>Διάσταση</u>
1. Απομάκρυνση ιόντων από τον ιοντικό κρύσταλλο
2. Είναι πλήρης

<u>Ιοντισμός</u>
1. Είναι η αντίδραση με μόρια νερού
2. Είναι πλήρης ή μερικός

ΘΕΜΑ 2ο

1. **Α.** Η αντίδραση $A_{(g)} \rightarrow B_{(g)}$ είναι εξώθερμη αντίδραση με ΔΗ=-30kJ επομένως η αντίστροφη αντίδραση είναι ενδόθερμη με ΔΗ΄=30kJ
   Για την ενέργεια ενεργοποίησης ισχύει
   $E_{a\,ενδόθερμης} - E_{a\,εξώθερμης} = \Delta H_{ενδόθερμης} \Leftrightarrow$
   $E_{a\,ενδόθερμης} - 40 = 30 \Leftrightarrow E_{a\,ενδόθερμης} = 70kJ$
   Σωστό το δ

   Β. Από το ενεργειακό διάγραμμα παρατηρούμε ότι η αντίδραση είναι απλή αφού η μετατροπή των αντιδρώντων σε προϊόντα γίνεται σε ένα στάδιο αφού υπάρχει μόνο μια E_a.
   Αν η αντίδραση ήταν πολύπλοκη, έπρεπε στο διάγραμμα να υπάρχουν τόσες E_a όσες ήταν και τα επιμέρους στάδια της αντίδρασης.
   Ο νόμος ταχύτητας είναι $υ=k[A]$

   Γ. Σωστό το γ.
   Με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνεται η ταχύτητα της αντίδρασης, επομένως η σταθερά k_1 ,αφού η [A] παραμένει σταθερή και ο νόμος ταχύτητας είναι $υ=k_1[A]$.
   Η E_a εξαρτάται από τη φύση των αντιδρώντων και η ΔΗ από τις συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας

2. Σύμφωνα με το νόμο του Hess έχουμε

$C_2H_{4(g)} + 3O_{2(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$ $\Delta H_2=-314kcal$
$C_2H_{2(g)} + H_2O_{(l)} \rightarrow CH_3CHO_{(l)}$ $\Delta H_3=-\ 33\ kcal$
$2C_{(s)} + H_{2(g)} \rightarrow C_2H_{2(g)}$ $\Delta H_4=+55\ kcal$
$H_2O_{(l)} \rightarrow H_{2(g)} + 1/2O_{2(g)}$ $-\Delta H_5=68\ kcal$
$2CO_{2(g)} \rightarrow 2C_{(s)} + 2O_{2(g)}$ $2\cdot(-\Delta H_6)=188\ kcal$

$C_2H_{4(g)} + 1/2O_{2(g)} \rightarrow CH_3CHO_{(l)}$ $\Delta H_1 = \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 - \Delta H_5 + 2\cdot(-\Delta H_6) = -36kcal$

3.

i. Ο ιοντισμός είναι ενδόθερμη αντίδραση σύμφωνα με Le Chatelier η ιοντική ισορροπία μετατοπίζεται προς τα δεξιά άρα ο α αυξάνεται.

ii. Λόγω αραίωσης η συγκέντρωση του HA μειώνεται άρα ο α αυξάνεται.

iii. Ομοίως με ii

iv. Λόγω προσθήκης διαλυμένης ουσίας η C_{HA} αυξάνεται άρα ο βαθμός ιοντισμού μειώνεται.

v. $0{,}05 < C_{HA} < 0{,}1$ άρα η συγκέντρωση μειώνεται άρα ο α αυξάνεται.

vi. $0{,}1 < C_{HA} < 0{,}2$ άρα η συγκέντρωση αυξάνεται άρα ο α μειώνεται.

vii. Με τη προσθήκη δ/τος HCl αυξάνονται τα mol των H_3O^+ και ο όγκος του διαλύματος. Επειδή το δ/μα HCl έχει pH=2 για το pH του δ/τος έχουμε 2<pH<3 άρα το pH μειώνεται σύμφωνα με Le Chatelier η ιοντική ισορροπία μετατοπίζεται προς τα αριστερά άρα ο α μειώνεται.

viii. Με τη προσθήκη δ/τος HCl αυξάνονται τα mol των H_3O^+ και ο όγκος του διαλύματος. Επειδή το δ/μα HCl έχει pH=5 για το pH του δ/τος έχουμε 3<pH<5 άρα το pH αυξάνεται σύμφωνα με Le Chatelier η ιοντική ισορροπία μετατοπίζεται προς τα δεξιά άρα ο α αυξάνεται.

4. Η αύξηση της K_C και η αύξηση της απόδοσης γίνεται όταν η Χ.Ι. μετατοπισθεί προς τα δεξιά. Αυτό γίνεται μόνο στη περίπτωση μείωσης της θερμοκρασίας. Όταν μειώσουμε τη θερμοκρασία η θέση της Χ.Ι. σύμφωνα με την αρχή Le Chatelier μετατοπίζεται προς εκείνη τη κατεύθυνση η οποία τείνει να αναιρέσει τη μεταβολή άρα να αυξηθεί η θερμοκρασία ,επομένως ευνοείται η εξώθερμη αντίδραση άρα η Χ.Ι. μετατοπίζεται προς τα δεξιά.
Σωστό το ii.

ΘΕΜΑ 3ο

α.

i. Μεγαλύτερο σημείο ζέσεως εμφανίζει το CH_3COOH γιατί δημιουργεί περισσότερους δεσμούς υδρογόνου από την CH_3OH

ii. Ιοντικό υδατικό διάλυμα δημιουργεί το CH_3COOH ως ασθενές οξύ ενώ μοριακό η CH_3OH αφού είναι συσυγές οξύ της ισχυρής βάσης CH_3O^-

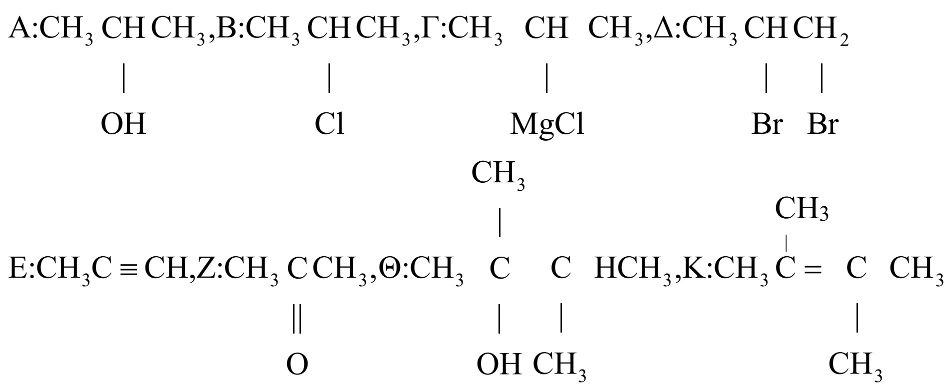
$$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$$

β. Με τη προσθήκη αερίου HCl παράγονται H_3O^+

$$HCl + H_2O \rightarrow Cl^- + H_3O^+$$

Αυξάνεται η $[H_3O^+]$ άρα και η ταχύτητα της αντίδρασης

γ.i.



ii. Η Α ως δευτεροταγής αλκοόλη αποχρωματίζει το όξινο διάλυμα $KMnO_4$ σε αντίθεση με την Θ που είναι τριτοταγής δ. i

Λ Μ

$C_vH_{2v+1}COOH + C_3H_7OH \rightleftharpoons C_vH_{2v+1}COO\ C_3H_7 + H_2O$

Για τον εστέρα Μ έχουμε:

$M_r=116 \Leftrightarrow 14v+88=116 \Leftrightarrow 14v=28 \Leftrightarrow v=2$ άρα

$$\Lambda : CH_3CH_2COOH, M : CH_3CH_2COO\ \underset{\displaystyle CH_3}{\overset{}{\underset{|}{CH}}}\ CH_3$$

ii. $CH_3CH_2COOH + C_3H_7OH \rightleftharpoons CH_3CH_2COO\ C_3H_7 + H_2O$

1	1	-	-
-x	-x	x	x
1-x	1-x	x	x

$$.K_C = \frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1-x}{2}} \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{1} = 0{,}666$$

iii.

$$.\bar{\upsilon} = \frac{\Delta[H_2O]}{\Delta t} = \frac{\frac{\frac{2}{3}-0}{2}}{2} = \frac{1}{6}\,M/min$$

iv. Η K_C της αντίδρασης είναι 4.

Έστω ότι προσθέτουμε xmol CH_3CH_2COOH και xmol H_2O

Ισχύει

$$Q_C = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)} \Leftrightarrow Q_C = \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}$$

- Έστω $K_C=Q_C=4$

$$4=\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}=2\Leftrightarrow\frac{2}{3}+x=\frac{2}{3}+2x\Leftrightarrow 1=2$$

Απορρίπτεται

- Έστω $Q_C>4$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}\succ 4\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}\succ 2\Leftrightarrow\frac{2}{3}+x\succ\frac{2}{3}+2x\Leftrightarrow 1\succ 2$$

Απορρίπτεται

- Έστω $Q_C<4$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}\prec 4\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{2}{3}+x\right)}{\left(\frac{1}{3}+x\right)}\prec 2\Leftrightarrow\frac{2}{3}+x\prec\frac{2}{3}+2x\Leftrightarrow 1\prec 2$$

Δεκτό

Επομένως $Q_C<K_C$, η Χ.Ι. μετατοπίζεται δεξιά

ΘΕΜΑ 4ο

α. Το HCl είναι ισχυρό οξύ επομένως ιοντίζεται πλήρως άρα $[H_3O^+]=1M$

Άρα pH=-log1=0

$$CH_3COONa \rightarrow CH_3COO^- + Na^+$$
$$1M \quad\quad 1M \quad\quad 1M$$
$$CH_3COO^- + H_2O \rightleftharpoons CH_3COOH + OH^-$$
$$1\text{-}x \quad\quad x \quad\quad x$$

Επιτρέπονται οι γνωστές προσεγγίσεις άρα ισχύει

$$K_b = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{K_w}{K_a} = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = \frac{x^2}{1} \Leftrightarrow x = 10^{-4,5}$$

Άρα $[OH^-]=10^{-4,5}$ άρα pOH=4,5 άρα pH=9,5

$$NH_4Cl \rightarrow NH_4^+ + Cl^-$$
$$1M \quad\quad 1M \quad\quad 1M$$
$$NH_4^+ + H_2O \rightleftharpoons NH_3 + H_3O^+$$
$$1\text{-}x \quad\quad x \quad\quad x$$

Επιτρέπονται οι γνωστές προσεγγίσεις άρα ισχύει:

$$K_a = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{K_w}{K_b} = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = \frac{x^2}{1} \Leftrightarrow x = 10^{-4,5}$$

Άρα $[H_3O^+]=10^{-4,5}$ άρα pH=4,5

β. Αραίωση, επομένως $C_1V_1=C_2V_2 \Leftrightarrow 1\cdot 0,2=C_2\cdot 1 \Leftrightarrow C_2=0,2M$

$$CH_3COONa \rightarrow CH_3COO^- + Na^+$$
$$0,2M \quad\quad 0,2M \quad\quad 0,2M$$
$$CH_3COO^- + H_2O \rightleftharpoons CH_3COOH + OH^-$$
$$0,2\text{-}x \quad\quad x \quad\quad x$$

Επιτρέπονται οι γνωστές προσεγγίσεις άρα ισχύει:

$$K_b = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{K_w}{K_a} = \frac{x^2}{C} \Leftrightarrow \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = \frac{x^2}{0,2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\cdot 10^{-5}$$

Άρα $[OH^-]=\sqrt{2}\cdot 10^{-5}M$

γ. Το CH_3COONa και το HCl αντιδρούν μεταξύ τους

$n_{CH3COONa}= C_{CH3COONa}\cdot V_{CH3COONa}= 0,2\cdot 0,1=0,02mol$

$n_{HCl}= C_{HCl}\cdot V_{HCl}= 1\cdot 0,04=0,04mol$

CH_3COONa	+ HCl →	CH_3COOH	+ $NaCl$
0,02	0,04	-	-
-0,02	-0,02	0,02	0,02
-	0,02	0,02	0,02

Έχουμε επίδραση κοινού ιόντος.

Το NaCl είναι ουδέτερο άλας και δεν επηρεάζει το pH του διαλύματος.

$$C_{HCl} = \frac{n}{V_{τελ.}} = \frac{0,02}{2} = 0,01M$$

$$C_{CH_3COOH} = \frac{n}{V_{τελ.}} = \frac{0,02}{2} = 0,01M$$

$$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$$
0,01M 0,01M 0,01M

$$CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O^+$$
0,01-x x 0,01 + x

Επιτρέπονται οι γνωστές προσεγγίσεις άρα ισχύει

$$K_a = \frac{x \cdot 0,01}{0,01} \Leftrightarrow 10^{-5} = x \Leftrightarrow x = 10^{-5}$$

$$\alpha = \frac{x}{C_{CH_3COOH}} = \frac{10^{-5}}{10^{-2}} = 10^{-3}$$

$[H_3O^+]$= 0,01 +10^{-5} άρα $[H_3O^+]$= 0,01 άρα pH=2

δ. Το CH_3COONa και το HCl αντιδρούν μεταξύ τους
$n_{CH3COONa}$= $C_{CH3COONa}\cdot V_{CH3COONa}$= 0,2·0,1=0,02mol
n_{HCl}= $C_{HCl}\cdot V_{HCl}$= 1·0,01=0,01mol

CH_3COONa	$+ HCl$	$\rightarrow$	CH_3COOH	$+$	$NaCl$
0,02	0,01		-		-
-0,01	-0,01		0,01		0,01
0,01	-		0,01		0,01

Έχουμε επίδραση κοινού ιόντος.
Το NaCl είναι ουδέτερο άλας και δεν επηρεάζει το pH του διαλύματος

$$C_{CH_3COOH} = \frac{n}{V_{τελ.}} = \frac{0,01}{2} = 0,005M$$

$$C_{CH_3COONa} = \frac{n}{V_{τελ.}} = \frac{0,01}{2} 0,005M$$

$$CH_3COONa \rightarrow CH_3COO^- + Na^+$$
0,005M 0,005M 0,005M

$$CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O^+$$
0,005-x 0,005 + x x

Επιτρέπονται οι γνωστές προσεγγίσεις άρα ισχύει

$$K_a = \frac{x \cdot 0,005}{0,005} \Leftrightarrow 10^{-5} = x \Leftrightarrow x = 10^{-5}$$

$[H_3O^+]= 10^{-5}$ άρα pH=5

i. Ισχύει ότι το χρώμα του διαλύματος είναι κόκκινο όταν
$pH < pK_{aHΔ}-1 \Leftrightarrow pH<5-1 \Leftrightarrow pH<4$

και κίτρινο όταν

$pH > pK_{aHΔ}+1 \Leftrightarrow pH>5+1 \Leftrightarrow pH > 6$

Το διάλυμα έχει pH =5 άρα το χρώμα είναι πορτοκαλί

ii.

$$\begin{array}{lllllll} H\Delta & + & H_2O & \rightleftharpoons & \Delta^- & + & H_3O^+ \\ C\text{-}x & & & & x & & 10^{-5} \end{array}$$

$$K_{aH\Delta} = \frac{\left[H_3O^+\right]\cdot\left[\Delta^-\right]}{\left[H\Delta\right]} \Leftrightarrow 10^{-5} = \frac{x\cdot 10^{-5}}{C\text{-}x} \Leftrightarrow$$

$$C - x = x \Leftrightarrow 2x = C$$

$$\alpha = \frac{x}{C} = \frac{x}{2x} = 0,5$$

Επιμέλεια: Καραδέμητρος Θεόδωρος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. δ
2. α
3. β
4. δ
5. γ
6. **α.** Σωστό

   β. Λάθος

   γ. Λάθος

   δ. Λάθος

   ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

1.

i. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$ 4η ομάδα
ή $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$ 10η ομάδα
ii. $_{40}Zr$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^2 5s^2$ 4η ομάδα
άρα το X 4η ομάδα και Z=22
iii. $2p \rightarrow 3e^-$ $3p \rightarrow 3e^-$

2. A→ i , B→ii

Στο δοχείο Α θα παράγονται περισσότερα mol H_2 αφού θα έχουμε περισσότερα g Fe
Στο δοχείο Β έχουμε λιγότερα g Fe άλλα μεγαλύτερη επιφάνεια επαφής άρα λιγότερα mol H_2 και μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με το δοχείο Α

3. **i.** Τα mol των αερίων καθώς η αντίδραση εξελίσσεται ελαττώνονται αφού: 1mol Α +1mol Β → 1mol Γ
άρα ο όγκος μειώνεται και το έμβολο μετατοπίζεται προς τα κάτω.
Σωστή απάντηση η α

ii. Όταν το έμβολο αναστραφεί η πίεση στο δοχείο μειώνεται αφού το έμβολο μετατοπίζεται προς τα κάτω λόγω του βάρους του, και ο όγκος του δοχείου αυξάνεται.
Σύμφωνα με την αρχή Le Chatelier η θέση της Χ.Ι. θα μετατοπισθεί προς τα περισσότερα mol αερίων άρα προς τα αριστερά
Σωστή απάντηση η α

4. **Α.** Σωστό το α

$$K_C = \frac{[N_2O_4]}{[NO_2]^2} \Leftrightarrow K_C = \frac{n_{N_2O_4} \cdot V}{n^2_{NO_2}}$$

Η μεταβολή του όγκου του δοχείου δεν επηρεάζει τη θέση της Χ.Ι. αφού δεν υπάρχουν αέριες ουσίες στα αντιδρώντα και προϊόντα.
Η προσθήκη $CHCl_3$ διπλάσιάζει τον όγκο του διαλύματος,επομένως από το πηλίκο αντίδρασης έχουμε

$Q_C = \frac{n_{N_2O_4} \cdot 2V}{n^2_{NO_2}}$, άρα $Q_C > K_C$ επομένως η θέση της Χ.Ι. μετατοπίζεται αριστερά

Β. Σωστό το γ
Με το διπλασιασμό του όγκου του διαλύματος η ωσμωτική πίεση γίνεται $Π_1/2$ ($Π \cdot V = n \cdot R \cdot T$).
Η ισορροπία μετατοπίζεται αριστερά με αποτέλεσμα να αυξάνονται τα mol των ουσιών που είναι διαλυμένες στο $CHCl_3$ (xmol N_2O_4 → 2xmol NO_2).Η μεταβολή δεν αναιρείται πλήρως επομένως θα ισχύει $Π_1/2 < Π_2 < Π_1$

5.**α.** $3CO + K_2Cr_2O_7 + 4H_2SO_4 \rightarrow 3CO_2 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 4H_2O$
β. $6FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7H_2SO_4 \rightarrow 3Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7H_2O$
γ. $10FeSO_4 + 2KMnO_4 + 8H_2SO_4 \rightarrow 5Fe_2(SO_4)_3 + 2MnSO_4 + K_2SO_4 + 8H_2O$
δ. $5CH_3CH_2OH + 4KMnO_4 + 6H_2SO_4 \rightarrow 5CH_3COOH + 4MnSO_4 + 2K_2SO_4 + 11H_2O$

ε. $3CH_3CH_2OH+K_2Cr_2O_7+4H_2SO_4 \rightarrow 3CH_3CHO+Cr_2(SO_4)_3+K_2SO_4+7H_2O$
στ. $3CH_3CH_2OH+2K_2Cr_2O_7+8H_2SO_4 \rightarrow 3CH_3COOH+2Cr_2(SO_4)_3+2K_2SO_4+11H_2O$

ΘΕΜΑ 3ο

α.i.ii.

$2NH_{3(g)}$	$+\ 3CuO_{(s)}$	$\rightarrow$	$N_{2(g)}$	$+\ 3Cu_{(s)}$	$+\ 3H_2O_{(g)}$
0,3	0,3		-	-	-
-0,2	-0,3		0,1	0,3	0,3
0,1	-		0,1	0,3	0,3

Η μέση ταχύτητα της αντίδρασης υπολογίζεται από τη μεταβολή της συγκέντρωσης ενός αερίου (η συγκέντρωση των στερεών παραμένει σταθερή)
Όταν η πίεση στο δοχείο σταθεροποιείται λαμβάνει τέλος και η αντίδραση

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{3}\frac{\Delta[H_2O]}{\Delta t} = \frac{1}{3}\frac{\frac{0,3}{2}-0}{100} = 5\cdot 10^{-4}\,M/s$$

β. Μετά τη ψύξη των αερίων απομακρύνονται οι υδρατμοί επομένως τα αέρια που συλλέγονται είναι το N_2 και η NH_3.

$N_{2(g)}$	$+\ 3H_{2(g)}$	$\rightleftharpoons$	$2NH_{3(g)}$
0,1	0,4		0,1
-x	-3x		2x
0,1-x	0,4-3x		0,1+2x

Οι ποσότητες της NH_3 και του H_2 είναι ισομοριακές άρα
$0,4-3x=0,1+2x \Leftrightarrow 5x=0,3 \Leftrightarrow x=0,06mol$

i. για την απόδοση της αντίδρασης χρησιμοποιώντας τα mol της NH_3 έχουμε
$\alpha = \frac{0,12}{0,2} = 0,6$ άρα η απόδοση είναι 60%

ii. $K_C = \frac{[NH_3]^2}{[N_2]\cdot[H_2]^3} = \frac{\left(\frac{0,1+2x}{1}\right)^2}{\left(\frac{0,1-x}{1}\right)\cdot\left(\frac{0,4-3x}{1}\right)^3} = \frac{0,22^2}{0,04\cdot 0,22^3} = \frac{10000}{88} = \frac{1250}{11}$

γ.

i. Πριν αυξήσουμε τη θερμοκρασία τα συνολικά mol των αερίων είναι:
n=0,1-x+0,4-3x+01,+2x=0,6-2x=0,6-0,12=0,48mol
Με την αύξηση της θερμοκρασίας τα συνολικά mol των αερίων αυξήθηκαν (0,5mol) άρα η Χ.Ι. μετατοπίσθηκε προς τα αριστερά, επίσης με την αύξηση της θερμοκρασίας ευνοείται η ενδόθερμη αντίδραση άρα ο σχηματισμός της NH_3 είναι εξώθερμη αντίδραση

ii.

$N_{2(g)}$ +	$3H_{2(g)}$	$\rightleftharpoons$ $2NH_{3(g)}$
0,04	0,22	0,22
y	3y	-2y
0,04+y	0,22+3y	0,22-2y

0,5=0,04+y+0,22+3y+0,22-2y⇔0,5-0,48=2y⇔y=0,01mol
για την απόδοση της αντίδρασης χρησιμοποιώντας τα mol της NH_3 έχουμε
$\alpha = \frac{2x - 2y}{0,2} = \frac{0,12 - 0,02}{0,2} = 0,5$ άρα η απόδοση είναι 50%

δ. Λαμβάνει χώρα η αντίδραση:

$$NH_3 + HCOOH \rightarrow HCOONH_4$$

Εφόσον υπάρχει πλήρης εξουδετέρωση το τελικό διάλυμα περιέχει μόνο $HCOONH_4$
Άρα:
$HCOONH_4 \rightarrow HCOO^- + NH_4^+$
$HCOO^- + H_2O \rightleftharpoons HCOOH + OH^-$
$NH_4^+ + H_2O \rightleftharpoons NH_3 + H_3O^+$

$$K_{bHCOO^-} = \frac{K_w}{K_{aHCOOH}} = \frac{10^{-14}}{10^{-4}} = 10^{-10}$$

$$K_{aNH_4^+} = \frac{K_w}{K_{bNH_3}} = \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = 10^{-9}$$

$K_{aNH_4^+} > K_{bHCOO^-}$ άρα $[H_3O^+]>[OH^-]$ επομένως τα διάλυμα είναι όξινο

ΘΕΜΑ 4ο

α. Γίνεται η αντίδραση $HA + NaOH \rightarrow NaA + H_2O$

Μετά τη πλήρη εξουδετέρωση στο διάλυμα υπάρχει μόνο άλας NaA.

Επειδή το διάλυμα είναι βασικό συμπεραίνουμε ότι το A^- αντιδρά με το H_2O

$$A^- + H_2O \rightleftharpoons HA + OH^-$$

Άρα το A^- είναι συζυγής βάση ασθενούς οξέος HA

β. Το HA είναι μονοπρωτικό οξύ και το NaOH μονοόξινη βάση.

Στην πλήρη εξουδετέρωσή τους έχουμε

i. $n_{HA}=n_{NaOH} \Leftrightarrow C_{HA}\cdot V_{HA}=C_{NaOH}\cdot V_{NaOH} \Leftrightarrow C\cdot 0,2=2\cdot 0,1 \Leftrightarrow C=1M$

Εφόσον ισχύουν οι προσεγγίσεις έχουμε

$$\left[H_3O^+\right]=\sqrt{K_a\cdot C} \Leftrightarrow \left[H_3O^+\right]=\sqrt{10^{-6}\cdot 1} \Leftrightarrow \left[H_3O^+\right]=10^{-3}$$

ii. Άρα pH=3

γ. Έστω V_1 ο όγκος του διαλύματος HA και V_2 ο όγκος του διαλύματος NaA

Βρίσκουμε τις νέες συγκεντρώσεις του HA και του NaA

$$C'_{HA} = \frac{C_{HA}\cdot V_1}{V_1+V_2} \Leftrightarrow C'_{HA} = \frac{1V_1}{V_1+V_2}M$$

$$C'_{NaA} = \frac{C_{NaA}\cdot V_2}{V_1+V_2} \Leftrightarrow C'_{NaA} = \frac{2V_2}{V_1+V_2}M$$

Εφόσον προκύπτει ρυθμιστικό έχουμε

$$\left[H_3O^+\right] = K_a \frac{C'_{HA}}{C'_{NaA}} \Leftrightarrow 10^{-6} = 10^{-6} \frac{\frac{V_1}{V_1+V_2}}{\frac{2V_2}{V_1+V_2}} \Leftrightarrow V_1 = 2V_2$$

Αναμειγνύουμε 200mL από το HA και 100mL από το NaA επομένως ο μέγιστος όγκος είναι 300mL

δ. Το NaOH αντιδρά με το HA του ρυθμιστικού διαλύματος
Βρίσκουμε τα mol του HA και του NaA που υπάρχουν στο Y_4
$n_{HA}=C_{HA}\cdot V_1=1\cdot 0,2=0,2mol$
$n_{NaA}=C_{NaA}\cdot V_2=2\cdot 0,1=0,2mol$

HA	+ NaOH	→	NaA	+ H_2O
0,2	0,1		0,2	
-0,1	-0,1		0,1	
0,1	-		0,3	

Στο τελικό διάλυμα υπάρχει HA και NaA, πρόκειται για ρυθμιστικό. Εφόσον ο τελικός όγκος είναι 1L οι συγκεντρώσεις του HA και του NaA είναι 0,1M και 0,3M αντίστοιχα.

i.

$$\left[OH^-\right] = K_b \frac{C'_{NaA}}{C'_{HA}} \Leftrightarrow \left[OH^-\right] = \frac{K_w}{K_a} \cdot \frac{C'_{NaA}}{C'_{HA}} \Leftrightarrow \left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{10^{-6}} \cdot \frac{0,3}{0,1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[OH^-\right] = 3 \cdot 10^{-8}$$

$$\left[OH^-\right] \cdot \left[H_3O^+\right] = K_W \Leftrightarrow 3 \cdot 10^{-8} \cdot \left[H_3O^+\right] = 10^{-14} \Leftrightarrow \left[H_3O^+\right] = \frac{10^{-6}}{3} M$$

ii. Τα υδροξύλια προκύπτουν από τον ιοντισμό του A^- άρα:

$$\alpha_{A^-} = \frac{\left[OH^-\right]}{C_{A^-}} \Leftrightarrow \alpha_{A^-} = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{0,3} \Leftrightarrow \alpha_{A^-} = 10^{-7}$$

Επιμέλεια: Καραδέμπτρος Θεόδωρος

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. α

Α2. α

Α3. β
Α4. δ
Α5. β

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.
α) Το γράφημα Β.
β) Στην αυτοκατάλυση η ταχύτητα της αντίδρασης είναι αρχικά πολύ μικρή. Στη συνέχεια καθώς σχηματίζεται επαρκής ποσότητα Mn^{2+} ($MnSO_4$) που λειτουργεί ως καταλύτης η αντίδραση επιταχύνεται με αποτέλεσμα ο ρυθμός παραγωγής του CO_2 να αυξάνεται. Στο τέλος της αντίδρασης η ταχύτητα μειώνεται λόγω εξάντλησης των αντιδρώντων.

Β2.

α)

$$K_c = \frac{[Cr_2O_7{}^{2-}]}{[CrO_4{}^{2-}]^2 \cdot [H_3O^+]^2}$$

β)
i. Ο ιοντισμός του HCl παράγει ιόντα H_3O^+ και επομένως σύμφωνα με την αρχή Le Châtelier η ισορροπία μετατοπίζεται προς τα δεξιά. Άρα η $[Cr_2O_7^{2-}]$ αυξάνεται.
ii. Με την αντίδραση που δίνεται τα ιόντα Zn^{2+} απομακρύνουν τα ιόντα CrO_4^{2-} από την αρχική ισορροπία η οποία για το λόγο αυτό μετατοπίζεται προς τα αριστερά.
iii. Το NaOH διίσταται και παρέχει OH^- τα οποία αντιδρούν με τα H_3O^+:
$H_3O^+(aq) + OH^-(aq) \rightleftharpoons 2H_2O(\ell)$. Η μείωση της $[H_3O^+]$ οδηγεί την αρχική ισορροπία προς τα αριστερά με αποτέλεσμα η $[Cr_2O_7^{2-}]$ να μειώνεται.

Β3.

α) Β: $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$ Δ: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6 4s^2$. Ε: $1s^2\ 2s^2\ 2p^5$

β) Δ < Γ < Β < Α < Ε (Εξηγώ με βάση τη θέση των στοιχείων στον περιοδικό πίνακα και τη μεταβολή της ενέργειας πρώτου ιοντισμού σε μία περίοδο και σε μία ομάδα)

γ) Πρόκειται για ισοηλεκτρονιακά ιόντα. Το ιόν με το μεγαλύτερο ατομικό αριθμό θα έχει και τη μικρότερη ακτίνα λόγω της αυξημένης ελκτικής δύναμης του πυρήνα στα e σθένους. Συνεπώς, $B^{3+} < E^- < A^{2-}$.

Β4.

α) Επιλογή 1.

β) Η εισαγωγή της ομάδας –CN που παρουσιάζει ισχυρό –I επαγωγικό φαινόμενο έχει ως αποτέλεσμα την έλξη των ηλεκτρονίων των ομοιοπολικών δεσμών προς το μέρος της. Τελικά, ο δεσμός O–H εξασθενίζει και το οξύ γίνεται ισχυρότερο.

γ) Η σειρά ισχύος των οξέων αυτών είναι: $H_2O < H_2S < H_2Se < H_2Te$ καθώς σε μία ομάδα του περιοδικού πίνακα ο όξινος χαρακτήρας των ενώσεων με το Η (δυαδικές ενώσεις) αυξάνεται όσο πηγαίνουμε προς τα κάτω, δηλαδή ακολουθεί τη σειρά αύξησης της ατομικής ακτίνας. Έτσι, προς τα κάτω η σταθερά Ka αυξάνεται και η σταθερά pKa = –logKa μειώνεται.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1.

α)

i) Με βάση την απόδοση της αντίδρασης βρίσκω ότι καταναλώθηκαν 4 mol PCl5 και παράχθηκαν 4 mol PCl3 και 4 mol Cl2.

Προκύπτει ότι Kc = 8.

ii) Με βάση τους νόμους Θερμοχημείας βρίσκω ότι ΔΗ = 125 kcal και στοιχειομετρικά βρίσκω ότι απορροφώνται 500 kcal.

β) Με βάση την αρχή Le Chatelier, η Θ.Χ.Ι θα μετατοπισθεί προς τα δεξιά και στη νέα ισορροπία θα έχουμε 6 mol Cl2. Φτιάχνω πίνακα με mol και από την Kc βρίσκω ότι πρέπει να προστεθούν 3,25 mol PCl5.

Η νέα απόδοση θα είναι α = 24/33.

γ) Υποθέτω ότι έστω Qc > Kc. Προκύπτει άτοπο και τελικά βρίσκω ότι Qc < Kc. Άρα η θέση ισορροπίας θα μετατοπισθεί προς τα δεξιά.

Γ2.

α) Αφού η αντίδραση είναι μονόδρομη και περισσεύει Α στο τέλος, τότε το Β εξαντλείται. Αντέδρασαν 0,4 mol A με 0,2 mol B. Άρα ω = 0,2 mol.

β) $υ_E = 5 \cdot 10^{-3}\ M \cdot s^{-1}$, $υ = 2,5 \cdot 10^{-3}\ M \cdot s^{-1}$.

γ) $q_1 > q_2$. Με την πάροδο του χρόνου η ταχύτητα της αντίδρασης μειώνεται και επομένως ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας μειώνεται επίσης.

Γ3.

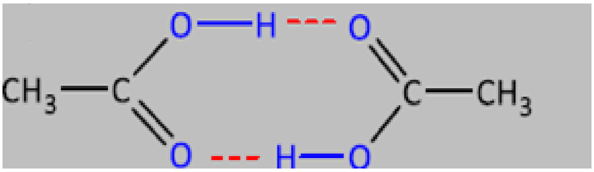
α) Βρίσκω από την K_b του ClO^- ότι για pH = 10 το c_{max} = 0,03 M.

β) $[Na+]$ = 0,06 M, $[Cl^-]$ = 0,03 M, $[ClO^-]$= 0,03 M, $[OH^-]$ = 10^{-4} M, $[H_3O^+]$ = 10^{-10} M.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

α)



β) $2CH_3COOH_{(CCl4)} \rightleftharpoons (CH_3COOH)_{2(CCl4)}$ (1)

	$2CH_3COOH_{(CCl4)}$	$(CH_3COOH)_{2(CCl4)}$
ΑΡΧ.	0,04 mol	
ΑΝΤ.	2x mol	
ΠΑΡ.		x mol
Χ.Ι	0,04 - 2x mol	x mol

Αρχικά mol CH_3COOH: n = m/Mr = 2,4/60 = 0,04 mol
Από την εξίσωση Van't Hoff: ΠV = n_{XI}RT στη Χ.Ι βρίσκω ότι n_{XI} = 0,03 mol.

Συνεπώς:
n_{XI} = 0,04 – x = 0,03 mol και x = 0,01 mol.

α = ποσότητα $(CH_3COOH)_2$ που παράχθηκε από την αμφίδρομη αντίδραση
x 100% ποσότητα $(CH_3COOH)_2$ που θα παραγόταν αν η αντίδραση ήταν μονόδρομη

α = 0,01 x 100/0,02 = **50%**

$K_c = [(CH_3COOH)_2]/[CH_3COOH]^2$ = **2,5**

γ) Αν αραιώσουμε το διάλυμα υπό σταθερή θερμοκρασία, το πηλίκο αντίδρασης Qc θα αυξηθεί (λόγω αύξησης του όγκου) και η θέση ισορροπίας θα μετατοπισθεί προς τα αριστερά με αποτέλεσμα τη μείωση της απόδοσης:

$2CH_3COOH_{(CCl4)} \rightleftharpoons (CH_3COOH)_{2(CCl4)}$ (1)

ΑΡΧ.	0,04 mol	
ΑΝΤ.	2y mol	
ΠΑΡ.		y mol
Ν.Χ.Ι	0,04 - 2y mol	y mol

α = 0,4 ή y/0,02 = 0,4. Άρα y = 0,008 mol. Η σταθερά ισορροπίας Kc έχει την ίδια τιμή στη Ν.Χ.Ι αφού η θερμοκρασία δεν αλλάζει:

$Kc = [(CH_3COOH)_2]'/[CH_3COOH]'^2 = 2,5$. Αντικαθιστώντας βρίσκω ότι
V' = 0,18 L = 180 mL. **Άρα πρέπει να προσθέσουμε 80 mL διαλύτη.**

Δ2.

α) Ο νόμος ταχύτητας θα έχει τη μορφή: $υ = k[NO]^x[O_3]^y$ όπου x η τάξη της αντίδρασης ως προς NO και y η τάξη της αντίδρασης ως προς O_3 :

$u_1/u_2 = k[NO]_1{}^x[O_3]_1{}^y$ / $k[NO]_2{}^x[O_3]_2{}^y$. Βρίσκω ότι y = 1

$u_2/u_3 = k[NO]_2{}^x[O_3]_2$ / $k[NO]_3{}^x[O_3]_3$. Βρίσκω ότι x = 1

Ο νόμος ταχύτητας θα είναι **$υ = k[NO][O_3]$.**

β) Αντικαθιστούμε τις τιμές του πειράματος 1 στο νόμο ταχύτητας και βρίσκουμε: **$k = 2,2 \cdot 10^7 M^{-1} \cdot s^{-1}$.**

Δ3.

α) αλκαλιμετρία, σιφώνιο, προχοΐδα,

β) Στο ισοδύναμο σημείο έχει αντιδράσει όλο το γαλακτικό οξύ:

$CH_3CH(OH)COOH + NaOH \rightarrow CH_3CH(OH)COONa + H_2O$

Στοιχειομετρικά ισχύει ότι $n_{οξ} = n_{βασ} = c_{βασ}V_{βασ} = 0,05 \times 0,012 = 6 \cdot 10^{-4}$ mol

$CH_3CH(OH)COOH + NaOH \rightarrow CH_3CH(OH)COONa + H_2O$

Στο τελικό διάλυμα θα έχω $CH_3CH(OH)COONa$ με $C_{άλατος} = n/V = 6 \cdot 10^{-4}$ mol/0,032L =3/160 M, που διίσταται πλήρως:

(M) $CH_3CH(OH)COONa \rightarrow CH_3CH(OH)COO^- + Na^+$

$C_{άλατος}$ δίνουν $C_{άλατος}$

Το ανιόν του γαλακτικού οξέος αντιδρά με το H_2O ως συζυγής βάση ασθενούς οξέος:

(M) $CH_3CH(OH)COO^- + H_2O \rightleftharpoons CH_3CH(OH)COOH + OH^-$

ΙΣΟΡ. $C_{άλατος} - x$ x x

Αφού στο ισοδύναμο σημείο έχω pH = 8, με βάση την καμπύλη ογκομέτρησης, τότε pOH = 6 και x = 10^{-6} M. Από την έκφραση της K_b βρίσκω και την τιμή της:

$K_b = [CH_3CH(OH)COOH][OH^-]/[CH_3CH(OH)COO^-]$.

Με βάση τις κατάλληλες προσεγγίσεις βρίσκω ότι $K_b = 16/3 \cdot 10^{-11}$ και $K_a = K_w/K_b =$ **$3/16 \cdot 10^{-3}$.**

γ) Τα mol του γαλακτικού οξέος με βάση την καμπύλη ογκομέτρησης είναι $n_{οξ} = n_{βασ} = 6 \cdot 10^{-4}$ mol.

Η μάζα του γαλακτικού οξέος θα είναι

$m = n \times Mr = 6 \cdot 10^{-4} \times 90 = 54 \times 10^{-3}$ g.

Στα 20 mL γάλατος περιέχονται 54×10^{-3} g

Στα 1000 mL γάλατος θα περιέχονται β = 2,7 g.

Άρα η περιεκτικότητα του γάλατος σε γαλακτικό οξύ είναι 2,7 g/L.

Η συγκέντρωση του γάλατος σε γαλακτικό οξύ θα είναι:

$C = n/V = 6 \cdot 10^{-4}$ mol / $20 \cdot 10^{-3}$L = $3 \cdot 10^{-2}$ M.

Άρα το γάλα είναι ακατάλληλο αφού η συγκέντρωση γαλακτικού οξέος έχει ξεπεράσει την επιτρεπτή τιμή (το γάλα έχει ξινίσει!!!).

δ)

i. Η αραίωση του διαλύματος θα οδηγήσει σε μείωση του pH στο ισοδύναμο σημείο αφού θα μειωθεί η συγκέντρωση του άλατος από την εξουδετέρωση του γαλακτικού οξέος. Δηλαδή στο ισοδύναμο σημείο θα ισχύει 7 < pH < 8. Ο καταλληλότερος δείκτης είναι η **ναφθολοφθαλεΐνη** διότι αφού η περιοχή

pH αλλαγής χρώματος είναι πιο κοντά στην τιμή pH στο ισοδύναμο σημείο.
ii. Στην έναρξη της ογκομέτρησης το χρώμα του δείκτη είναι **ροζ** αφού το pH < 7 (το ογκομετρούμενο διάλυμα περιέχει το γαλακτικό οξύ). Στο τελικό σημείο το χρώμα του δείκτη αλλάζει απότομα από ροζ σε **πράσινο.**

Επιμέλεια: Νικολάκης Βλαδίμηρος

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. β

Α2. δ

Α3. δ

Α4. γ

Α5. β

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

α) 1

β) Το Se έχει μεγαλύτερη ακτίνα από το S, γιατί το Se βρίσκεται πιο κάτω στον Π.Π. Η ισχύς του δεσμού H-Se εξασθενεί και αποσπάται ευκολότερα το H^+.

γ) Το H_2Se έχει ισχυρότερες διαμοριακές δυνάμεις διασποράς από το H_2S λόγω μεγαλύτερης τιμής Mr

Β2.

α) Η απόδοση της αντίδρασης αυξάνεται με τη μείωση της θερμοκρασίας, συνεπώς πρόκειται για εξώθερμη αντίδραση με βάση την αρχή Le Chatelier.

β) Για την αύξηση της ταχύτητας και τη μείωση του χρόνου αποκατάστασης Χ.Ι.

γ) Για την αύξηση της ταχύτητας και τη μείωση του χρόνου αποκατάστασης Χ.Ι αλλά και για τη μετατόπιση της ισορροπίας προς τα δεξιά (αρχή Le Chatelier) ώστε να αυξηθεί η απόδοση.

δ) Η χρήση καταλύτη μειώνει το χρόνο αποκατάστασης Χ.Ι και αποτρέπει τη χρήση πιο υψηλής θερμοκρασίας που μειώνει την απόδοση.

Β3.

α) Sc^{2+} : [Ar] Zn^{2+} : $[Ar]3d^{10}$

β) Μεγαλύτερη E_{i1} έχει το He αφού είναι δεξιότερα και πιο πάνω στον Π.Π ενώ μεγαλύτερη E_{i2} έχει το He γιατί το κατιόν του έχει σταθερή δομή ευγενούς αερίου.

γ) F, Ne, Na (με βάση τη μεταβολή ατομικής ακτίνας στον Π.Π)

δ) C αφού με αποβολή τεσσάρων e αποκτά σταθερή δομή He και Ei4 << Ei5

Β4.

α) 3

β) $C_{17}H_{33}COO^- + H_2O \rightleftharpoons C_{17}H_{33}COOH + OH^-$

Η αντίδραση του καρβοξυλικού ανιόντος με το H_2O μετατοπίζεται προς τα αριστερά όταν έχω υψηλή $[OH^-]$ και αυξάνεται το ποσοστό της ιοντικής μορφής και της καθαριστικής δράσης:

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1.

α. Στοιχειομετρικά βρίσκω ότι από την πρώτη αντίδραση καταναλώθηκαν 0,3 mol Cu ενώ από τη δεύτερη 0,1 mol. Συνολικά 0,4 mol.

β. Από το pH βρίσκω την τελική συγκέντρωση HNO_3 ίση με 0,1 M που αντιστοιχεί σε 0,05 mol.

Υπολογίζω στοιχειομετρικά τα mol HNO_3 που καταναλώθηκαν.

Συνολικά καταναλώθηκαν 1,2 mol. Συνεπώς, στο αρχικό διάλυμα υπήρχαν 1,2 + 0,05 = 1,25 mol οξέος και η αρχική συγκέντρωση ήταν

c = n/V = 1,25/0,5 = 2,5 M.

γ.

i. Βρίσκω Qc = 95/60 < Kc και συνεπώς η αντίδραση εξελίσσεται προς τα δεξιά.

ii. Φτιάχνω πίνακα με ποσότητες και βρίσκω ότι στη Χ.Ι έχω 0,1 mol NO_2, 0,3 mol NO και 1

Γ2.

α) Η ταχύτητα της αντίδρασης μειώνεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου λόγω μείωσης συγκέντρωσης αντιδρώντων. Συνεπώς, στα 10 min θα παραχθεί συγκέντρωση Mn^{2+} μεγαλύτερη από το μισό της συνολικής.

β) $u(Fe^{2+}) = 5u(Mn^{2+}) = 5\Delta[Mn^{2+}]/\Delta t = 15.10^{-4}$ M/min.

γ) Στοιχειομετρικά βρίσκω ότι αντέδρασαν 15.10^{-3} M Fe^{2+} που αντιστοιχούν σε 3.10^{-3} mol Fe^{2+} ή σε 168.10^{-3} g (168 mg).

Γ3.

α) Η θερμοκρασία του διαλύματος συνεχώς αυξάνεται καθώς μεγαλύτερο ποσοστό οξέος εξουδετερώνεται από τη βάση (η εξουδετέρωση οξέος-βάσεως είναι εξώθερμη αντίδραση). Όταν έχει εξουδετερωθεί όλο το οξύ, η θερμοκρασία σταδιακά μειώνεται αφού έχει ολοκληρωθεί πλέον το εξώθερμο φαινόμενο.

β) Στο ισοδύναμο σημείο ισχύει στοιχειομετρικά

$n_{οξέος} = n_{βάσεως}$ ή $c_{οξ}.V_{οξ} = c_{βασ}.V_{βασ.}$ Βρίσκω ότι $c_{οξέος}$ = 0,6 M.

γ) Όταν αντιδρούν 0,03 mol HCl εκλύονται 1,71 kJ

Όταν αντιδρά 1 mol HCl εκλύεται Q = 57 kJ. Άρα ΔΗ = -57 kJ

δ) Γιατί το ασθενές οξύ πρέπει να απορροφήσει θερμότητα ώστε να ιοντισθεί και να δώσει H_3O^+ που θα εξουδετερωθούν με τα ανιόντα OH^- της βάσης.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

α) Με βάση τον ορισμό της ώσμωσης, περισσότερα μόρια νερού θα εισέλθουν στο διαμέρισμα Ι.

β) Έστω V_1 και V_2 οι όγκοι των δύο διαλυμάτων μετά την εξίσωση των συγκεντρώσεων (c η κοινή συγκέντρωση). $V_1 + V_2 = 1$ L (1)

Για τη γλυκόζη: $n_{αρχ} = n_{τελ}$ και άρα: $1{,}2 \cdot 0{,}5 = c \cdot V_1$ (2)

Για τη σακχαρόζη: $n_{αρχ} = n_{τελ}$ και άρα: $0{,}8 \cdot 0{,}5 = c \cdot V_2$ (3)

Από τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει $V_1/V_2 = 3/2$ (4)

Τέλος, από τις εξισώσεις (1) και (4): $V_1 = 600$ mL και $V_2 = 400$ mL.

γ) Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η κοινή συγκέντρωση των δύο διαλυμάτων θα είναι: c = 1 M. Μετά το πέρας της υδρόλυσης της σακχαρόζης το διάλυμα θα περιέχει: [Γ] = 1 M και [Φ] = 1 M (συνολική συγκέντρωση 2 M). Έτσι, το διάλυμα αυτό θα είναι υπερτονικό σε σχέση με το διάλυμα στο διαμέρισμα Ι και η ροή του νερού θα είναι τώρα από το διαμέρισμα Ι προς το διαμέρισμα ΙΙ με στόχο πάλι την εξίσωση των συγκεντρώσεων και τα διαλύματα να γίνουν ισοτονικα. Έστω V1΄ και V2΄ οι όγκοι στα διαμερίσματα Ι και ΙΙ, αντίστοιχα. Ισχύει: $V_1' + V_2' = 1$ (5)

Στο διαμέρισμα υπάρχουν 0,6 mol γλυκόζης σε συγκέντρωση $0{,}6/V_1'$, ενώ η συνολική συγκέντρωση των δύο διαλυμένων ουσιών στο διαμέρισμα ΙΙ θα είναι: $(0{,}4 + 0{,}4)/V_2' = 0{,}8/V_2'$.

Έτσι, θα πρέπει: $0{,}6/V_1' = 0{,}8/V_2'$, $4V_1' = 3/V_2'$ (6).

Από τις σχέσεις (5) και (6): $V_1' = 4/7$ L, $V_2' = 3/7$ L.

Δ2.

α) Με βάση τους νόμους Θερμοχημείας βρίσκω ότι ΔH = -29 kcal. Από την απόδοση της αντίδρασης βρίσκω ότι αντέδρασαν 3,2 mol προπενίου και εκλύθηκαν 92,8 kcal θερμότητας με βάση τη στοιχειομετρία της αντίδρασης.

β) Υπολογίζω τη σταθερά Kc = 25. Από την απόδοση βρίσκω ότι αντέδρασαν 3,6 mol προπενίου και από τη σταθερά Kc βρίσκω ότι προστέθηκαν 2,4 mol H_2 επιπλέον στο μίγμα ισορροπίας.

Δ3.

α) Σχηματίζει δεσμούς υδρογόνου με τα μόρια του H_2O τόσο μέσω των τριών –OH όσο και μέσω της $-NH_2$.
β) Τα τρία –OH παρουσιάζουν –I επαγωγικό φαινόμενο και αποσύρουν

αρνητικό φορτίο από το άτομο του N με αποτέλεσμα αυτό να παρουσιάζει έλλειμμα ηλεκτρονίων. Έτσι προσλαμβάνει δυσκολότερα H^+ με αποτέλεσμα η αμίνη tris να είναι ασθενέστερη βάση από τη CH_3NH_2.

γ) Βρίσκω ότι πρέπει να περισσέψει η αμίνη από την αντίδραση εξουδετέρωσης με 12V mol HCl ώστε να σχηματισθεί ρυθμιστικό διάλυμα ANH_2 (0,3-12V mol) και ANH_3^+ (12V mol). Δουλεύοντας το ρυθμιστικό διάλυμα: $[OH^-] = K_b[ANH_2]/[ANH_3^+]$, βρίσκω ότι απαιτούνται
V = 0,02 L = 20 mL από το διάλυμα HCl.

Επιμέλεια: Νικολάκης Βλαδίμηρος

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. α

Α2. γ

Α3. γ

Α4. α

Α5. α

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

α) Επιλογή 4.

β) Στην αρχική ισορροπία (χρονική στιγμή t1) η ταχύτητα της αντίδρασης προς τα δεξιά είναι ίση

με την ταχύτητα της αντίδρασης προς τα αριστερά. Με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνονται και οι δύο ταχύτητες και προς τα δεξιά και προς τα αριστερά. Παράλληλα, η ισορροπία κατευθύνεται προς τα δεξιά λόγω της αρχής Le Châtelier και επομένως η υ1 θα πρέπει να αυξάνεται περισσότερο. Καθοδόν προς τη νέα ισορροπία η υ1 μειώνεται και η υ2 αυξάνεται ώστε στη νέα ισορροπία οι δύο ταχύτητες να γίνουν πάλι ίσες.

B2.

α)) Στάδιο 1: $NH_3(aq) + OCl^-(aq) \rightarrow NH_2Cl(aq) + OH^-(aq)$

Στάδιο 2: $NH_2Cl(aq) + NH_3(aq) \rightarrow N_2H_5^+(aq) + Cl^-(aq)$

Στάδιο 3: $N_2H_5^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow N_2H_4(aq) + H_2O(l)$

Συνολική: $2NH_3(aq) + OCl^-(aq) \rightarrow N_2H_4(aq) + Cl^-(aq) + H_2O(l)$

Ενδιάμεσα του μηχανισμού: $NH_2Cl(aq)$, $OH^-(aq)$ και $N_2H_5^+(aq)$.

β) Το στάδιο 3. Το $N_2H_5^+$ παίζει το ρόλο του οξέος, το OH^- το ρόλο της βάσης, το N_2H_4 το ρόλο της συζυγούς βάσης του οξέος $N_2H_5^+$ και το H_2O το ρόλο του συζυγούς οξέος της βάσης OH^-.

γ) Ασθενέστερη. Το $-Cl$ εμφανίζει $-I$ επαγωγικό φαινόμενο και αποσύρει αρνητικό φορτίο μέσω του ομοιοπολικού δεσμού στο N που προσλαμβάνει δυσκολότερα H^+ και επομένως λειτουργεί ως

ασθενέστερη βάση κατά Brönsted – Lowry.

B3.

α) Επιλογή Α.

β) Ο ρυθμός παραγωγής του σώματος Γ είναι το άθροισμα των ρυθμών παραγωγής του στις δύο αντιδράσεις καθώς είναι προϊόν και στις δύο περιπτώσεις. Από την 1η αντίδραση προκύπτει το σώμα Γ με το ήμισυ του ρυθμού κατανάλωσης του A(g) και παράλληλα με το διπλάσιο ρυθμό κατανάλωσης του Δ(g).

B4.

α) Και στις τρεις περιπτώσεις στο ισοδύναμο σημείο έχουμε αποκλειστικά CH_3COONa του οποίου το ανιόν υδρολύεται.

β) i. $c_B > c_A > c_Γ$, ii. $pH_B < pH_A < pH_Γ$.

γ) $pH = pK_a$ (και στις 3 περιπτώσεις).

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Το διάγραμμα Α. Τη χρονική στιγμή t = 0 η τιμή του λόγου λ = [B] / [A]2 είναι ίση με τη σταθερά Kc της ισορροπίας. Τη χρονική στιγμή t1 η τιμή του λόγου λ αυξάνεται απότομα λόγω της αύξησης του όγκου. Στη συνέχεια λόγω της αρχής Le Châtelier η ισορροπία μετατοπίζεται προς τα αριστερά με αποτέλεσμα η [B] να μειώνεται και η [A] να αυξάνεται. Έτσι, ο λόγος λ μειώνεται μέχρι να αποκατασταθεί η νέα ισορροπία στην οποία αποκτάται η αρχική τιμή που είναι ίση με τη σταθερά Kc.

Γ2. Εφαρμόζουμε τους νόμους της θερμοχημείας και υπολογίζουμε ότι ΔΗο = -2960 kJ.

Γ3.
α) i. 0,25 mol, 2 mol και 0,5 mol. ii. α = 2/3. iii. Kc = 0,5.

β) Εξώθερμη (αρχή Le Châtelier), α = 0,5.

γ) Αύξηση της ταχύτητας και της απόδοσης με αύξηση πίεσης (μείωση όγκου) καθώς η ισορροπία οδεύει προς τα δεξιά.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.
α. i) [Ar]3d54s1 και ανήκει στην 4η περίοδο, d τομέα και 6η ομάδα.
ii) 6 μονήρη e και 12 e με ml = 0.

β. i) 1.040 kg, ii) 50.000 mol Fe2O3, 20.000 mol CO2, 10.000 mol CO, 10.000 mol Al2O3.

Δ2.
α. C2 = 0,015 M
β. Kα2 = 0,01
γ. Kc = 20

δ. Προς τα δεξιά (στο ασθενέστερο οξύ και βάση). Εξηγούμε με βάση το -I επαγωγικό φαινόμενο των ατόμων οξυγόνου.

Επιμέλεια: Νικολάκης Βλαδίμηρος

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. α
2. β
3. α
4. δ
5. γ

ΘΕΜΑ 2ο

1.

α.

- $_6C$: $1s^2$ $2s^2$ $2p^2$
  Το στοιχείο Χ βρίσκεται στην 2η περίοδο, s τομέα και στην 14η ομάδα του Π.Π.
- $_7N$: $1s^2$ $2s^2$ $2p^3$
  Το στοιχείο N βρίσκεται στην 2η περίοδο, p τομέα και 15η ομάδα του Π.Π.
  - **i.** Κατά μήκος μιας περιόδου, η ατομική ακτίνα αυξάνεται από δεξιά προς τα αριστερά. Άρα, $r_C > r_N$.

ii. Πιο ηλεκτραρνητικό είναι το στοιχείο που προσλαμβάνει πιο εύκολα e δηλ. αυτό με το μεγαλύτερο ατομικό αριθμό, γιατί τότε είναι μεγαλύτερη η έλξη πυρήνα-e . Άρα, πιο ηλεκτραρνητικό είναι το N.

β.

HCN:

i. $H-C\equiv N$ Υπάρχουν δύο διαφορετικοί, πολωμένοι, ομοιοπολικοί δεσμοί, άρα στο μόριο υπάρχουν συνολικά δύο διπολικές ροπές με $\mu_{ολ}=\mu_1+\mu_2$.Επομένως το HCN είναι πολικό μόριο και έτσι διαλύεται σε πολικό διαλύτη δηλ. στο H2O.

ii. Στην αντίδραση $CN^- + H_2O \rightleftarrows HCN + OH^-$ η ισορροπία μετατοπίζεται προς τα αριστερά λόγω αύξησης $\left[OH^-\right]$, οπότε δεν ελευθερώνεται HCN που είναι δηλητήριο.

2.

1. Με αύξηση της θερμοκρασίας η Χ.Ι. μετατοπίζεται προς τα δεξιά, αφού εκλύεται περισσότερο αέριο. Συνεπώς, η αντίδραση διάσπασης είναι ενδόθερμη, αφού σύμφωνα με την αρχή του Le Chatelier, η αύξηση της θ ευνοεί την ενδόθερμη αντίδραση.

2.

i. Ισχύει ότι:

$$K_C = \left[CO_2\right] = σταθ. \Rightarrow \frac{n_{CO_2}}{V} = σταθ. \Rightarrow n_{CO_2}, V \text{ ανάλογα.}$$

$$P = \left[CO_2\right]\cdot R\cdot T = σταθ.$$

ii. $n_{CO_2}\uparrow \ \Rightarrow \alpha\uparrow$

iii. Ποσό θερμότητας που απορροφά το σύστημα $\uparrow$.

iv. $u = σταθ.$, αφού δεν υπάρχουν αέρια αντιδρώντα.

3.

3. Να τοποθετήσετε συντελεστές στις παρακάτω οξειδοαναγωγικές εξισώσεις:

α) $C + 2H_2SO_4 \xrightarrow{πυκνό-θερμό} CO_2 + 2SO_2 + 2H_2O$

β) $3P + 5HNO_3 + 2H_2O \rightarrow 3H_3PO_4 + 5NO$

γ) $10FeSO_4 + 2KMnO_4 + 8H_2SO_4 \rightarrow 5Fe_2(SO_4)_3 + 2MnSO_4 + K_2SO_4 + 8H_2O$

δ) $\mathbf{2CH_4 + 2NH_3 + 3O_2 \rightarrow 2HC \equiv N + 6H_2O}$

ε) $\mathbf{10}HCOONa + 4KMnO_4 + 11H_2SO_4 \rightarrow 10CO_2 + 4MnSO_4 + 2K_2SO_4 + 5Na_2SO_4 + 16H_2O$

4 β. θ<25°C

Στο μέσο της ογκομέτρησης V=15ml έχει εξουδετερωθεί η μισή ποσότητα του ογκομετρούμενου διαλύματος.

	HA	+ KOH	→ KA	+ H2O
αρχ.	n	n/2		
Αντ./παρ.	-n/2	-n/2	n/2	
Τελ.	n/2		n/2	

Τελικά δημιουργείται ρυθμιστικό διάλυμα HA-KA με Cοξ = Cβασ. Οπότε $[H_3O^+]=Ka=10^{-4}$

Στο Ι.Σ γίνεται πλήρης εξουδετέρωση και τελικά έχω μόνο το άλας KA.

	HA	+ KOH	→ KA	+ H_2O
αρχ.	n	n		
Αντ./παρ.	-n	-n	n	
Τελ.	-	-	n	

Για το KA : $C = \frac{n}{v} = \frac{0,2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 10^{-3}} = 0,1M$

$KA \rightarrow K^+ + A^-$

$A^- + H_2O \leftrightarrow HA + OH^-$

Τελ. 0,1-x x x

Kb $= \frac{x^2}{0,1} \Longrightarrow \frac{Kw}{Ka} = \frac{\frac{Kw^2}{[H3O+]^2}}{0,1} \Longrightarrow \frac{Kw}{10^{-4}} = \frac{Kw^2}{10^{-19}} \Longrightarrow Kw = 10^{-15} < 10^{-14}$, άρα η θερμοκρασία θ<25°C, αφού ο ιοντισμός είναι ενδόθερμο φαινόμενο.

ΘΕΜΑ 3ο

α.

- **Α:** $CH_3CH{=}CH_2$

- **Β:** $\begin{array}{l} CH_3\,\underset{\displaystyle |}{C}HCH_3 \\ \quad\;\; Cl \end{array}$

- **Γ:** $\begin{array}{l} CH_3\,\underset{\displaystyle |}{C}HCH_3 \\ \quad\;\; MgCl \end{array}$

- **Δ:** $\begin{array}{l} CH_3\,\underset{\displaystyle |}{C}HCH_2Cl \\ \quad\;\; Cl \end{array}$

- **Ε:** $CH_3C{\equiv}CH$

- **Ζ:** CH_3COCH_3

- **Θ:** $\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & CH_3 \\ & & | & & | \\ CH_3 & - & C & - & CH-CH_3 \\ & & | & & \\ & & OMgCl & & \end{array}$

- **Κ:** $\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & CH_3 \\ & & | & & | \\ CH_3 & - & C & - & CH-CH_3 \\ & & | & & \\ & & OH & & \end{array}$

β.

Μίγμα αποτελείται από δύο αλκοόλες και μια καρβονυλική ένωση, που έχουν στο μόριό τους τρία άτομα άνθρακα. Το μίγμα χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη.
α. Το α΄ μέρος για πλήρη οξείδωση του (χωρίς καταστροφή των ανθρακικών αλυσίδων) απαιτεί 480 mL οξινισμένου διαλύματος $KMnO_4$ 1 M.

β. Το β΄ μέρος αρχικά υδρογονώνεται καταλυτικά. Για την πλήρη οξείδωση του υδρογονωμένου μίγματος (χωρίς καταστροφή των ανθρακικών αλυσίδων) απαιτεί 640 mL οξινισμένου διαλύματος $KMnO_4$ 1 M
γ. Στο γ΄ μέρος προστίθεται I_2/NaOH οπότε σχηματίζονται 0,2 mol κίτρινου στερεού

Ποια η ποιοτική και ποια η ποσοτική σύσταση του αρχικού μίγματος;

Οι αλκοόλες είναι η $CH_3CH_2CH_2OH$ και η $CH_3\underset{\underset{OH}{|}}{C}HCH_3$

ενώ η καρβονυλική μπορεί να είναι η CH_3CH_2CHO ή CH_3COCH_3

Έστω ότι κάθε μέρος του μείγματος περιέχει x mol $CH_3CH_2CH_2OH$ και ψ mol $CH_3\underset{\underset{OH}{|}}{C}HCH_3$ και z mol καρβονυλικής.

Αν η καρβονυλική είναι αλδεΰδη οξειδώνεται και αυτή προς οξύ.

$5CH_3CH_2CH_2OH+4KMnO_4+6H_2SO_4 \rightarrow 5CH_3CH_2COOH+4MnSO_4+2K_2SO_4+11H_2O$
x mol 4x/5 mol

$5\,CH_3\underset{\underset{OH}{|}}{C}HCH_3 + 2KMnO_4 +3H_2SO_4 \rightarrow 5CH_3COCH3+2MnSO_4+K_2SO_4 +8H_2O$
ψ mol 2ψ/5 mol

$5CH_3CH_2CHO+2KMnO_4+3H_2SO_4 \rightarrow 5CH_3CH_2COOH+2MnSO_4+K_2SO_4+3H_2O$
zmol 2z/5mol

Για το α΄ μέρος απαιτούνται συνολικά
4x/5 + 2ψ/5 + 2z/5 = 0,48 mol ⟹2x + ψ + z=1,2 mol $KMnO_4$ (1)

Στο β΄ μέρος η αλδεΰδη με υδρογόνωση μετατρέπεται στην α΄ ταγή αλκοόλη $CH_3CH_2CH_2OH$, οπότε υπάρχουν συνολικά (x+z) mol $CH_3CH_2CH_2OH$.
Κάνοντας στοιχειομετρία στις αντιδράσεις οξείδωσης βρίσκουμε ότι απαιτούνται:
2(x+z) + ψ = 1,6 mol $KMnO_4$ (2)
Από (1) και (2) **z=0,2mol**, 2x+ψ=1mol
Στο γ΄ μέρος την ιωδοφορμική δίνει μόνο η β΄ ταγής αλκοόλη

$CH_3\underset{\underset{OH}{|}}{C}HCH_3 + 4I_2 + 6NaOH \rightarrow CHI_3 + CH_3COONa + 5NaI + 5H_2O$
ψmol ψmol

οπότε προκύπτει ότι **ψ=0,2mol** και **x=0,4mol**

Αν η καρβονυλική είναι κετόνη CH_3COCH_3 δεν οξειδώνεται, οπότε ισχύει 2x+ψ=1,2, ενώ με υδρογόνωση δίνει την β΄ ταγής αλκοόλη $\underset{\displaystyle OH}{CH_3\underset{|}{C}HCH_3}$

και 2x + ψ +z=1,6 επομένως τελικά z=0,4mol → **άτοπο επειδή η κετόνη δίνει την ιωδοφορμική οπότε θα παραγόταν τελικά 0,4mol ιζήματος.**

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

1.

(mol)	N_2	+	$3H_2$	$\rightleftarrows$	$2NH_3$	$\Delta H = -100kJ$
Αρχ.	4		10			
Αντ. /παρ.	$-x$		$-3x$		$2x$	
Χ.Ι.	$4-x$		$10-3x$		$2x$	

$$[NH_3]=[H_2] \Rightarrow \frac{2x}{V}=\frac{10-3x}{V} \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=2mol$$

$$n_{N_2}=4-2=2mol$$

$$n_{H_2}=10-6=4mol$$

$$n_{NH_3}=4mol$$

$$K_C=\frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3}=\frac{\left(\frac{4}{10}\right)^2}{\left(\frac{2}{10}\right)\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^3} \Rightarrow K_C=\frac{100}{8}=12,5$$

2.

$$\begin{array}{ccc} 2mol\ NH_3 & \longrightarrow & 100kJ \\ 4mol\ NH_3 & & y; \\ \hline & & y=200kJ \end{array}$$ ελευθερώνονται

3. $Y_1 : c_1=\frac{n_{NH_3}}{V}=\frac{4mol}{20L}=0,2M$

Το $-CH_3$ εμφανίζει $+I$ επαγωγικό φαινόμενο οπότε η CH_3NH_2 είναι πιο ισχυρή βάση από την NH_3, άρα

$$\left.\begin{aligned} K_{b_{CH_3NH_2}} &> K_{b_{NH_3}} \\ c_{CH_3NH_2} = c_{NH_3} &= 0,2M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{z^2}{c} > \frac{\omega^2}{c} \Rightarrow z > \omega \Rightarrow \text{ το διάλυμα της } CH_3NH_2$$

είναι πιο βασικό, άρα έχει μεγαλύτερη τιμή pH.

4.

i. Από την ογκομέτρηση προκύπτει ότι:

$C_{οξ}V_{οξ} = C_βV_β \Longrightarrow 100C_{οξ} = 0,4 \cdot 25 \Longrightarrow C_{οξ}=0,1M$

ii. Το διάλυμα Β προκύπτει από την αντίδραση:

HCl +	CH_3NH_2 →	CH_3NH_3Cl
n	n	
-n	-n	n
---	---	n

Επειδή αρχικά διαθέτουμε ισομοριακές ποσότητες το διάλυμα Β περιέχει μόνο CH_3NH_3Cl n= $0,5 \cdot 0,1 = 5 \cdot 10^{-2}$ mol και $C_A = 0,05/0,5 = 0,1M$

	CH_3NH_3Cl →	$CH_3NH_3^+ + Cl^-$
	0,1	0,1
	$CH_3NH_3^+ + H_2O$ ⇌	$CH_3NH_2 + H_3O^+$
Τελ.	0,1-x	x x

$Ka = Kw/Kb = x^2/0,1 \Longrightarrow x=\sqrt{5 \cdot 10^{-11}} = \sqrt{1/2}\, 10^{-5}M = 10^{-5}\sqrt{2}/2M$

iii. Στο Ι.Σ της ογκομέτρησης ισχύει ότι:

$$n_{οξ} = n_β = C \cdot V = 0,4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} mol$$

	CH_3NH_3Cl	+	$NaOH$	$\longrightarrow$	CH_3NH_2	+	$NaCl$	+	H_2O
Αρχ.	10^{-2}		10^{-2}						
Αντ./ παρ.	-10^{-2}		-10^{-2}		10^{-2}		10^{-2}		
Τελ.	---		---		10^{-2}		10^{-2}		

Το τελικό διάλυμα περιέχει:

CH_3NH_2 με $c = \dfrac{10^{-2} mol}{125 \cdot 10^{-3} L} = \dfrac{10}{125} = 0,08M$

	CH_3NH_2	+	H_2O	$\longrightarrow$	$CH_3NH_3^+$	+	OH^-
Τελ.	c-y				y		y

$$k_b = \frac{y^2}{c} \Rightarrow y = \sqrt{k_b \cdot c} = \sqrt{2\cdot 10^{-5}\cdot 8\cdot 10^{-2}} = 4\cdot 10^{-3,5}$$

Άρα: $\left[H_3O^+\right] = \dfrac{k_w}{\left[OH^-\right]} = \dfrac{10^{-14}}{4\cdot 10^{-3,5}} = \dfrac{1}{4}10^{-10,5}M$

Για τον δείκτη: $H\Delta + H_2O \rightleftarrows \Delta^- + H_3O^+$

$$k_\alpha = \frac{\left[\Delta^-\right]\left[H_3O^+\right]}{\left[H\Delta\right]} \frac{\left[H\Delta\right]}{\left[\Delta^-\right]} = \frac{\left[H_3O^+\right]}{k_\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\left[H\Delta\right]}{\left[\Delta^-\right]} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-10,5}}{10^{-5}} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-5,5}$$

5. Υπολογίζω mol και γράφω την αντίδραση που πραγματοποιείται

Για CH_3NH_3Cl n_1= 0,1·0,12=12·10^{-3}mol

Για NaOH n_2 = m/Mr = 0,4/40 = 10·10^{-3}mol

	CH_3NH_3Cl	+	NaOH	→	CH_3NH_2	+	NaCl
Αρχ.	12·10^{-3}		10·10^{-3}				
Αντ./παρ	-10·10^{-3}		-10·10^{-3}		10·10^{-3}		
Τελ.	2·10^{-3}		_		10·10^{-3}		

Το τελικό διάλυμα είναι ρυθμιστικό, αφού περιέχει ασθενής βάση και το άλας της (CH_3NH_2 – CH_3NH_3Cl) με συγκεντρώσεις:

$C_{βασ}$= 10·10^{-3}/120·10^{-3} =1/12M

$C_{οξ}$=2·10^{-3}/120·10^{-3}= 1/60M

Ισχύει: pOH = pKb + log$C_{οξ}$/$C_{βασ}$ = -log2·10^{-5} + log1/5= 5 – log2 + log0,2=4

Άρα pH= 14 – pOH =10

Υπολογίζω τελικές συγκεντρώσεις

Για το HCl: n=V/Vm=224/22400=0,01mol

C=n/V=0,01/0,08=1/8M

$CH_3NH_3Cl \rightarrow CH_3NH_3^+ + Cl^-$

0,1 0,1

$CH_3NH_3^+ + H_2O \rightleftharpoons CH_3NH_2 + H_3O^+$

Τελ. 0,1-z z z

$HCl + H_2O \rightarrow Cl^- + H_3O^+$
1/8 1/8

Στο διάλυμα Δ επικρατεί Ε.Κ.Ι, τα H_3O^+

Ισχύει : $Ka = Kw/Kb = \frac{[H3O+][CH3NH2]}{[CH3NH3+]} = \frac{(\frac{1}{8})\cdot z}{0,1} \Longrightarrow z = \frac{5\cdot10^{-11}}{\frac{1}{8}} = 4\cdot10^{-10}$

$\alpha = \frac{z}{0,1} = \frac{4\cdot10^{-10}}{0,1} = 4\cdot10^{-9}$

στ. Έστω V, L του διαλύματος Β ($CH_3NH_3^+Cl^-$) με $c_\beta = 0,1M$
και V_2 L του CH_3NH_2 $c = 0,1M$
Ανάμειξη διαλυμάτων, όπου οι δ, ο δεν αντιδρούν μεταξύ τους. υπολογίζω τελικές συγκεντρώσεις για $CH_3NH_3^+Cl^-$: $c_3 = \frac{0,1V_1}{V_1+V_2}$ και CH_3NH_2: $c_4 = \frac{0,1V_2}{V_1+V_2}$

Προκύπτει ρυθμιστικό διάλυμα:

$$pOH = pk_b + \log\frac{c_{o\xi}}{c_\beta} \Rightarrow 5 = pk_b + \log\frac{c_3}{c_4} \Rightarrow$$

$$\cancel{5} = -\log 2 + \cancel{5} + \log\frac{\cancel{0,1}V_1}{\cancel{0,1}V_2} \Rightarrow \log 2 = \log\frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = 2}$$

Επιμέλεια: Πατάκη Ζωή

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. δ
2. β
3. α
4. α

5. α

Β.

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό
στ. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

1.

α)

- H: $1s^1$
- O: $1s^2\ 2s^2\ 2p^4$
- S: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4$
- P: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^3$

β) Το S έχει 2 μονήρη e- ενώ ο P έχει 3 μονήρη e-.
Το S έχει συνολικά 6 p ατομικά τροχιακά με e-, το ίδιο και ο P.

γ) i) Η ενέργεια πρώτου ιοντισμού αυξάνεται από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος μιας περιόδου, άρα το στοιχείο Χ που βρίσκεται στην ίδια περίοδο με το Ο και έχει τη μεγαλύτερη $Ει_1$ έχει δομή: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$.

ii) Η ατομική ακτίνα αυξάνεται από δεξιά προς τα αριστερά κατά μήκος μιας περιόδου. Επομένως το στοιχείο Ψ, που βρίσκεται στην ίδια περίοδο με το S και έχει τη μικρότερη ατομική ακτίνα, έχει δομή: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$.

2. Επειδή στην κατάσταση Χ.Ι περιέχονται ισομοριακές ποσότητες των συστατικών ισχύει :
$[N_2O_4]=[NO_2]=1M$ σύμφωνα με το διάγραμμα.
Αρά $Kc=[NO_2]^2/[N_2O_4]=1M$
Τη στιγμή t1 ο παράγοντας που μεταβάλλουμε είναι ο όγκος του δοχείου. Δεν συμβαίνει μεταβολή της θερμοκρασίας, αφού παρατηρείται κατακόρυφο τμήμα, οπότε έχουμε απότομη μεταβολή συγκέντρωσης. Αν αφαιρέσουμε ποσότητα NO_2:

$$N_2O_{4(g)} \rightleftarrows 2NO_{2(g)},\ \Delta H > 0$$

	N_2O_4	NO_2
Π.Χ.Ι	1	1
Μεταβ.		-2/3

Αντ.παρ -x 2x
Ν.Χ.Ι 1-x 1/3+2x=1/2
1/3+2x=1/2⟹2x=1/6⟹x=1/12M

$Kc=[NO_2]^2/[N_2O_4]=\frac{1/4}{11/12}=3/11\neq 1$ άτοπο, αφού θ=σταθ.

Αν αυξήσουμε τον όγκο του δοχείου μειώνονται ταυτόχρονα οι συγκεντρώσεις, ενώ η Χ.Ι μετατοπίζεται προς τα περισσότερα mol αερίων.

3.

i) Σωστή απάντηση → β), επειδή ο όγκος υποδιπλασιάζεται, η πίεση του δοχείου αμέσως μετά θα διπλασιαστεί (P, V μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα).

ii) Σωστή απάντηση → β), επειδή μεταβάλλεται η πίεση και έχουμε μεταβολή των mol των αερίων, σύμφωνα με την αρχή LE CHATELIER, η χημική ισορροπία θα μετατοπιστεί προς την κατεύθυνση που τείνει να αναιρεθεί η αύξηση της πίεσης. Τελικά η τιμή της πίεσης θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική, αλλά όχι διπλάσια.

iii) Όταν $T_2 = 2T_1 \Rightarrow P_2 = 2P_0$, όμως στη νέα Χ.Ι. η πίεση είναι $30atm < 2P_0 = 40atm$, οπότε η Χ.Ι. μετατοπίστηκε προς τα λιγότερα mol αερίων δηλ. προς τα δεξιά⇒η προς τα δεξιά είναι ενδόθερμη⇒η αντίδραση διάσπασης είναι ενδόθερμη.

4. i)Αν το οξύ ήταν ισχυρό τότε στο Ι.Σ το pH=7, επειδή θα γινόταν πλήρη εξουδετέρωση και στο τελικό διάλυμα θα υπήρχε μόνο ΚΧ (ουδέτερο άλας). Άρα το οξύ ΗΧ είναι ασθενές.

ii) Όταν έχουν καταναλωθεί 20mL πρότυπου διαλύματος βρισκόμαστε στο μέσο της ογκομέτρησης, όπου έχει σχηματιστεί ρυθμιστικό διάλυμα με cοξ=cβασ, οπότε pH=pKa=4 δηλ. $Ka= 10^{-4}$

iii) Κατάλληλος είναι ο δείκτης που η περιοχή pH αλλαγής χρώματος του δείκτη περιλαμβάνει το pH στο Ι.Σ. Άρα κατάλληλος είναι ο δείκτης με pKa=8,8

5.

1. Έστω $\upsilon = k[A]^x \Rightarrow M\cdot s^{-1} = M\cdot s^{-1}\cdot M^x \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$, **2ης τάξης.**
2. Πολύπλοκη,

$2A \rightarrow \Gamma$ (αργή)
$B \rightarrow \Gamma$ (περίπλοκη)

3. $\upsilon = k[A]^2$

4. $V' = \frac{V}{2} \Rightarrow [A]' = 2[A] \rightarrow u' = k(2[A])^2 = 4k[A]^2 \Rightarrow u' = 4u$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

Α: $CH{\equiv}CH$ **Β:** $CH_3CH{=}O$
Γ: CH_3MgCl **Δ:** $CH_3\text{-}CH(OMgCl)\text{-}CH_3$
Ε: $CH_3\text{-}CH(OH)\text{-}CH_3$ **Ζ:** CH_3COONa
Η: CH_3I **Θ:** CH_3COOCH_3
Ι: CH_3COOH **Κ:** CH_3OH

Β.

- $CH{\equiv}CH + 2CuCl + 2NH_3 \rightarrow CuC{\equiv}CCu + 2NH_4Cl$
- $CH{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow{H2SO4 \ \ HgSO4} [CH2 = CHOH] \rightarrow CH_3CH{=}O$
- $CH_3CH{=}O + CH_3MgCl \rightarrow \underset{\displaystyle |\atop OMgCl}{CH_3CHCH_3}$
- $5CH_3OH + 6KMnO_4 + 9H_2SO_4 \rightarrow 5CO_2 + 6MnSO_4 + 3K_2SO_4 + 19H_2O$
- $CH_3OH + SOCl_2 \rightarrow CH_3Cl + SO_2 + HCl$

Γ. Αφού η ένωση αντιδρά με Na και δίνει και την αλογονοφορμική, είναι αλκοόλη, η CH_3CH_2OH ή η $\underset{\displaystyle |\atop OH}{CH_3CHCH_3}$

Κατά την οξείδωση της CH_3CH_2OH με οξινισμένο $K_2Cr_2O_7$

$3CH_3CH_2OH + 2K_2Cr_2O_7 + 8H_2SO_4 \rightarrow 3CH_3COOH + 2Cr_2(SO_4)_3 + 2K_2SO4 + 11H_2O$

Παρατηρούμε από την στοιχειομετρία ότι 3mol CH_3CH_2OH απαιτούν 2 mol $K_2Cr_2O_7$ άτοπο, άρα η αλκοόλη είναι η $\underset{\displaystyle |\atop OH}{CH_3CHCH_3}$.

Οι αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα και ταυτοποιούν την ένωση, είναι οι παρακάτω:

- $CH_3\underset{\substack{|\\ OH}}{C}HCH_3$ + $4I_2$ + $6NaOH$ → CHI_3 + CH_3COONa + $5NaI$ + $5H_2O$

- $CH_3\underset{\substack{|\\ OH}}{C}HCH_3$ + Na → $CH_3\underset{\substack{|\\ ONa}}{C}HCH_3$ + $1/2H_2$

- 3 $CH_3\underset{\substack{|\\ OH}}{C}HCH_3$ $+K_2Cr_2O_7+4H_2SO_4 \rightarrow 3CH_3COCH_3+Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 8H_2O$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

1. $u=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta[HC\ell]}{\Delta}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{c_\tau-c_\alpha}{\Delta t}\Rightarrow 0,125=\dfrac{1}{2}\dfrac{1-c_\tau}{2}\Rightarrow 1-c_\tau=0,5\Rightarrow c_\tau=0,5M$

$$\left.\begin{array}{l} u_0=k[HC\ell]^2_{\alpha\rho\chi} \\ u_1=k[HC\ell]^2_{\tau\varepsilon\lambda} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{u_1}{u_0}=\left(\frac{c_\tau}{c_\alpha}\right)^2\Rightarrow\frac{u_1}{u_0}=0,25$$

2. $n_{HC\ell_{\alpha\rho\chi}}=0,5mol$

$n_{HC\ell_{\tau\varepsilon\lambda}}=0,25mol$

Άρα αντέδρασαν $0,25mol$.

Σύμφωνα με τη στοιχειομετρία:

$$\begin{array}{ccc} 2mol\ HC\ell & \longrightarrow & 150kJ \\ 0,25mol\ HC\ell & & x; \end{array}$$

x=0,25·150/2=150/8Kj=18,75Kj ελευθερώνονται

3.

i. $n_{HC\ell'}=n_{HC\ell}=0,5mol\Rightarrow V_{H_2}=\sigma\tau\alpha\theta.$

ii. $c\downarrow\Rightarrow u_{\alpha\rho\chi}\downarrow$

Δ2.

α)

i) Για το διάλυμα Δ3:

$$\begin{array}{lcccc} & HCOONa & \rightarrow & HCOO^- & + & Na^+ \\ & C & & C & & C \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & HCOO^- & + & H_2O & \rightleftharpoons & HCOOH & + & OH^- \\ \text{τελ.} & C-x & & & & x & & x \end{array}$$

$K_b = K_w/K_a = 10^{-14}/10^{-4} = 10^{-10}$

$K_b = x^2/C = 10^{-10}/C \Longrightarrow C = 1M$ $(pH=9 \Longrightarrow pOH=5 \Longrightarrow [OH^-]=10^{-5}M)$

Για το Δ1:

$HCl + H_2O \longrightarrow Cl^- + H_3O^+$

1M 1M

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log 1 = 0$

Για το Δ2:

$$\begin{array}{lccccccc} & HCOOH & + & H_2O & \rightleftharpoons & HCOO^- & + & H_3O^+ \\ \text{Τελ.} & 1-\omega & & & & \omega & & \omega \end{array}$$

$K_a = \omega^2/C = \omega^2/1 \Longrightarrow \omega = 10^{-2}M$, $pH = -\log 10^{-2} = 2$

ii. Για HCl: $c = \dfrac{n_1}{V} \Rightarrow n_1 = c \cdot V \Rightarrow n_1 = 1 \cdot 0,1 = 0,1mol$

	H_2	+	Cl_2	$\rightleftarrows$	2HCl
Αρχ.	n		n		
Αντ./ παρ.	-x		-x		2x
Τελ.	n-x		n-x		2x=0,1

$$k_c = \frac{[HCl]^2}{[H_2][Cl_2]} \Rightarrow \left(\frac{\frac{2x}{\cancel{V}}}{\frac{n-x}{\cancel{V}}} \right)^2 = 2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{n-x} = 2 \Rightarrow \frac{0,1}{n-0,05} = 2 \Rightarrow$$

$n - 0,05 = 0,05 \Rightarrow \boxed{n = 0,1mol}$ $\alpha = 2x/2n = 0,1/0,2 = 0,5 \rightarrow 50\%$

β) Έστω ότι αναμιγνύουμε V_2L του Δ2 και V_3L του Δ3. Το διάλυμα Δ4, που προκύπτει, είναι ρυθμιστικό, ενώ οι συγκεντρώσεις των συστατικών του είναι:

- HCOOH: $C_4 = \dfrac{C2V2}{V\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{V2}{V\tau\varepsilon\lambda}M$
- HCOONa: $C_5 = \dfrac{C3V3}{V\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{V3}{V\tau\varepsilon\lambda}M$

Οι διαστάσεις και οι ιοντισμοί που λαμβάνουν χώρα είναι :

- $HCOONa \longrightarrow HCOO^- + Na^+$
- $HCOOH + H_2O \rightleftharpoons HCOO^- + H_3O^+$

Ισχύει η εξίσωση Henderson:

$pH = pKa + \log C_5/C_4 = -\log 10\text{-}4 + \log\frac{C5}{C4} = 4 + \log V_3/V_2 \Rightarrow \log V_3/V_2 = 0 \Rightarrow V_3/V_2 = 1$

- $C_4 = \frac{C2V2}{V\tau\varepsilon\lambda} = \frac{V2}{V\tau\varepsilon\lambda}M = \frac{V2}{2V2} = 0{,}5M$
- $C_5 = \frac{C3V3}{V\tau\varepsilon\lambda} = \frac{V3}{2V3}M = 0{,}5M$

γ) Το HCl αντιδρά με τη βάση του ρυθμιστικού διαλύματος δηλ. με το HCOONa. Υπολογίζω αρχικά mol:

- HCl: $n_1 = C_1V_1 = V_1 L$
- HCOOH: $n_2 = 0{,}5 \cdot 2 = 1mol$
- HCOONa: $n_3 = 0{,}5 \cdot 2 = 1mol$

	HCl	+	HCOONa	$\longrightarrow$	HCOOH	+	NaCl
Αρχ.	V_1		1		1		
Αντ./ παρ.	$-V_1$		$-V_1$		V_1		
Τελ.	---		$1-V_1$		$1+V_1$		

Επειδή προκύπτει πάλι ρυθμιστικό διάλυμα, αντιδρά όλο το HCl.

Υπολογίζω τελικές συγκεντρώσεις:

- HCOOH: $C_6 = \frac{1+V1}{V\tau\varepsilon\lambda}$
- HCOONa: $C_7 = \frac{1-V1}{V\tau\varepsilon\lambda}$

Ισχύει:

$[H_3O^+] = Ka\frac{C6}{C7} \Rightarrow 3 \cdot 10^{-4} = 10^{-4}\frac{1+V1}{1-V1} \Rightarrow 1 + V_1 = 3(1-V_1) \Rightarrow$
$1+V_1 = 3-3V_1 \Rightarrow 4V_1 = 2 \Rightarrow V_1 = 0{,}5L = 500ml$

δ) Για το διάλυμα της NH_3 ισχύει:

	NH_3	+	H_2O	$\longrightarrow$	NH_4^+	+	OH^-
Τελ.	1-x		$1-V_1$		$1+V_1$		

$$k_b = \frac{x^2}{c} = x^2 = 10^{-6}$$

$$\left(C\ pH = 11 \Rightarrow pOH = 3 \Rightarrow x = 10^{-3}M\right)$$

Ισχύει: $n_{NH_3} = n_{HCOOH} = C \cdot V = 1 \cdot V$, άρα εξουδετερώνονται πλήρως και το τελικό διάλυμα περιέχει μόνο $HCOONH_4$.

Στο Δ6:

- $HCOONH_4 \longrightarrow HCOO^- + NH_4^+$
- $HCOO^- + H_2O \rightleftarrows HCOOH + OH^-$
- $NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+$

$k_{b_{HCOO^-}} = \dfrac{k_w}{k_{\alpha_{HCOOH}}} = 10^{-10}$ και $k_{\alpha_{NH_4^+}} = \dfrac{k_w}{k_{b_{NH_3}}} = 10^{-8}$

Επομένως το διάλυμα Δ6 είναι όξινο.

Άρα $k_{\alpha_{NH_4^+}} > k_{b_{HCOO^-}}$.

<u>Επιμέλεια</u>: Πατάκη Ζωή

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. γ
2. α
3. δ
4. β
5. γ
6. γ
7. γ

Β.

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος

δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

1. Χ: $1s^2$ $2s^2$ $2p^6$ $3s^2$ $3p^5$
2. Ψ: $1s^2$ $2s^2$ $2p^6$ $3s^1$
3. Ζ: $1s^2$ $2s^2$ $2p^4$

Β.1.

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 \qquad \Delta H_1 = -390kJ$$

$$(\times 2) \qquad S + O_2 \rightarrow SO_2 \qquad \Delta H_2 = -460kJ$$

$$CS_2 + 3O_2 \rightarrow CO_2 + 2SO_2 \qquad \Delta H_3 = -430kJ$$

(με αντιστροφή)

$$CS_2 + 3O_2 \rightarrow CO_2 + 2SO_2 \qquad \Delta H_3 = -430kJ$$

Προσθέτω κατά μέλη

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cancel{CO_2} + 2\cancel{SO_2} \rightarrow CS_2 + 3\cancel{O_2} & -\Delta H_3 \\ 2S + 2\cancel{O_2} \rightarrow 2\cancel{SO_2} & 2\Delta H_2 \\ C + \cancel{O_2} \rightarrow \cancel{CO_2} & \Delta H_1 \end{array} \right.$$

$$C + 2S \rightarrow CS_2 \qquad \Delta H = -\Delta H_3 + 2\Delta H_2 + \Delta H_1$$

$$\Rightarrow \Delta H = 430 - 920 - 390$$

$$\Rightarrow \Delta H = -880kJ$$

2.i. Το μόριο του CS_2 εμφανίζει ευθύγραμμη διάταξη άρα $\mu_{ολ} = 0$. Συνεπώς είναι μη πολικό μόριο, άρα εμφανίζονται δυνάμεις LONDON.

ii. Ως μη πολικός διαλύτης ο CS2 θα διαλύει μη πολικά μόρια δηλ. το Br2 και το C8H18

Γ.

α. iii

β. Αιτιολόγηση: Με την αραίωση το pHτου ρυθμιστικού διαλύματος παραμένει σταθερό, οπότε $[H_3O^+]αρχ = [H_3O^+]τελ = x$

Αρχικά, για το CH_3COOH: $α_1 = x/C$ (1)

Τελικά, μετά την αραίωση: $α_2 = x/C΄$ (2)

Ισχύει: $CV=C΄2V \Rightarrow C΄ = C/2$

$(2)\Rightarrow α_2 = \frac{x}{\frac{C}{2}} = \frac{2x}{C} = 2α_1$

Δ.

i.α. β

Αιτιολόγηση: Κάνοντας το ενεργειακό διάγραμμα των δύο αντίθετων αντιδράσεων, παρατηρούμε ότι: Ea2 = Ea1 - |ΔΗ| = 58-27 = 31KJ/mol.

ii. Παρουσία καταλύτη η Εα μειώνεται κατά 10Kj, όμως η ενθαλπία της αντίδρασης παραμένει αμετάβλητη. Οπότε για την αντίστροφη αντίδραση ΔΗ΄=-27Kj, ενώ Ea2΄=Ea1΄-|ΔΗ|=48-27= 21kJ

Ε.

α)

	3A(g)	+	B(g)	$\longrightarrow$	Γ(g)	+	2Δ(g)
Αρχ.	C		C				
Αντ./ παρ.	- 3x		- x		x		2x
Τελ.	C-3x		C-x		x		2x

Από το πινακάκι παρατηρούμε ότι, όταν το σύστημα καταλήξει σε Χ.Ι, η [Α] είναι μικρότερη από την [Β], οπότε η καμπύλη (1) αναφέρεται στο Α και η καμπύλη (2) στο Β.

Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι

[Α]τελ = C-3x = 0,5M$\Longrightarrow$ 3x=1,5$\Longrightarrow$x=0,5M.

Άρα: [Γ]τελ = x = 0,5Mκαι [Δ]τελ = 2x =1M.

β) $υ = \frac{Δ[Γ]}{Δt} = \frac{0,5M}{50s} = 5\cdot10^{-2}M/s$

$υ_0 = k[A][B] = 4k$

$υ1=k[A]΄[B]΄=3k/4$

$υ_0/υ1=4k/(3k/4) \Longrightarrow υ0/υ1 = 16/3 \Longrightarrow υ1=(3/16)υ_0$

γ) Με την αύξηση της θερμοκρασίας, σύμφωνα με την αρχή Le Chatelier, ευνοείται η ενδόθερμη αντίδραση, οπότε η Χ.Ι θα μετατοπιστεί προς τ' αριστερά. Επομένως οι συγκεντρώσεις των Α και Β αυξάνονται, ενώ οι συγκεντρώσεις των Γ και Δ μειώνονται, άρα και η σταθερά Kc μειώνεται.

ΘΕΜΑ 3ο

Σε δοχείο σταθερού όγκου και θερμοκρασίας 27ο C εισάγουμε υδατικό διάλυμα Δ1: CH_3OH c_1 και υδατικό διάλυμα ουρίας Δ2: NH_2CONH_2 0,3M τα οποία διαχωρίζονται με ημιπερατή μεμβράνη . Στην αρχή η μεμβράνη χωρίζει το δοχείο σε δύο ίσα μέρη και στη συνέχεια παρατηρείται μετακίνηση της προς τη πλευρά της ουρίας, έτσι ώστε στην κατάσταση ισορροπίας τα δύο διαλύματα να εμφανίζουν αναλογία όγκων 3/5.

α) Το διάλυμα της CH_3OH είναι μοριακό, επειδή έχει Ka<Kw, οπότε δεν ιοντίζεται.

β) παρατηρείται μετακίνηση της μεμβράνης προς τη πλευρά της ουρίας, οπότε διάχυση περισσότερων μορίων H2O παρατηρείται προς το Δ1, άρα c1>c2. Στην κατάσταση ισορροπίας Π1΄=Π2΄ ⟹C1΄=C2΄⟹c1V/V1=c2V/V2⟹ c1/c2=V1/V2=5/3⟹ c1=0,5M

γ) $Π1=c_1RT = 0{,}5\cdot0{,}082\cdot300=12{,}3$ atm.

$Π2=c_2RT = 0{,}3\cdot0{,}082\cdot300=7{,}38$ atm

$Π1΄= Π2΄\Longrightarrow Π1΄= c1΄RT = (c_1V/V1)RT =0{,}5\cdot\frac{\frac{4}{5}v1}{v1}0{,}082\cdot300=9{,}84atm$

Για τον όγκο του δοχείου: Αρχικά: Vδοχείου=2V

Τελικά: Vδοχείου= V1 + V2 = V1 + 3/5 V1=8/5V1

Άρα: 2V= 8/5V1⟹ V = 4/5V1

δ)Πρέπει να ασκήσουμε στο υπερτονικό διάλυμα, ώστε να εμποδιστεί το φαινόμενο διάχυσης μορίων νερού σε αυτό. Ισχύει Πεξ=Π1-Π2= 12,3-7,38 = 4,92atm.

ε) Για την ουρία: n= C_2·V/2 = 0,3·5=1,5mol

$$4NH_3 + COCl_2 \rightarrow NH_2CONH_2 + 2NH_4Cl$$

Αρχ.	n_1	n2		
Αντ./παρ.	-n1	-n1/4	n1/4	
Τελ.	-	n_2-n_1/4	n_1/4	n_1/2

n_1/4=1,5mol⟹ n1=6mol

n_2-n_1/4 =n2 – 1,5

$$COCl_2 \leftrightharpoons CO + Cl_2 \quad ΔH = +100KJ$$

Αρχ. n3

Αντ./παρ. -x x x $100x=200 \Longrightarrow x=2mol$
X.I n3-x x x

$$Kc=\frac{\frac{x}{V}\frac{x}{V}}{\frac{n3-x}{V}}=4 \Longrightarrow \frac{2^2}{n3-2}=4 \Longrightarrow n3=3mol \Longrightarrow n2-1,5=3 \Longrightarrow n2=4,5mol$$

Επομένως το αρχικό μείγμα NH_3 και $COCl_2$ αποτελείται από 6 mol NH3 και 4,5 mol $COCl_2$.

στ)

Επειδή οι δύο ισορροπίες πραγματοποιούνται ταυτόχρονα, οι ποσότητες της CH3OH και του H2O είναι οι ίδιες και στις δύο ισορροπίες.

$n_{CH3OH}=0,5M \cdot 4L=2mol$

	HCOOH(l) +	CH3OH(l) ⇄	HCOOCH3(l) +	H2O(l)
Αρχ.	n1	2		
X.I	n1 – x	2-(x+z)	x	x+z

	CH3COOH(l) +	CH3OH(l) ⇄	CH3COOCH3(l) +	H2O(l)
Αρχ.	n2	2		
X.I	n2 – z	2-(x+z)	z	x+z

Όπου x=0,7mol, z=0,9mol

Για την 1η XI : $Kc=\frac{0,7.1,6}{(n1-0,7)0,4}=4 \Longrightarrow n1=1,4mol$

Για την 2η XI : $Kc=\frac{0,9.1,6}{(n2-0,9)0,4}=4 \Longrightarrow n2=1,8mol$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Η ένωση Γ είναι η μεθανόλη διότι είναι η μόνη αλκοόλη που οξειδώνεται προς CO_2. Η ένωση Θ είναι καρβοξυλικό οξύ με (ν+1) άτομα C ενώ η ένωση Μ είναι εστέρας με ν – 1 + ν = (2ν – 1) άτομα C.
Αφού οι Θ, Μ είναι ισομερείς: ν + 1 = 2ν – 1 → ν = 2. Οι ζητούμενοι συντακτικοί τύποι είναι:
Α: $CH_2=CH_2$ **Β:**CH_3Cl **Γ:** CH_3OH **Δ:** CH_3Ona **Ε:** $CH_3-O-CH_2CH_3$
Ζ: CH_3CH_2CN **Θ:** CH_3CH_2COOH **Κ:** CH_3CH_2OH
Λ: HCOONa **Μ:** $HCOOCH_2CH_3$

Β. α. Το ιόν CH_3COO^- είναι ισχυρότερη βάση από το ιόν $HCOO^-$. Το +I επαγωγικό φαινόμενο αυξάνει την ισχύ των βάσεων. Το CH_3- απωθεί ισχυρότερα ηλεκτρόνια, σε σχέση με το H-, με αποτέλεσμα να ενισχύει

το αρνητικό φορτίο του ιόντος οπότε θα είναι ευκολότερη η πρόληψη πρωτονίου.
Αφού τα διαλύματα έχουν την ίδια συγκέντρωση το διάλυμα της ισχυρότερης βάσης θα έχει μεγαλύτερη $[OH^-]$, άρα και μεγαλύτερη τιμή pH. Οπότε το Υ1 περιέχει το HCOONa και το Υ2 περιέχει το CH_3COONa.

β. Στα 10 mL καθενός διαλύματος περιέχονται $n = 0{,}2M \cdot 0{,}01L = 2 \cdot 10^{-3} mol$ άλατος. Το CH_3COONa δεν οξειδώνεται οπότε το Υ2 θα έχει το ερυθροϊώδες χρώμα του $KMnO_4$. Το HCOONa αντιδρά σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

$$10HCOONa + 4KMnO_4 + 11H_2SO_4 \rightarrow 10CO_2 + 4MnSO_4 + 2K_2SO_4 + 5Na_2SO_4 + 16H_2O$$

Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης προκύπτει ότι απαιτούνται $\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{10} = 8 \cdot 10^{-4} mol\, KMnO_4$.

Η ποσότητα του οξειδωτικού που προστέθηκε είναι $n = 0{,}1M \cdot 10^{-2} L = 10 \cdot 10^{-4} mol$.

Παρατηρούμε ότι το $KMnO_4$ βρίσκεται σε περίσσεια οπότε και το διάλυμα Υ1 θα έχει το ερυθροϊώδες χρώμα του $KMnO_4$.

γ. Αρχικά θα υπολογίσουμε τη σταθερά ιοντισμού του CH_3COOH. Στο διάλυμα Υ2 το άλας διίστανται και το ανιόν αντιδρά με το H_2O:

$$CH_3COO^- + H_2O \rightleftarrows CH_3COOH + OH^-$$
$$0{,}2 - x \quad x \quad x$$

Θεωρούμε ότι $0{,}2 - x \simeq 0{,}2$ και αφού $pH = 9 \rightarrow x = [OH^-] = 10^{-5} M$ οπότε:

$$K_{b(CH_3COO^-)} = \frac{(10^{-5})^2}{0{,}2} = 5 \cdot 10^{-10} \rightarrow K_{a(CH_3COOH)} = \frac{10^{-14}}{5 \cdot 10^{-10}} = 2 \cdot 10^{-5}$$

Στα 300 mL του Y_2 περιέχονται $n_2 = 0{,}2M \cdot 0{,}3L = 0{,}06 mol\ CH_3COONa$ και έστω n_3 mol η ποσότητα του HCl. Κατά την ανάμιξη των διαλυμάτων πραγματοποιείται η αντίδραση:

$$CH_3COONa + HCl \rightarrow CH_3COOH + NaCl$$

Για να προκύψει ρυθμιστικό διάλυμα πρέπει το CH_3COONa να βρίσκεται σε περίσσεια. Οπότε μετά την αντίδραση το Υ4 θα περιέχει n_3 mol CH_3COOH και $(0{,}6 - n_3)$ mol CH_3COONa.
Για το ρυθμιστικό διάλυμα Υ4 έχουμε:

$$[H_3O^+] = K_a \cdot \frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} \rightarrow 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} \rightarrow$$
$$[CH_3COOH] = 5[CH_3COO^-] \rightarrow$$
$$\rightarrow n_3 = 5(0{,}06 - n_3) \rightarrow 6n_3 = 0{,}3 \rightarrow n_3 = 0{,}05$$

Οπότε το διάλυμα Υ3 έχει συγκέντρωση $C_3 = \frac{0{,}05\text{mol}}{0{,}1\text{L}} = 0{,}5\text{M}$.

Επιμέλεια: Πατάκη Ζωή

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. (γ)
Α2. (γ)
Α3. (δ)
Α4. (γ)
Α5. (β)

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.
α) 1: CH_3CH_2OH, 2: C_6H_5OH, 3: CH_3COOH
β) προσθέτουμε μικρή ποσότητα όξινου διαλύματος υπερμαγγανικού καλίου, αν αποχρωματιστεί είναι η CH_3CH_2OH. Στη συνέχεια προσθέτουμε Na_2CO_3 και αν σχηματιστεί αέριο διοξείδιο του άνθρακα θα είναι το CH_3COOH

Β2.
(α) δεσμός υδρογόνου
(β) δυνάμεις διπόλου-διπόλου
(γ) δυνάμεις διασποράς.

Β3. $Fe_2O_3 + 3CO \rightarrow 2Fe + 3CO_2$ ΔΗ=-12 kJ/mol

Β4.

1. Το $CH_3 -$ παρουσιάζει +I επαγωγικό φαινόμενο, άρα αυξάνει την ηλεκτρονιακή πυκνότητα στο N και διευκολύνει την πρόσληψη H^+. Οπότε η CH_3NH_2 είναι ισχυρότερη βάση.
2. Επειδή έχουν την ίδια τιμή pH θα παράγονται ίσες συγκεντρώσεις OH^-. Όμως η NH_3 είναι ασθενέστερη βάση οπότε θα πρέπει να έχει μεγαλύτερη συγκέντρωση, το (β)

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1.

(A) CH_3CH_2Cl, **(B)** CH_3CH_2OH , **(Γ)** $CH_3CH = O$, **(Δ)** CH_3CH_2MgCl,

(E) $CH_3 - \underset{OH}{CH} - CH_2 - CH_3$, **(Z)** CH_3CH_2CN , **(Θ)** CH_3CH_2COOH ,

(K) $CH_3CH_2COO\,\underset{CH_3}{CH} - CH_2 - CH_3$, **(Λ)** CH_3CH_2COONa

Γ2. (α) έστω ότι περιέχει μόνο την ουσία A, τότε: $n_A = \frac{40}{80} = 0{,}5\, mol$

$\Pi = \frac{n_A RT}{V} = 1{,}5\, atm \neq 1{,}8\, atm$ άρα είναι νοθευμένο.

(β) έστω x mol A και y mol B.

$m_A + m_B = 40 \rightarrow 80x + 60y = 40\ (1)$

$n = \frac{\Pi V}{RT} = 0{,}6\, mol \rightarrow x + y = 0{,}6\ (2)$ Από (1), (2) βρίσκουμε: x=0,2 mol, y=0,4 mol

$m_B = 0{,}4 \cdot 60 = 24g$

40g 24g B

100g x x=60g 60% w/w

Γ_3. $[H\Delta] = 10^3[\Delta^-]$ έχει κόκκινο χρώμα

$pH = 2 \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2}M$ $\quad H\Delta + H_2O \rightleftharpoons \Delta^- + H_3O^+$

$K_{\alpha H\Delta} = \frac{[\Delta^-][H_3O^+]}{[H\Delta]} = 10^{-5}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. $C_1V_1 = C_2V_2 \longrightarrow C_2 = 0{,}5\ M$, $pH = 2{,}5 \longrightarrow [H_3O^+] = 10^{-2{,}5}M$

$CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O^+$

0,5-x x x $[H_3O^+] = x = 10^{-2,5}M$

$K_a = \frac{x^2}{0,5-x} = 2 \cdot 10^{-5}$

Δ2.

(α) 2 L του διαλύματος Υ2 περιέχουν: n=1 mol CH_3COOH

$2CH_3COOH + Na_2CO_3 \rightarrow 2CH_3COONa + CO_2 + H_2O$

1 mol 0,5 mol

$V_{CO_2} = 0,5 \cdot 22,4 = 11,2\ L$

3 L του διαλύματος Υ2 περιέχουν: n=1,5 mol CH_3COOH

mol	$2CH_3COOH$ +	Mg→	$(CH_3COO)_2Mg$	$+H_2$
Αρχικά	1,5	0,5	-	-
Αντιδ./παράγ.	-1	-0,5	0.5	0,5
τελικά	0,5	-	0,5	0,5

$V_{H_2} = 0,5 \cdot 22,4 = 11,2\ L$

(β) Υ3: $[CH_3COOH] = \frac{0,5}{3}\ M = [(CH_3COO)_2Mg]$

$(CH_3COO)_2Mg \rightarrow 2CH_3COO^- + Mg^{2+}$

$\frac{0,5}{3}\ M$ $\frac{1}{3}\ M$

$[H_3O^+] = K_a \frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = 10^{-5} \rightarrow pH = 5$

(γ) $pH = 4 \longrightarrow [H_3O^+] = 10^{-4}M$

(Υ1): έστω $V_1\ L \rightarrow$ n=$2V_1$ mol CH_3COOH,

(Υ2): έστω $V_2\ L \rightarrow$ n=$\frac{0,5}{3}V_2$ mol CH_3COOH και n=$\frac{0,5}{3}V_2$ mol $(CH_3COO)_2Mg$

$(CH_3COO)_2Mg \rightarrow 2CH_3COO^- + Mg^{2+}$

$\frac{0,5V_2}{3}\ M$ $\frac{V_2}{3}\ M$

$$[H_3O^+] = K_a \frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} \rightarrow 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5}\,\frac{\frac{2V_1+\frac{0,5}{3}V_2}{V_1+V_2}}{\frac{\frac{V_2}{3}}{V_1+V_2}} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$$

Δ3.

mol	$CO_{2(g)}$ +	$H_{2(g)} \rightleftharpoons$	$CO_{(g)}$ +	$H_2O_{(g)}$
Αρχικά	0,5	0,5	-	-
Αντιδ./παράγ.	-x	-x	x	x

Χ.Ι.	0,5-x	0,5-x	x	x

$\frac{x}{0,5} = 0,6 \rightarrow x = 0,3\, mol \qquad K_C = \frac{9}{4}$

Δ4. $n_{KMnO_4} = 0,16\, mol$

$5CO + 2KMnO_4 + 3H_2SO_4 \rightarrow 5CO_2 + 2MnSO_4 + K_2SO_4 + 3H_2O$

0,4 mol   0,16 mol

Αυξήθηκαν τα mol του CO, άρα η Χ.Ι. μετατοπίστηκε προς τα δεξιά.

mol	$CO_{2(g)}$ +	$H_{2(g)} \rightleftharpoons$	$CO_{(g)}$ +	$H_2O_{(g)}$
Αρχικά	0,2	0,2	0,3	0,3
Προσθέτ.	-	0,2	-	-
Αντιδ./παράγ.	-y	-y	+y	+y
Χ.Ι.	0,2-y	0,4-y	0,3+y	0,3+y

0,3+y=0,4 → $y = 0,1\, mol$

$K_C^{/} = \frac{16}{3} > K_C$ άρα με την μείωση της θερμοκρασίας ευνοείται η αντίδραση προς τα δεξιά και είναι εξώθερμη.

Επιμέλεια: Κορέλα Βασιλική

ΒΙΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1. δ.
2. γ.
3. δ.
4. β.
5. δ.

ΘΕΜΑ 2ο

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο: Σελ. 105.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο: Σελ. 137-138 και σελ. 139 «περί Bacillus thuringiensis και τοξίνης».

3. Ποιες ασθένειες παρουσιάζουν μεγάλη ετερογένεια στα συμπτώματά τους και που οφείλεται αυτή σε κάθε περίπτωση;

- α θαλασσαιμία: Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 97
- β θαλασσαιμία: Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 97
- αλφισμός: Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 98
- καρκίνος: Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 105

4. Στο ευκαρυωτικό κύτταρο ποια σύμπλοκα αποτελούνται από νουκλεϊκό οξύ και πρωτεΐνες και να αναφέρετε συνοπτικά ποιος είναι ο ρόλος τους.

- Νουκλεόσωμα: αποτελείται από 8 μόρια ιστονών γύρω από τα οποία τυλίγεται DNA μήκους 146 ζευγών βάσεων –πακετάρισμα πυρηνικού DNA.
- Ριβονουκλεοπρωτεϊνικά σωμάτια αποτελείται από snRNA και πρωτεΐνες - ένζυμα που συμμετέχουν στην ωρίμανση του πρόδρομου mRNA.
- Ριβόσωμα: Αποτελείται από rRNA και πρωτεΐνες-θέση μετάφρασης mRNA (ριβόζυμο).

ΘΕΜΑ 3ο

1. Επειδή είναι στη 12η βδομάδα κύησης μπορεί να γίνει λήψη εμβρυϊκών κυττάρων είτε με αμνιοπαρακέντηση είτε με λήψη χοριακών λαχνών. Θα προτιμηθεί η αμνιοπαρακέντηση γιατί μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερης ποιότητας καρυότυπο.
   Σύνδρομο φωνής της γάτας : οφείλεται σε δομική χρωμοσωμική ανωμαλία και συγκεκριμένα έλλειψη τμήματος του 5ου χρωμοσώματος .
   Άρα η σειρά των διαδικασιών θα είναι :
   - καλλιέργεια εμβρυϊκών κυττάρων.
   - Κατασκευή καρυοτύπου και μελέτη των ζωνών χρωστικής (πχ Giemsa) του 5ου χρωμοσώματος.

   Δρεπανοκυτταρική αναιμία : επειδή οφείλεται σε γονιδιακή μετάλλαξη και συγκεκριμένα αντικατάσταση μιας βάσης στο γονίδιο β που κωδικοποιεί τη β αλυσίδα της HbA αιμοσφαιρίνης. Άρα η μόνη διαδικασία μετά την αμνιοπαρακέντηση είναι ανάλυση DNA για την εύρεση του μεταλλαγμένου γονιδίου βs.

2. Για να διακρίνουμε εάν το γονίδιο είναι αυτοσωμικό ή φυλοσύνδετο θα διασταυρώσουμε θηλυκό με σγουρές τρίχες με αρσενικό με ίσιες.
   Θα δείξουμε τις διασταυρώσεις και στις δυο περιπτώσεις καθώς και τη Φ.Α στους απογόνους. Είναι ευδιάκριτο τότε ότι εάν το γονίδιο είναι φυλοσύνδετο η Φ.Α των αρσενικών διαφέρει από τη Φ.Α των θηλυκών ενώ στην περίπτωση που το γονίδιο είναι αυτοσωμικό αναμένεται ότι η Φ.Α αρσενικών απογόνων είναι ίδια με των θηλυκών

3. Σε ένα ηπατικό κύτταρο
   α) ποιες αλληλουχίες DNA δε μεταγράφονται:
   - Μη κωδικοποιούσες περιοχές μεταξύ των γονιδίων
   - Υποκινητές
   - Αλληλουχίες λήξης της μεταγραφής
   - Γονίδια πρωτεϊνών τα οποία δεν εκφράζονται στο συγκεκριμένο τύπο κυττάρου

   β) ποιες αλληλουχίες DNA μεταγράφονται αλλά δε μεταφράζονται:
   - Γονίδια που μεταγράφονται σε tRNA, rRNA, snRNA
   - 5’ και 3’ αμετάφραστες περιοχές
   - Εσώνια
   - Κωδικόνιο λήξης

4. Στο διπλοειδές κύτταρο : 54 χρωμοσώματα (27 ζεύγη) εκ των οποίων 52 αυτοσωμικά (26 ζεύγη) και 2 φυλετικά (1 ζεύγος)

	Ατόμου με αναστροφή στο 8ο χρωμόσωμα	Ατόμου με τρισωμία σε αυτοσωμικό χρωμόσωμα	Ατόμου με τρισωμία XXY	Ατόμου με μονοσωμία
Μόρια DNA στη μετάφαση	108	110	110	106
Αυτοσωμικά χρωμοσώματα	52	53	52	52
Ινίδια χρωματίνης στην G1	54	55	55	52
Ινίδια χρωματίνης των φυλετικών χρωμ/των μετά την αντιγραφή	4	4	6	2

ΘΕΜΑ 4ο

α.

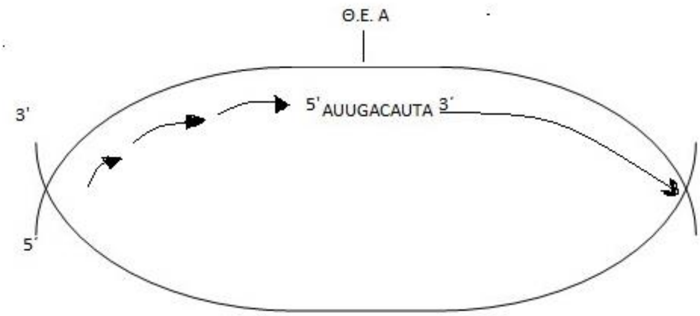
Πρωταρχικό τμήμα : 5΄AUUGACAU 3'

Η DNA πολυμεράση επιμηκύνει το πρωταρχικό τμήμα προσθέτοντας δεσοξυριβ/δια συμπληρωματικά στη μητρική στο 3'OH αρχικά του πρωταρχικού τμήματος και στη συνέχεια του τελευταίου δεσοξ/δίου της αναπτυσσόμενης αλυσίδας.

Γι' αυτό και η αντιγραφή έχει κατεύθυνση 5'->3'

Οι δυο αλυσίδες του DNA είναι αντιπαράλληλες συνεπώς η μητρική αλυσίδα που χρησιμοποιείται ως καλούπι θα είναι αντιπαράλληλη

β.



γ. Μετά την έναρξη της επιμήκυνσης του δοθέντος πρωταρχικού τμήματος από την DNA πολυμεράση,ποια άλλα ένζυμα δρουν; Να αναφερθούν ονομαστικά:

- DNA ελικάσες
- Πριμόσωμα
- DNA πολυμεράσες
- DNA δεσμάση
- Επιδιορθωτικά ένζυμα

δ.
5΄ GCACGCACCTATACGTGATCGCTACTATTGGG**CAT**CGGCTGAATAT 3’
3΄CGTGCGTGGATATGCACTAGCGATGATAACCCGTAGCCGACTTATA 5’
Το tRNA της μεθειονίνης έχει αντικωδικόνιο 3’ UAC 5’.
Άρα στην κωδική του γονιδίου που το κωδικοποιεί θα υπάρχει η τριπλέτα 5’CAT 3’ .
Άρα κωδική αλυσίδα είναι η πάνω.

ε.

- Κλωνοποίηση του γονιδίου με τη βοήθεια φορέα κλωνοποίησης και βακτηρίου ξενιστή
- Μέσω κατασκευής cDNA βιβλιοθήκης του κυτταρικού τύπου στον οποίο εκφράζεται το συγκεκριμένο γονίδιο και απομόνωσης στη συνέχεια του βακτηριακού κλώνου που περιέχει το συγκεκριμένο γονίδιο
- PCR

<u>Επιμέλεια</u>: Ασπρούδη Ελένη

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1. γ.
2. γ.
3. δ.
4. γ.
5. δ.

ΘΕΜΑ 2ο

1. <u>Ομάδες αίματος βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 79-80</u>

Ένα άτομο με ομάδα αίματος Α φέρει στην επιφάνεια των ερυθροκυττάρων του το αντιγόνο Α. Ένα άτομο με ομάδα αίματος Β φέρει το αντιγόνο Β, ένα άτομο με ομάδα αίματος ΑΒ φέρει και τα δυο αντιγόνα ενώ ένα άτομο με ομάδα αίματος Ο δε φέρει αντιγόνο.

<u>Διαδικασία παραγωγής μονοκλωνικών αντισωμάτων βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.123</u>

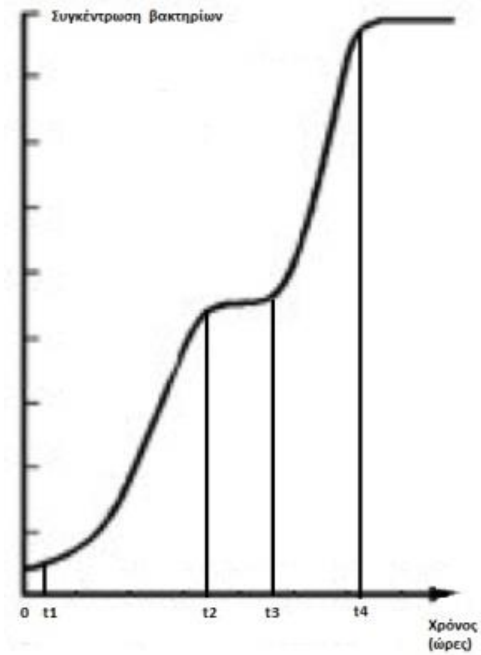
Γράφουμε όλη τη διαδικασία μόνο που στη θέση «αντιγόνο» θα γραφτεί συγκεκριμένα «αντιγόνο Α».

Στη συνέχεια θα επαναληφθεί η ίδια διαδικασία σε διαφορετικό πειραματόζωο στο οποίο θα εισάγουμε το αντιγόνο Β.

2.

- Τα γονίδια που ελέγχουν τους 2 χαρακτήρες βρίσκονται σε διαφορετικά ζεύγη χρωμοσωμάτων και συνεπώς ισχύει ο 2ος νόμος Μέντελ – νόμος ανεξάρτητης μεταβίβασης γονιδίων.
- Και τα δυο γονίδια είναι πυρηνικά και συνεπώς ισχύει ο 1ος νόμος Μέντελ- νόμος του διαχωρισμού των αλληλόμορφων γονιδίων στους γαμέτες και τυχαίου συνδυασμού τους.
- Υπάρχουν μόνο 2 αλληλόμορφα γονίδια στον πληθυσμό που ελέγχουν και τους 2 χαρακτήρες Η σχέση των αλληλόμορφων γονιδίων που ελέγχουν και τους 2 χαρακτήρες είναι σχέση επικρατούς-υπολειπόμενου.
- Δεν υπάρχει θνησιγόνο γονίδιο και φυσικά και οι δυο χαρακτήρες που μελέτησε ο Μέντελ είναι μονογονιδιακοί.

3.



α)

ΧΡΟΝΟΣ	ΦΑΣΗ
0 - t_1	Λανθάνουσα φάση
t_1- t_2	Εκθετική φάση
t_2 - t_3	Στατική φάση
t_3 - t_4	Εκθετική φάση
> t_4	Στατική φάση

β)

Όσο υπάρχει γλυκόζη το οπερόνιο της λακτόζης είναι σε καταστολή. Μόλις εξαντληθεί η γλυκόζη και προστεθεί λακτόζη τότε το οπερόνιο θα είναι σε επαγωγή.

- **0-t_1**: Λανθάνουσα φάση – Οπερόνιο σε καταστολή.
  Παράγεται η πρωτεΐνη καταστολέας.
- **t_1-t_2**: Εκθετική φάση - Οπερόνιο σε καταστολή.
  Παράγεται η πρωτεΐνη καταστολέας.
- **t_2-t_3**: Στατική φάση- Οπερόνιο σε καταστολή.

Παράγεται η πρωτεΐνη καταστολέας.

- **t_3-t_4**: Εκθετική φάση- Οπερόνιο σε επαγωγή.
  Παράγεται η πρωτεΐνη-καταστολέας και τα ένζυμα που μετέχουν στη διάσπαση της λακτόζης (β γαλακτοσιδάση, περμεάση και τρανσακετυλάση).

ΘΕΜΑ 3ο

1. Σε ποιες περιπτώσεις σε ένα άτομο για ένα μονογονιδιακό χαρακτήρα υπάρχουν 3 ή περισσότερα αλληλόμορφα;

- Τρισωμίες σε αυτοσωμικά χρωμοσώματα και τρισωμία του Χ
- Ανευπλοειδίες
- Διπλασιασιαμοί

2. Παρατηρούνται 3 φαινότυποι για το χρώμα των ανθέων, άρα είτε υπάρχουν 2 αλληλόμορφα με σχέση ατελώς επικρατών είτε 3 αλληλόμορφα με σειρά επικράτειας.

P : Μπλε Χ Γαλάζια

↓

61 μπλε
29 γαλάζια
31 λευκά

Άρα Φ.Α στην F1: 1γαλάζιο : 2 μπλε : 1 λευκό

F1 X F1: μπλε Χ μπλε

↓

110 μπλε
36 λευκα

Φ.Α: 3 μπλε : 1 λευκό

Πρόκειται για κλασσική αναλογία Μέντελ που προκύπτει από διασταύρωση ετερόζυγων ατόμων με το αλληλόμορφο που καθορίζει το μπλε να επικρατεί έναντι αυτού που καθορίζει το λευκό.
Επομένως πρόκειται για 3 αλληλόμορφα με σειρά επικράτειας.
Από τη διασταύρωση της πατρικής γενιάς όπου διασταυρώνονται 2 άτομα διαφορετικού φαινότυπου για να προκύπτουν λευκά άτομα θα πρέπει και οι

2 γονείς να φέρουν το αλληλόμορφο που καθορίζει το λευκό. Επομένως και οι δυο γονείς είναι ετερόζυγοι και το αλληλόμορφο που καθορίζει το μπλε είναι επικρατές των άλλων 2.
Γ : αλληλόμορφο γονίδιο που καθορίζει το μπλε
γ : αλληλόμορφο γονίδιο που καθορίζει το γαλάζιο
γ* : αλληλόμορφο γονίδιο που καθορίζει το λευκό

Γ > γ > γ*

P : Γγ* Χ γγ*

↓

	Γ	**γ***
γ	Γγ (μπλε)	γ γ* (γαλάζιο)
γ*	Γγ* (μπλε)	γ*γ* (λευκο)

Για να προκύπτουν στην F2 μόνο μπλε και λευκά σημαίνει ότι και οι δυο γονείς είχαν τον ίδιο γονότυπο και ήταν φορείς του γ*

F1 X F1 Γγ* Χ Γγ*

↓

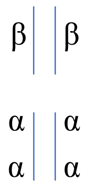
	Γ	**γ***
Γ	ΓΓ (μπλε)	Γγ* (μπλε)
γ*	Γγ* (μπλε)	γ*γ* (λευκο)

3.
4. Και στα δυο κύτταρα η μη κωδική του γονιδίου η οποία μεταγράφεται δεν έχει μετάλλαξη επομένως και στα δυο κύτταρα παράγεται η φυσιολογική πρωτεΐνη

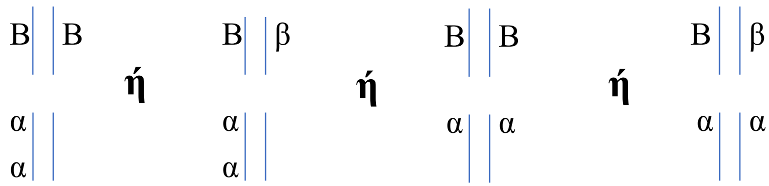
ΘΕΜΑ 4ο

Α. **α)** Η β θαλασσαιμία παρουσιάζει αυτοσωμικό υπολειπόμενο τύπο κληρονομικότητας.
Β: επικρατές αυτοσωμικό αλληλόμορφο γονίδιο που καθορίζει τη σύνθεση των φυσιολογικών αλυσίδων β.
β : υπολειπόμενο αυτοσωμικό αλληλόμορφο γονίδιο που καθορίζει τη σύνθεση μεταλλαγμένων αλυσίδων β.

Στα διπλοειδή κύτταρα ενός φυσιολογικού ατόμου υπάρχουν 4 γονίδια α, 2 α σε κάθε χρωμόσωμα του ζεύγους.
Επομένως γενετική σύσταση διπλοειδών κυττάρων άνδρα που πάσχει από β θαλασσαιμία :
Επομένως γενετική σύσταση διπλοειδών κυττάρων άνδρα που πάσχει από β θαλασσαιμία :



Πιθανή γενετική σύσταση διπλοειδών κυττάρων γυναίκας που πάσχει από αιμορροφιλία α:



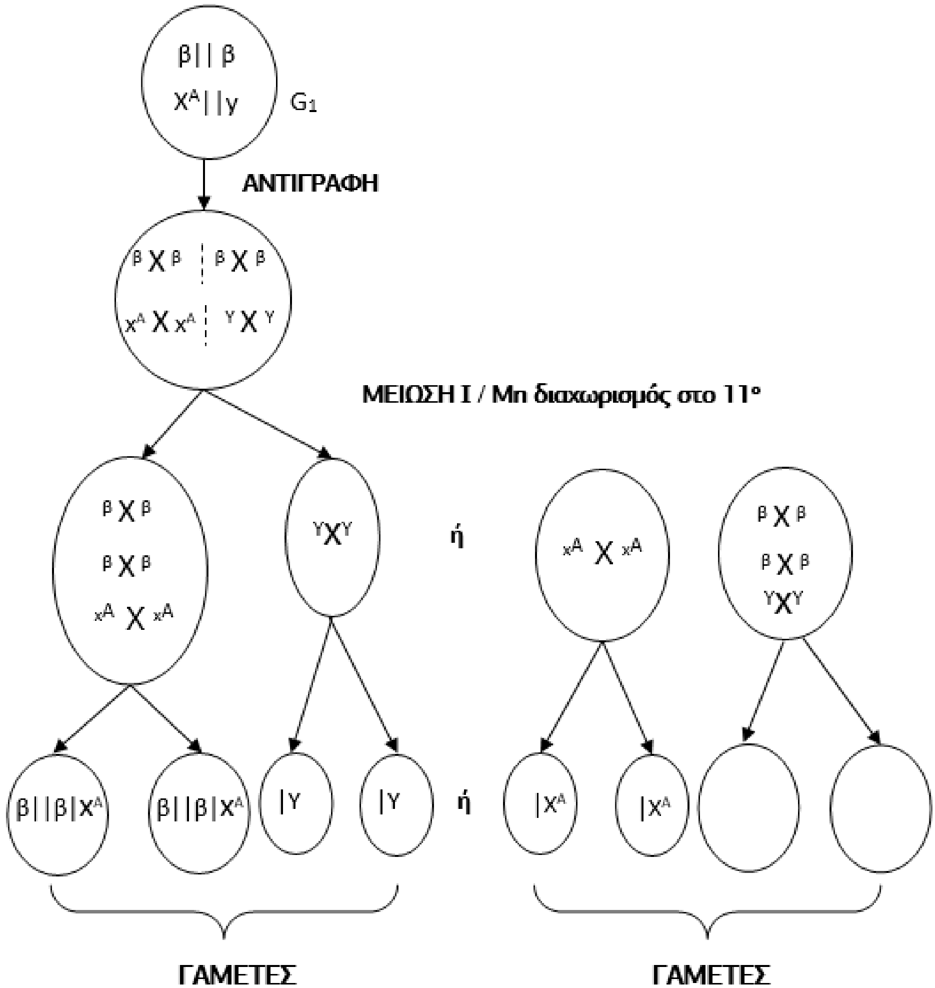
Κάθε γαμέτης περιέχει ένα χρωμόσωμα από το κάθε ζεύγος.
Επομένως συνεχίζουμε κανονικά με τετράγωνο Punnett για κάθε μια από τις 4 πιθανές διασταυρώσεις.

β) Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ 97.
Συνοπτικά οι λόγοι για τους οποίους υπάρχει μεγάλη ετερογένεια στα συμπτώματα της β θαλασσαιμίας είναι:

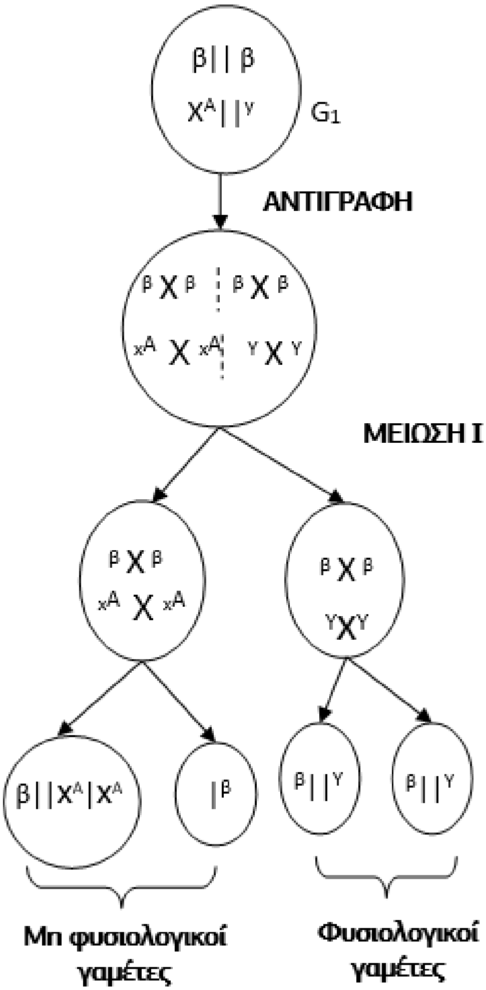
- Καθορίζεται από πολλαπλά αλληλόμορφα γονίδια καθένα εκ των οποίων έχει προκύψει από διαφορετικό είδος γονιδιακής μετάλλαξης (αντικατάσταση βάσης, προσθήκη ή έλλειψη βάσεων).
- Η θέση του/των αμινοξέων στο μόριο της αιμοσφαιρίνης. Υπάρχουν θέσεις κρίσιμες για τη λειτουργικότητα της αιμοσφαιρίνης όπως για παράδειγμα οι θέσεις δέσμευσης των αλυσίδων μεταξύ τους ή της αλυσίδας με την ομάδα της αίμη οπότε μεταλλάξεις που αφορούν αυτά τα αμινοξέα έχουν βαρύτερες συνέπειες.

Β. Η αχρωματοψία στο κόκκινο πράσινο παρουσιάζει υπολειπόμενο φυλοσύνδετο τύπο κληρονόμησης.

α) Μη διαχωρισμός των ομολόγων χρωμοσωμάτων του 11ου ζεύγους:



β) Μη διαχωρισμός αδελφών χρωματίδων του Χ:


G1
ΑΝΤΙΓΡΑΦΗ
ΜΕΙΩΣΗ Ι
Μη φυσιολογικοί γαμέτες
Φυσιολογικοί γαμέτες

β||β|^{Y} β||β|^{Y}

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1 → β
2 → γ
3 → β
4 → α
5 → γ

ΘΕΜΑ 2ο

1.
1. Ε
2. Δ
3. Α
4. Β

2.
α) Οι δύο ορισμοί του μετασχηματισμού βρίσκονται στις σελίδες 61, 63 του σχολικού βιβλίου.

β) Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ.65.

γ) Μονογονιδιακός λέγεται ο χαρακτήρας που ελέγχεται από αλληλόμορφα ενός μόνο γονιδίου

3. Υποκινητής, μεταγραφικοί παράγοντες **και** σχολικό βιβλίο: σελ. 45, 46: «επίπεδο κατά την μεταγραφή»

4. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 17, 18.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Παρατηρούμε πως οι χαρακτήρες «ασπρόμαυρο» και «άσπρο» δεν κατανέμονται ομοιόμορφα στα 2 φύλα.
Άρα είναι φυλοσύνδετα τα γονίδια που τους ελέγχαν.
Επίσης X^{A1}= φυλοσύνδετο γονίδιο, συνεπικρατές του X^{A2}, ελέγχει το μαύρο χρώμα και X^{A2} = φυλοσύνδετο γονίδιο, συνεπικρατές του X^{A1} , ελέγχει άσπρο χρώμα

Επειδή οι αρσενικοί απόγονοι της F_1 κληρονομούν το Χ χρωμόσωμα και τα φυλοσύνδετα γονίδια από τη μητέρα τους, συμπεραίνουμε πως το θηλυκό της Ρ ήταν ετερόζυγο.
$X^{A1}\ X^{A2}$.
Επίσης επειδή στην F_1 υπάρχουν θηλυκά μαύρα $X^{A1}\ X^{A1}$ συμπεραίνουμε πως το αρσενικό της Ρ ήταν μαύρο $X^{A1}Ψ$
P: $X^{A1}\ X^{A2}$ x $X^{A1}Ψ$
γ: X^{A1}, X^{A2} x X^{A1}, Ψ
F_1: $X^{A1}\ X^{A1}$, $X^{A1}\ X^{A2}$, $X^{A1}Ψ$, $X^{A2}Ψ$
ΦΑ : 25% θηλυκά μαύρα : 25% θηλυκά ασπρόμαυρα : 25% αρσενικά μαύρα : 25% αρσενικά ασπρόμαυρα

Β.

ΑΣΘΕΝΕΙΑ Ι :

επειδή το φυσιολογικό γονίδιο υπήρχε στους γονείς και δεν εκφράστηκε, καταλαβαίνουμε πως είναι υπολοιπόμενο. Άρα το γονίδιο της ασθένειας είναι επικρατές. Επειδή ο πατέρας είναι ασθενής ενώ η κόρη του φυσιολογική ,συμπεραίνουμε πως το γονίδιο της ασθένειας δεν είναι φυλοσύνδετο επικρατές γιατί τότε ο πατέρας θα το μεταβίβαζε στην κόρη του, που θα έπασχε.(κανόνες φυλοσύνδετης κληρονομικότητας) .
Άρα η ασθένεια Ι οφείλεται σε αυτοσωμικό επικρατές γονίδιο.

< Α=αυτοσωμικό επικρατές γονίδιο,προκαλεί ασθένεια Ι

α=αυτοσωμικό υπολειπόμενο γονίδιο,είναι το φυσιολογικό

P: Αα x Αα
γ: Α,α x Α,α
F_1 : ΑΑ, Αα, Αα, αα
Δηλαδή οι γονείς έχουν γονότυπο Αα, ενώ η κόρη αα

ΑΣΘΕΝΕΙΑ ΙΙ :

επειδή το γονίδιο της ασθενείας υπήρχε στους γονείς και δεν εκφράστηκε, καταλαβαίνουμε πως είναι υπολειπόμενο. Επειδή η κόρη έχει την ασθένεια ΙΙ ενώ ο πατέρας είναι φυσιολογικός συμπεραίνουμε πως το γονίδιο της ασθένειας δεν είναι φυλοσύνδετο υπολειπόμενο, γιατί τότε η κόρη θα ήταν ομόζυγη στα φυλοσύνδετα υπολειπόμενα γονίδια και θα είχε κληρονομήσει το ένα από τον πατέρα της που θα έπασχε.
Άρα η ασθένεια ΙΙ οφείλεται σε αυτοσωμικό υπολειπόμενο γονίδιο

Β=αυτοσωμικό επικρατές γονίδιο,φυσιλογικό

β=αυτοσωμικό υπολειπόμενο γονίδιο,προκαλεί ασθένεια ΙΙ

P: Ββ x Ββ

γ: Β,β x Β,β
F_1 : ΒΒ, Ββ, Ββ, ββ
Δηλαδή οι γονείς έχουν γονότυπο Ββ, ενώ η κόρη τους ββ

Γ. Εφόσον το DNA του πυρήνα, στο σωματικό κύτταρο κατά τη μετάφαση είναι 1,6 m, πριν την αντιγραφή θα είναι 0,8 m και στον πυρήνα του γαμέτη που είναι απλοειδής, το DNA θα είναι 0,4 m. Όμως ο γαμέτης περιλαμβάνει και μιτοχόνδρια που διαθέτουν δικό τους DNA.
Άρα το συνολικό DNA του γαμέτη είναι λίγο μεγαλύτερο από 0,4 m.
Σωστή απάντηση : Δ
Όσοι αρσενικοί γαμέτες περιέχουν το φυλετικό χρωμόσωμα X θα έχουν το ίδιο μήκος DNA με το DNA των ωαρίων των θηλυκών ατόμων. Όσοι όμως περιέχουν το φυλετικό χρωμόσωμα Ψ θα έχουν λιγότερο DNA αφού το Ψ είναι αρκετά μικρότερο από το X.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για το 1ο γονίδιο, η πάνω αλυσίδα είναι κωδική με το 5΄ δεξιά και το 3΄ αριστερά, γιατί διαβάζοντας την από δεξιά προς τα αριστερά συναντώ το κωδικόνιο 5΄ - ATG - 3΄ που αντιστοιχεί στο κωδικόνιο έναρξης 5΄- AUG – 3΄ που αντιστοιχεί στο κωδικόνιο λήξης 5΄ UAA 3΄ του mRNA.
Ξέρω πως η κωδική αλυσίδα έχει παράλληλα άκρα και ίδιες βάσεις με το mRNA, αλλά όπου η κωδική έχει T το RNA έχει U.

Για το 2ο γονίδιο, η κάτω αλυσίδα είναι κωδική με το 5΄ αριστερά και το 3΄ δεξιά.
(Η διερεύνηση γίνεται όπως και για το 1ο γονίδιο)

i. Για το 1ο γονίδιο : 5΄GGTTCTTACGACC 3΄
Για το 2ο γονίδιο : 5΄ ATACGTTACC 3΄
Η 5΄ αμετάφραστη περιοχή της κωδικής αλυσίδας βρίσκεται πριν το κωδικόνιο έναρξης

ii. Για το πρώτο γονίδιο, ο υποκινητής βρίσκεται δεξιά, εκεί που η κωδική έχει το 5΄ και η μη κωδική αλυσίδα το 3΄ άκρο της.
Άρα το ένζυμο RNA πολυμεράση θα προσδεθεί στο Δ.
Για το δεύτερο γονίδιο, ο υποκινητής βρίσκεται αριστερά, άρα η RNA πολυμεράση θα προσδεθεί στο Γ.

Β. Από τα αποτελέσματα της 1ης διασταύρωσης (2 ενδιάμεσου μήκους : 1 κανονικού μήκους), διαπιστώνουμε πως υπάρχει αυτοσωμικό θνησιγόνο

γονίδιο που σκότωσε το 25% των απογόνων αλλοιώνοντας την αναμενόμενη Φ.Α
Επειδή συναντούμε 3 διαφορετικούς φαινότυπους για το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, εκ των οποίων οι κεραίες ενδιάμεσου μήκους αντιστοιχούν στον ενδιάμεσο φαινότυπο, καταλαβαίνουμε πως τα γονίδια συμπεριφέρονται ως ατελή επικρατή. Συναντούμε και αρσενικά άτομα με ενδιάμεσου μήκους κεραίες, ετερόζυγα, άρα τα γονίδια είναι αυτοσωμικά.
A_1 : Αυτοσωμικό γονίδιο, ατελώς επικρατές του A_2 , ελέγχει τις κανονικές κεραίες
A_2 : Αυτοσωμικό γονίδιο, ατελώς επικρατές του A_1 , προκαλεί έλλειψη κεραίων
(θνησιγόνο)

Στην πρώτη διασταύρωση έχουμε:
P: $A_1 A_2$ x $A_1 A_1$
γ: A_1 , A_2 x A_1
F_1 : $A_1 A_1$, $A_1 A_2$
ΦΑ : 50% κανονικές κεραίες : 50% ενδιάμεσες κεραίες
(**Αιτιολόγηση**: 1ος νόμος Mendel, θνησιγόνα γονίδια, ατελώς επικρατή γονίδια)

Γ.

α. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 64.
β. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ.103, 104.

Επιμέλεια: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1→ β
2→ γ
3→ α
4→ γ
5→ α

ΘΕΜΑ 2ο

1) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 97: «Τα γονίδια που κωδικοποιούν τις αλυσίδες των αιμοσφαιρινών… στους απογόνους τους είναι 25%».
2) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 81: «Το μοσχομπίζελο είναι ιδανικό… διάφορες μονογονιδιακές ασθένειες».
3) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 22: «Το γενετικό υλικό των ευκαρυωτικών… και άλλα είδη πρωτεϊνών».
4) Κατά τη μεταγραφή των προκαρυωτικών οργανισμών το παραγόμενο mRNA είναι πάντα ώριμο, αφού τα γονίδια πρωτεϊνών των βακτηρίων δεν περιλαμβάνουν ποτέ εσώνια και βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 37, 38: «Αντίθετα στους ευκαρυωτικούς … ώριμο mRNA». Άρα στα βακτήρια η μετάφραση ξεκινά πριν την ολοκλήρωση της μεταγραφής.
Επίσης, στα βακτήρια συναντόνται τα οπερόνια (ορισμός, σελίδα 45 σχολικού βιβλίου). Έτσι κατά τη μεταγραφή των δομικών γονιδίων παράγεται κοινό mRNA που περιέχει κωδικόνια έναρξης και λήξης για κάθε ένζυμο που κωδικοποιείται από αυτά τα γονίδια.

ΘΕΜΑ 3ο

1) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 113: «Οι επιστήμονες είχαν ήδη… αποστειρώνονται πριν την έναρξη της καλλιέργειας».
2) Α. Πρόκειται για κλειστή καλλιέργεια εφόσον διακρίνονται οι 4 φάσεις ανάπτυξης των μικροοργανισμών (λανθάνουσα, εκθετική, στατική και φάση θανάτου). Να αναφερθεί και ο ορισμός της κλειστής καλλιέργειας (σελ. 114 σχολικού βιβλίου).
Β. Εφόσον παρατηρούμε ότι η ποσότητα ενδονουκλεάσης που παράγεται είναι ανάλογη του πληθυσμού των μικροοργανισμών και επειδή κατά τη στατική φάση σταματά η περαιτέρω έκκριση ενδονουκλεάσης, καταλαβαίνουμε πως για την παραγωγή της θα χρησιμοποιήσουμε συνεχή καλλιέργεια. Στη συνεχή καλλιέργεια λόγω της παρατεταμένης εκθετικής φάσης ανάπτυξης, δημιουργούνται μεγάλοι πληθυσμοί μικροοργανισμών και η ποσότητα ενδονουκλεάσης που παράγεται θα είναι πολύ υψηλή.
Αντίθετα παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη ποσότητα αμπικιλλίνης παράγεται κατά την στατική φάση ανάπτυξης των μικροοργανισμών. Έτσι για την παραγωγή αμπικιλλίνης θα προτιμήσουμε κλειστή καλλιέργεια.
3) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 105: «Τα ογκοκατασταλτικά γονίδια… έλλειψης ενός ογκοσταλτικού γονιδίου».

ΘΕΜΑ 4ο

1) Α) Πρόκειται για συνεπικρατή γονίδια γιατί τα αλληλόμορφα γονίδια εκφράζονται και τα δυο στο φαινότυπο των ετερόζυγων ατόμων
Επειδή όμως ο χαρακτήρας «πιτσιλωτό» δεν εκφράζεται καθόλου στα αρσενικά άτομα, καταλαβαίνουμε πως τα γονίδια είναι φυλοσύνδετα.
Έστω X^{A1} = φυλοσύνδετο γονίδιο, συνεπικρατές του X^{A2} που εκφράζει το άσπρο χρώμα

Β) P: $X^{A2} X^{A2}$ x $X^{A1}Ψ$
γ: X^{A2} x X^{A1}, Ψ
F_1: $X^{A1} X^{A2}$, $X^{A2}Ψ$
Φ.Α: 50% θηλυκά πιτσιλωτά : 50% αρσενικά άσπρα

Γ) Επειδή οι αρσενικοί απόγονοι κληρονομούν τα φυλοσύνδετα γονίδια απ' την μητέρα τους, καταλαβαίνουμε πως η μητέρα ήταν ετερόζυγη $X^{A1} X^{A2}$.
Επειδή μεταξύ των απογόνων υπάρχουν θηλυκά άσπρα X^{A2} X^{A2} ,καταλαβαίνουμε πως το ένα X^{A2} το κληρονόμησαν απ' τον πατέρα τους που ήταν άσπρος $X^{A2}Ψ$.
P: $X^{A1} X^{A2}$ x $X^{A2}Ψ$
γ: X^{A1}, X^{A2} x X^{A2},Ψ
F_1: $X^{A1} X^{A2}$, $X^{A2} X^{A2}$, $X^{A1}Ψ$, $X^{A2}Ψ$
Φ.Α: 1 θηλυκό πιτσιλωτό : 1 θηλυκό άσπρο: 1 αρσενικό μαύρο:
1 αρσενικό άσπρο

2. Η διαδικασία που ακολουθείται για την γονιδιακή θεραπεία της δρεπανοκυτταρικής αναιμίας είναι η εξής:

- Πρόδρομα ερυθροκύτταρα του παιδιού παραλαμβάνονται και πολλαπλασιάζονται σε κυτταροκαλλιέργειες.
- Το φυσιολογικό γονίδιο της β αλυσίδας της αιμοσφαιρίνης ενσωματώνεται σε έναν ιό φορέα (που έχει καταστεί αβλαβής) με τις τεχνικές του ανασυνδυασμένου DNA.
- Ο γενετικά τροποποιημένος ιός εισάγεται στα πρόδρομα ερυθροκύτταρα
- Τα γενετικά τροποποιημένα ερυθροκύτταρα εισάγονται με ενδοφλέβια ένεση στον ασθενή και παράγουν τις φυσιολογικές β–αλυσίδες.

Βέβαια τα τροποποιημένα ερυθροκύτταρα δε ζουν για πάντα στον οργανισμό – δηλαδή η θεραπεία δεν είναι μόνιμη και χρειάζεται συνεχής έγχυση τέτοιων κυττάρων. Όμως τα άτομα μπορούν να ζουν φυσιολογικά, κάνοντας ανά τακτά χρονικά διαστήματα αυτή τη θεραπεία. Αυτός ο τύπος γονιδιακής θεραπείας ονομάζεται ex vivo,γιατί τα κύτταρα τροποποιούνται έξω από τον οργανισμό και εισάγονται πάλι σε αυτόν.

3.

38	76	19
38	38	19
19	19	-
36	36	18
2	2	1

Επιμέλεια: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1 → γ
2 → β
3 → α
4 → γ
5 → β

ΘΕΜΑ 2ο

1. Η αιμορροφιλία Α είναι φυλοσύνδετη υπολειπόμενη ασθένεια (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 84, 85). Η γυναίκα ως φορέας είναι ετερόζυγη με γονότυπο X^AX^a. Πάντα πριν ξεκινήσει η μείωση, γίνεται αντιγραφή του DNA.

α. Οι γαμέτες δημιουργούνται από μη διαχωρισμό των ομόλογων χρωμοσωμάτων κατά την 1η μειωτική διαίρεση. Έτσι δημιουργούνται μη φυσιολογικοί γαμέτες:

- γαμέτες με X^AX^a και 24 χρωμοσώματα
- γαμέτες (-) χωρίς φυλετικό χρωμόσωμα, με 22 χρωμοσώματα

β. Οι γαμέτες δημιουργούνται από μη διαχωρισμό των αδελφών χρωματίδων κατά την δεύτερη μειωτική διαίρεση. Έτσι δημιουργούνται και φυσιολογικοί και μη φυσιολογικοί γαμέτες. Ανάλογα με το κύτταρο της μείωσης Ι στο οποίο συνέβη ο μη διαχωρισμός, έχουμε:

- γαμέτες με X^AX^A και 24 χρωμοσώματα
- γαμέτες (-)χωρίς φυλετικό χρωμόσωμα, με 22 χρωμοσώματα
- γαμέτες με X^a και 23 χρωμοσώματα

ή

- γαμέτες με X^A και 23 χρωμοσώματα
- γαμέτες με X^aX^a και 24 χρωμοσώματα
- γαμέτες (-) χωρίς φυλετικό χρωμόσωμα, με 22 χρωμοσώματα

2. Η αλληλουχία βάσεων του γονιδίου δεν μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς γιατί:

- μπορεί να έχουν απομακρυνθεί κάποια αμινοξέα από το αμινικό άκρο της πρωτεΐνης, ή να έχουν αποκοπεί κι άλλα αμινοξέα κατά την τροποποίησή της (αν πρόκειται για πρωτεΐνη ευκαρυωτικού κυττάρου).
- Τα γονίδια περιλαμβάνουν 5', 3' αμετάφραστες περιοχές στα άκρα τους, οι οποίες δεν κωδικοποιούν αμινοξέα.
- Υπάρχουν 3 πιθανά κωδικόνια λήξης και δεν κωδικοποιούν αμινοξέα.
- Τα περισσότερα αμινοξέα κωδικοποιούνται από 2-6 διαφορετικά κωδικόνια λόγω του εκφυλισμένου γενετικού κώδικα.
- Αν το γονίδιο είναι ασυνεχές μπορεί να περιλαμβάνει εσώνια.

3.

- Γονιδιακές μεταλλάξεις (αντικατάσταση βάσεων, έλλειψη ή προσθήκη βάσης ή βάσεων).
  π.χ. φαινυλκετονουρία.
- Δομικές χρωμοσωμικές ανωμαλίες, όπως η έλλειψη.
  π.χ. σύνδρομο Cri du chat.
- Αριθμητικές χρωμοσωμικές ανωμαλίες, όπως οι τρισωμίες.
  π.χ. τρισωμία 21, τρισωμία 13, τρισωμία 18.

4.

α. Με τον λόγο A+T/C+G (σελ. 18 σχολικού βιβλίου)
β.
- Με διασταύρωση ελέγχου (σελ. 77 σχολικού βιβλίου)
- Με αυτογονιμοποίηση (σε φυτά)

- Με μοριακή ανάλυση DNA
- Με μελέτη γενεαλογικού δένδρου
- Με βιοχημικές αναλύσεις
  (π.χ. αν υπάρχει αυξημένη Hb A_2 το άτομο είναι φορέας β-θαλασσαιμίας).

5.

α. Λάθος.

Ισχύει το αντίστροφο. Οι διαγονιδιακοί οργανισμοί δέχονται το «ξένο» γονίδιο στο πρώτο κύτταρο του οργανισμού τους (1ο σωματικό κύτταρο για τα φυτά ή ζυγωτό για τα ζώα), με αποτέλεσμα το γονίδιο να μεταβιβάζεται σε όλα τα σωματικά κύτταρα του οργανισμού τους καθώς και σε κάποιους από τους γαμέτες τους. Έτσι στη συνέχεια το γονίδιο αυτό μεταβιβάζεται και στους απογόνους.

Αντίθετα στη γονιδιακή θεραπεία το φυσιολογικό γονίδιο ενσωματώνεται στα σωματικά κύτταρα του ιστού που εκφράζει την ασθένεια, δεν επηρεάζει ποτέ τους γαμέτες και δεν μεταβιβάζεται στους απογόνους.

β. Σωστό.

Απλοειδή κύτταρα είναι οι γαμέτες των ευκαρυωτικών οργανισμών που στον πυρήνα τους διαθέτουν πολλά γραμμικά και δίκλωνα μόρια DNA, σε ένα αντίγραφο του γονιδιώματος. Επίσης απλοειδή είναι και τα κύτταρα των βακτηρίων που διαθέτουν ένα κυκλικό δίκλωνο μόριο DNA.

ΘΕΜΑ 3ο

1. Θα διασταυρώσουμε θηλυκά με κοντές με αρσενικά με μακριές πτέρυγες. Αν όλοι οι απόγονοι, ανεξαρτήτως φύλου προκύψουν με μακριές πτέρυγες, το χαρακτηριστικό είναι αυτοσωμικό. Αν όλοι οι αρσενικοί απόγονοι προκύψουν με κοντές και όλοι οι θηλυκοί με μακριές πτέρυγες, το χαρακτηριστικό είναι φυλοσύνδετο.

Αιτιολόγηση: 1ος νόμος Mendel (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 75) και κανόνες φυλοσύνδετης κληρονομικότητας (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 84, 85).

- Αν το χαρακτηριστικό είναι αυτοσωμικό, έστω Α το επικρατές αυτοσωμικό γονίδιο που ελέγχει τις μακριές και α το υπολειπόμενο αλληλόμορφό του που ελέγχει τις κοντές πτέρυγες. Τότε:

  P : αα x AA

  γ: α x A

  F1: Aα

Φ.Α.: 100% μακριές πτέρυγες

- Αν το χαρακτηριστικό είναι φυλοσύνδετο, έστω X^A το επικρατές φυλοσύνδετο γονίδιο που ελέγχει τις μακριές και $X^α$ το υπολειπόμενο αλληλόμορφό του που ελέγχει τις κοντές πτέρυγες. Τότε:

  P: $X^αX^α$ x X^AY
  γ: $X^α$ x X^A, Y
  F1: $X^AX^α$, $X^αY$
  Φ.Α.: 50% θηλυκά με μακριές και 50% αρσενικά με κοντές πτέρυγες.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο Β λυκείου: σελ.25 «Είναι δικαιολογημένο να αναρωτιόμαστε ….ως συστατικό του αυγού».

3. Φαινυλκετονουρία: αυτοσωμική υπολειπόμενη ασθένεια. Μετά την γέννηση (παιδί 2 ετών) προσδιορίζεται με μέτρηση της συγκέντρωσης της φαινυλαλανίνης στο αίμα του ατόμου (βιοχημικές εξετάσεις). Πριν την γέννηση (στο έμβρυο) πραγματοποιείται αμνιοπαρακέντηση ή λήψη χοριακών λαχνών και στα κύτταρα που λαμβάνουμε κάνουμε βιοχημικές αναλύσεις για ορισμένες πρωτεΐνες ή ένζυμα, ώστε να προσδιορίσουμε την ασθένεια.

Δρεπανοκυτταρική αναιμία: αυτοσωμική υπολειπόμενη ασθένεια. Σε παιδί 2 ετών μπορούμε να προσδιορίσουμε την ασθένεια είτε με ανίχνευση της HbS στο αίμα του παιδιού, είτε με δοκιμασία δρεπάνωσης όπου σε συνθήκες έλλειψης οξυγόνου τα ερυθροκύτταρα παίρνουν δρεπανοειδές σχήμα σε όσα άτομα πάσχουν, είτε με μοριακή ανάλυση DNA εντοπίζουμε τα γονίδια $β^ς$, εφόσον υπάρχουν. Πριν τη γέννηση, στο έμβρυο, πραγματοποιούμε λήψη χοριακών λαχνών ή αμνιοπαρακέντηση και στα κύτταρα που παραλαμβάνουμε κάνουμε μοριακή ανάλυση DNA για εντοπισμό των γονιδίων $β^ς$.

4. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ.44: «Τα κύτταρα ενός πολυκύτταρου… σε πολλά επίπεδα».

ΘΕΜΑ 4ο

1.

α) Η μερική αχρωματοψία στο πράσινο και κόκκινο είναι φυλοσύνδετη υπολειπόμενη ασθένεια. Έστω $X^Δ$ το φυλοσύνδετο επικρατές γονίδιο για την φυσιολογική όραση και $X^δ$ το φυλοσύνδετο υπολειπόμενο που προκαλεί μερική αχρωματοψία.

Τα άτομα που είναι φυσιολογικά διαθέτουν οπωσδήποτε ένα $X^{Δ}$, ενώ όσοι πάσχουν διαθέτουν ένα $X^{δ}$ (άνδρες) ή 2 $X^{δ}$ (γυναίκες).
Ο άνδρας ΙΙΙ1 που πάσχει έχει γονότυπο $X^{δ}Y$, ενώ οι φυσιολογικοί άνδρες Ι2, ΙΙ1 και ΙΙ3 είναι $X^{Δ}Y$.
Ο ΙΙΙ1 κληρονόμησε το $X^{δ}$ από την φυσιολογική μητέρα του.
Άρα η ΙΙ2 είναι φορέας $X^{Δ}X^{δ}$.
Η ΙΙ2 κληρονόμησε το $X^{δ}$ από τη μητέρα της Ι1 (εφόσον ο πατέρας της ήταν φυσιολογικός).
Άρα η φυσιολογική γυναίκα Ι1 είναι φορέας $X^{Δ}X^{δ}$.
Η φυσιολογική κόρη ΙΙΙ2 μπορεί να είναι $X^{Δ}X^{δ}$ ή $X^{Δ}X^{Δ}$, όπως φαίνεται από τη διασταύρωση των ΙΙ2 και ΙΙ3:
P: $X^{Δ}X^{δ}$ x $X^{Δ}Y$
γ: $X^{Δ}$, $X^{δ}$ x $X^{Δ}$, Y
ΙΙΙ: $X^{Δ}X^{Δ}$, $X^{Δ}X^{δ}$, $X^{Δ}Y$, $X^{δ}Y$
Αιτιολόγηση: φυλοσύνδετη κληρονομικότητα (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ.84, 85).

β) Για να προκύψει παιδί με σύνδρομο Klinefelter και μερική αχρωματοψία πρέπει η μητέρα να μεταβίβασε ανώμαλο γαμέτη με 2 $X^{δ}$, λόγω μη διαχωρισμού των αδελφών χρωματίδων $X^{δ}$ κατά τη 2η μειωτική διαίρεση. Αντίθετα ο πατέρας μεταβίβασε φυσιολογικό γαμέτη με Y φυλετικό χρωμόσωμα. (κάνετε το διάγραμμα όπως στο σχολικό βιβλίο: σελ. 99.)

2.
α) Το πρώτο αμινοξύ του ολιγοπεπτιδίου είναι αυτό που έχει ελεύθερη την αμινομάδα του.
Άρα η πρωτεΐνη είναι :
NH_2-Met-Lys-Cys-Ala-Val-Ser-Met-COOH
Ο γενετικός κώδικας είναι κώδικας τριπλέτας, συνεχής, μη επικαλυπτόμενος, με ένα κωδικόνιο έναρξης και 3 λήξης (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 39)

mRNA : 5' AUG – AAA – UGU – GCU – GUU – AGU – AUG – UGA 3'
κωδική: 5' ATG – AAA – TGT – GCT – GTT – AGT – ATG – TGA 3'
μη κωδική: 3' TAC – TTT – ACA – CGA – CAA – TCA – TAC – ACT 5'
Η σχέση κωδικής, μη κωδικής και mRNA αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο: σελ. 37.

β) Μετά τη μετάλλαξη το γονίδιο και το mRNA θα είναι:
mRNA : 5' AUG – AAA – UGA – GCU – GUU – AGU – AUG – UGA 3'
κωδική: 5' ATG – AAA – TGA – GCT – GTT – AGT – ATG – TGA 3'

μη κωδική: 3' TAC – TTT – ACT – CGA – CAA – TCA – TAC – ACT 5'
Παρατηρούμε πως σχηματίστηκε πρόωρο κωδικόνιο λήξης και η πρωτεΐνη θα παραμείνει με 2 μόνο αμινοξέα.
Άρα θα επηρεαστεί οπωσδήποτε η λειτουργικότητά της.

γ) Πρόκειται για αυτόματες μεταλλάξεις ή μεταλλάξεις λόγω μεταλλαξογόνων παραγόντων που συμβαίνουν κατά την μεσόφαση, στην διάρκεια αντιγραφής του DNA. (Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 96)

Επιμέλεια: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1 → α
2 → γ
3 → i → γ ii → δ
4 → γ
5 → α

ΘΕΜΑ 2ο

1.

α. Ο Β κλώνος αντιγράφεται συνεχώς.
Αιτιολόγηση: Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 34: «Οι DNA πολυμεράσες ... ασυνεχής στην άλλη».

β. Πρωταρχικό τμήμα RNA: 5΄ ACCCUGAUUC 3΄
Αιτιολόγηση: Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 32: «Τα κύρια ένζυμα ... πρωταρχικά τμήματα».

2.

1. α, γ
2. α, β, γ, δ
3. α, β^s, γ, δ

4. α, γ, δ
5. γ
6. α, β, γ, δ και μικρή ποσότητα $β^s$
7. α, β, γ, δ
8. α, β, γ, δ
9. α, β, γ, δ και μικρή ποσότητα $β^s$
10. α, γ

3. 5 → 4 → 2→ 3→1

4. Βλέπε σχολικό βιβλίο Β λυκείου, σελ. 61 «Ο ρόλος του πυρήνα ..... περιορισμένη διάρκεια ζωής. »

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Άρα η κόρη είναι ομόζυγη στα υπολειπόμενα παθολογικά γονίδια και πάσχει. Δηλαδή έχει κληρονομήσει ένα υπολειπόμενο παθολογικό γονίδιο από τον κάθε γονέα.

Αν τα γονίδια ήταν αυτοσωμικά, ο πατέρας θα ήταν ομόζυγος στα υπολειπόμενα και θα είχε μεταβιβάσει ένα υπολειπόμενο γονίδιο στο γιο του.

Όμως στον γιο δεν ανιχνεύτηκε υπολειπόμενο παθολογικό γονίδιο, άρα τα γονίδια είναι φυλοσύνδετα.

X^A : φυλοσύνδετο επικρατές γονίδιο φυσιολογικό
$X^α$: φυλοσύνδετο υπολειπόμενο γονίδιο παθολογικό

I_1: $X^αΨ$ πάσχει, I_2: $X^A X^α$ φυσιολογικό,
II_1: X^A Ψ γιος φυσιολογικός, II_2: $X^α X^α$ κόρη πάσχει.
Αιτιολόγηση: 1ος νόμος Mendel, 3 κανόνες Φ. Κ.

Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 83.

Γ.

α) Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 61.
β) Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ. 81.

γ) Βλέπε σχολικό βιβλίο Γενικής Παιδείας: σελ. 104-105.

Δ. Βλέπε σχολικό βιβλίο : σελ. 122

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

α)

πρόδρομο mRNA:

$$5'\ \underbrace{GACCGG - \underline{AUG} - \underline{CUU} - \underline{A}}_{\text{1ο εξώνιο}}\overset{\text{εσώνιο}}{(AGGUAUC)}\underbrace{\underline{GC} - GAU - CAU - UAG - CGCA\ 3'}_{\text{2ο εξώνιο}}$$

ώριμο mRNA (στο πολύσωμα):

5΄ GACCGG-AUG-CUU-AGC-GAU-CAU-UAG-CGCA 3΄

β) cDNA βιβλιοθήκη.

<u>Αιτιολόγηση</u>: Ο 2ος ορισμός γονιδιωματικής βιβλιοθήκης και ο ορισμός cDNA βιβλιοθήκης.

γ)

<u>Γονίδιο(χωρίς εσώνια)</u>

Κωδ: 5΄ GACCGG-ATG-CTT-AGC-GAT-CAT-TAG-GGCA 3΄

Μη κωδ: 3΄ CTGGCC-TAC-GAA-TCG-CTA-GTA-ATC-GCGT 5΄

<u>Αιτιολόγηση</u>: Κατασκευή cDNA βιβλιοθήκης.

δ) Σιωπηλή μετάλλαξη – καμία αλλαγή στη δομή πρωτεΐνης

Στην φυσιολογική κωδική το κωδικόνιο σερίνης ήταν 5΄AGC3΄ (άρα στο mRNA 5΄AGC3΄) και στην μεταλλαγμένη κωδική 5΄AGT3΄(άρα στο mRNA 5΄AGU3΄) . Τα κωδικόνια 5΄AGC3΄ και 5΄AGU3΄ είναι συνώνυμα.

ε)

- Κατά την αντιγραφή (μεσόφαση).
- Αυτόματες ή λόγω μεταλλαξογόνων παραγόντων (ονομαστικά).

Β. 1) 25, 2) 50, 3) 25, 4) 25, 5) 50

<u>Επιμέλεια</u>: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1 → β
2 → α
3 → δ
4 → α
5 → γ

ΘΕΜΑ 2ο

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.61: Ο φορέας κλωνοποίησης είναι ένα μόριο DNA π.χ. πλασμίδιο ή DNA φάγων, το οποίο μπορεί να αυτοδιπλασιάζεται ανεξάρτητα μέσα σ΄ ένα κύτταρο ξενιστή όπως ένα βακτήριο. Και σελ.62, 63: «Η αλληλουχία …… χωρίς να προσλάβουν DNA του οργανισμού.»

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 74: «Όταν ο Μέντελ διασταύρωσε …. είναι τα γονίδια.» και σελ. 75: «Ο τρόπος με τον οποίο ….. αλληλόμορφων γονιδίων.»

3. Γονιδιακές μεταλλαξεις (φαινυλκετονουρία), δομικές χρωμοσωμικές ανωμαλίες π.χ. έλλειψη (σύνδρομο cri du chat), αριθμητικές χρωμοσωμικές ανωμαλίες π.χ. τρισωμίες (τρισωμία 21, τρισωμία 13, τρισωμία 18).

4. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.137, 138 «Το βακτήριο Agrobacterium tumefaciens ….. νέες ιδιότητες στους απογόνους τους.»

5. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.142, 143 (Μετάφαση Ι) και σελ. 144: «Ταυτόχρονα όμως ….. που μπορεί να παραγάγει.»

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 81: «Το μοσχομπίζελο είναι ιδανικό ….. μονογονιδιακές ασθένειες».

Β.

-πολλαπλά αλληλόμορφα γονίδια: Εάν στον πληθυσμό υπάρχουν τρία ή περισσότερα αλληλόμορφα γονίδια για μία γενετική θέση, τα γονίδια ονομάζονται πολλαπλά αλληλόμορφα.

-ατελώς επικρατή γονίδια: Τα γονίδια που αν βρεθούν σε ετερόζυγη κατάσταση εκφράζουν φαινότυπο ενδιάμεσο σε σχέση με τον φαινότυπο των ομόζυγων ατόμων.

-συνεπικρατή γονίδια: Τα γονίδια τα οποία στα ετερόζυγα άτομα εκφράζονται και τα δύο στον φαινότυπο.

-θνησιγόνα γονίδια: Τα γονίδια που εκφράζονται νωρίς κατά την εμβρυογένεση, συνήθως πριν την $8^η$ εβδομάδα της κύησης και οδηγούν σε διακοπή της ανάπτυξης του εμβρύου (τερματισμός της κύησης)

-φυλοσύνδετα γονίδια: Τα γονίδια που βρίσκονται στο Χ χρωμόσωμα και δεν έχουν αλληλόμορφα στο Ψ.

Γ. Βλέπε σχολικό βιβλίο: σελ.65: «Η μέθοδος αλυσιδωτής ..... από απολιθώματα».

ΘΕΜΑ 4ο

1.

Το μόριο DNA προέρχεται από πυρήνα , άρα είναι γραμμικό και δίκλωνο. Εφόσον ξεκινά και τελειώνει με νουκλεόσωμα, οι ενδιάμεσες περιοχές θα είναι κατά μία λιγότερες από τον αριθμό των νουκλεοσωμάτων. Αν ν τα νουκλεοσώματα τότε (ν-1) ο αριθμός των ενδιάμεσων περιοχών.
Κάθε νουκλεόσωμα αποτελείται από 146 ζ.β. τυλιγμένα γύρω από ένα οκταμερές ιστονών.

Το μόριο DNA θα έχει μήκος 39.892:2=19.946 ζ.β.
Άρα θα ισχύει: ν.146ζβ + (ν-1).54ζβ = 19.946 ζ.β.
Τελικά ν=100 νουκλεοσώματα και 8 x 100 = 8.000 ιστόνες

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 22: «Το γενετικό υλικό ......το ανασυνδυασμένου DNA.»

3. Το μόριο του DNA είναι δίκλωνο, άρα ισχύει η συμπληρωματικότητα των βάσεων (την αναφέρουμε αναλυτικά από τη σελίδα 20 του σχολικού).
Έστω A, T, C, G οι βάσεις της μίας αλυσίδας το DNA και A΄, T΄, C΄, G΄ οι βάσεις της $2^{ης}$ αλυσίδας. Τότε λόγω συμπληρωματικότητας ισχύει:

A=T΄
T=A΄
C=G΄
G=C΄

Στη δεύτερη αλυσίδα θα ισχύει: A΄+ C΄/ T΄+G΄= T+G/A+C =4/3

Στο μόριο DNA θα ισχύει Aολ + Cολ / Tολ + Gολ = 1 (γιατί οι ολικές αδενίνες του μορίου θα είναι ίσες με τις ολικές θυμίνες και οι ολικές κυτοσίνες θα είναι ίσες με τις ολικές γουανίνες, εξαιτίας της συμπληρωματικότητας των βάσεων.)

Επιμέλεια: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1 → δ
2 → δ
3 → γ
4 → α
5 → β

ΘΕΜΑ 2ο

1. **Α.** Σωστό
   Β. Λάθος
   Γ. Σωστό
   Δ. Λάθος
   Ε. Σωστό
   Στ. Λάθος
   Ζ. Σωστό
   Η. Σωστό
   Θ. Λάθος
   Ι. Λάθος
2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 81 «πολλαπλά αλληλόμορφα γονίδια».
3. Βλέπε σχολικό βιβλίο Β λυκείου σελ. 142 «Πρόφαση Ι».

ΘΕΜΑ 3ο

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά ανθρώπινα κύτταρα.

	Μόρια DNA	Χρωμοσώματα	Ζεύγη αδελφών χρωματίδων
G1	46	46	-
G2	92	46	46
Μετάφαση μίτωσης	92	46	46
Ανάφαση μίτωσης	92	92	-
Πρόφαση I	92	46	46
Μετάφαση I	92	46	46
Ανάφαση I	92	46	46
Πρόφαση II	46	23	23
Μετάφαση II	46	23	23
Ανάφαση II	46	46	-

2. **Α)** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.65 : «Η μέθοδος ......από απολιθώματα.»

Β) Στην μέθοδο PCR πραγματοποιείται αποδιάταξη και απελευθερώνονται οι δύο μητρικοί κλώνοι. Στην συνέχεια κάθε κλώνος χρησιμοποιείται ως καλούπι για την δημιουργία νέων κλώνων. Η αντιγραφή γίνεται με συνεχή τρόπο και ξεκινά απέναντι από το 3΄άκρο του κάθε παλιού κλώνου. Χρησιμοποιούνται έτοιμα πρωταρχικά τμήματα συμπληρωματικά στο 3΄άκρο των μητρικών αλυσίδων.

Άρα για τον κλώνο: 5΄TTACGCAATGCTGACCGGAT3΄ θα χρησιμοποιηθεί το πρωταρχικό τμήμα 5΄AUCCG3΄

Και για τον κλώνο : 3΄AATGCGTTACGACTGGCCTA5΄θα χρησιμοποιηθεί το πρωταρχικό τμήμα 5΄UUACG3΄

3. Βλέπε σχολικό βιβλίο Β λυκείου, σελ. 82: « Τα ένζυμα γενικά καταλύουν ... για τον σχηματισμό των προϊόντων.»

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Από τους γονείς Ι1 και Ι2 που είναι υγιείς και τον γιό τους ΙΙ3 που είναι ασθενής καταλαβαίνουμε πως το γονίδιο της ασθένειας είναι υπόλειπόμενο γιατί αν και υπήρχε στους γονείς δεν μπόρεσε να εκφραστεί.

Από τον πίνακα και το άτομο ΙΙ3 που πάσχει καταλαβαίνουμε πως το παθολογικό γονίδιο δεν κόβεται από την EcoRI και διατηρεί το αρχικό του μήκος (400ζβ) .Από τα φυσιολογικά άτομα και τα στοιχεία του πίνακα παρατηρούμε πως το φυσιολογικό γονίδιο κόβεται σε μία θέση από την EcoRI και προκύπτουν δυο τμήματα 300 και 100 ζβ αντίστοιχα.

Αν το γονίδιο ασθένειας ήταν αυτοσωμικό υπολειπόμενο το άτομο ΙΙ3 θα ήταν ομόζυγο στα αυτοσωμικά υπολειπόμενα γονίδια και θα είχε κληρονομήσει ένα απ' τον κάθε γονέα. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί απ' τον πίνακα διαπιστώνουμε πως ο γονέας Ι2 δεν διαθέτει το υπολειπόμενο γονίδιο (φέρει μόνο το επικρατές φυσιολογικό που έχει κοπεί απ' την περιοριστική ενδονουκλεάση) .

Άρα το γονίδιο της ασθένειας είναι φυλοσύνδετο υπολειπόμενο.

Έστω X^{A} το φυλοσύνδετο επικρατές γονίδιο που εκφράζει τον φυσιολογικό φαινότυπο και X^{α} το φυλοσύνδετο υπολειπόμενο γονίδιο της ασθένειας.

Β. Ι1: $X^{A}X^{\alpha}$, Ι2X^{A}Ψ, ΙΙ1: X^{A}Ψ, ΙΙ2: $X^{A}X^{\alpha}$, ΙΙ3: X^{α}Ψ, ΙΙ4: $X^{A}X^{A}$

P: $X^{A}X^{\alpha}$ x X^{A}Ψ

γ: X^{A}, X^{α} x X^{A}, Ψ

F1: $X^{A}X^{A}$, $X^{A}X^{\alpha}$, X^{A}Ψ , X^{α}Ψ

Φ.Α.: 2 θηλυκά φυσιολογικά, 1αρσενικό φυσιολογικό, 1 αρσενικό ασθενές

Αρα υπάρχει 25% πιθανότητα να απόκτήσουν επόμενο γιο ασθενή

Αιτιολόγηση: - 1ος νόμος Mendel, - 3 κανονες φυλοσύνδετης κληρονομικότητας , - κάθε κύηση είναι ανεξάρτητο γεγονός ......(αναλυτικά)

Γ. Η EcoRI δρά μόνο στο φυσιολογικό γονίδιο, σε μία θέση αναγνώρισης και το διασπά σε δύο τμήματα. Δεν δρα στο παθολογικό γονίδιο.

Δ. Ο ανιχνευτής 5'CCUAUG 3' θα προσκολληθεί αντιπαράλληλα και συμπληρωματικά στην περιοχή 3΄GGATAC5΄ του γονιδίου, που φαίνεται με έντονα σκούρα γράμματα στο γονίδιο. Η περιοχή αυτή αποτελεί το εσώνιο.

5' AGGTCATGGAATTC**CATAGG**ACGATT 3'
3' TCCAGTACCTTAAGGTATCCTGCTAA 5'

Άρα η πάνω αλυσίδα είναι κωδική γιατί διαβάζοντάς τη από το 5΄προς το 3΄άκρο συνάντάμε το κωδικόνιο ATG που αντιστοιχεί στο κωδικόνιο έναρξης 5΄AUG3΄του mRNA και συνεχίζοντας το διάβασμα με βήμα τριπλέτας, προσπερνώντας το εσώνιο, συναντούμε ακόμα 4 κωδικόνια αμινοξέων.

Ε. Παρατηρούμε πως στο τμήμα του φυσιολογικού γονιδίου που δίνεται υπάρχει η θέση αναγνώρισης της EcoRI. Ξέροντας πως το παθολογικό γονίδιο δεν κόβεται από την περιοριστική ενδονουκλεάση καταλαβαίνουμε πως η αντικατάσταση βάσης έγινε μέσα στη θέση αναγνώρισης και δημιούργησε κωδικόνιο λήξης με αποτέλεσμα να μην κωδικοποιείται πεπτίδιο. Συγκεκριμένα αντικαταστάθηκε το 1ο νουκλεοτίδιο της 2ης τριπλέτας της φυσιολογικής κωδικής και αντί για νουκλεοτίδιο με G τοποθετήθηκε νουκλεοτίδιο με T. Ετσι δημιουργήθηκε πρόωρο κωδικόνιο λήξης και ταυτόχρονα χάλασε η θέση αναγνώρισης της EcoRI.

Στ. Ατομο ΙΙ2 $X^AX^α$: 1ος κύκλος PCR 2 X^A , 2 $X^α$ / 2ος κύκλος PCR 4 X^A , 4 $X^α$ **/ 3ος κύκλος PCR 8** X^A , 8 $X^α$.

Αν προσθέσουμε την EcoRI θα προκύψουν (8x2)+8=24 τμήματα DNA.

Ατομο ΙΙ3 $X^αΨ$: 1ος κύκλος PCR 2 $X^α$, 2 Ψ / 2ος κύκλος PCR 4 $X^α$, 4 Ψ /3ος κύκλος PCR 8 $X^α$, 8 Ψ. Η EcoRI δεν κόβει τα μόρια αυτά άρα θα προκύψουν 8 τμήματα.

Επιμέλεια: Μουρίκη Μαριλένα

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. δ.
Α2. β
Α3. δ.
Α4. γ.
Α5. δ.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Το μιτοχονδριακό DNA στον άνθρωπο είναι κυκλικό δίκλωνο μόριο.

Αν Χ είναι ο αριθμός των «νουκλεοσωμάτων» τότε ο αριθμός των κομματιών του DNA που συνδέουν δυο «νουκλεοσώματα» είναι και αυτός Χ, γιατί το DNA αυτό είναι κυκλικό μόριο.

Γύρω από κάθε «νουκλεόσωμα» τυλίγεται DNA μήκους 80 ζευγών βάσεων και το ενδιάμεσο τμήμα DNA μεταξύ δύο «νουκλεοσωμάτων» είναι 20 ζευγών βάσεων, άρα θα έχουμε την εξίσωση:

$$80X + 20X = 16.000 \Rightarrow 100X = 16.000 \Rightarrow X = 160$$

Άρα έχουμε 160 «νουκλεοσώματα».

Κάθε «νουκλεόσωμα» αποτελείται από 4 μόρια πρωτεϊνών, επομένως συνολικά έχουμε:

$$4*160 = 640 \text{ πρωτεΐνες}$$

(Η άσκηση είναι υποθετική γιατί νουκλεοσώματα συναντούμε μόνο στο πυρηνικό DNA)

Β2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 97: «Τα ερυθρά αιμοσφαίρια … της HbF.»

Σε ένα σωματικό κύτταρο στην G1 συναντούμε 4 γονίδια α, 2 γονίδια β, 2 γονίδια γ και 2 γονίδια δ. Σύνολο 10 γονίδια που σχετίζονται με την παραγωγή των αλυσίδων των αιμοσφαιρινών.

Β3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 98 «Ο αλφισμός …. μειωμένη ενεργότητα.»

Β4. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 64 «Στους ανώτερους ευκαρυωτικούς …. στο κύτταρο ξενιστή.»

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Το μιτοχονδριακό ανθρώπινο DNA είναι κυκλικό δίκλωνο.

1) Η EcoRI το έκοψε σε 6 σημεία. Η EcoRI αναγνωρίζει την αλληλουχία 5΄GAATTC3΄(σε δίκλωνη μορφή)
2) Σε κάθε θέση αναγνώρισης η EcoRI σπάει 2 φωσφοδιεστερικούς δεσμούς και 8 δ.Η. Αρα συνολικά έσπασαν 6x2=12 φ.δ. και 6x8=48 δ.Η.
3) Ο ελάχιστος αριθμός πλασμιδίων που θα χρειαστούν είναι 6. Όλα τα τμήματα θα φέρουν εκατέρωθεν μονόκλωνα άκρα και είναι κατάλληλα για ανασυνδυασμό , αλλά ορισμένα πλασμίδια ξαναγίνονται κυκλικά χωρίς να λάβουν ξένο DNA.
4) Σε κάθε ανασυνδυασμένο πλασμίδιο δημιουργούνται 4 φ.δ. από την DNA δεσμάση. Αρα θα σχηματιστούν 6x4=24 φ.δ.
5) Στα κατώτερα πρωτόζωα το μιτοχονδριακό DNA είναι γραμμικό δίκλωνο. Αρα θα είχε κοπεί σε 5 σημεία. Η EcoRI θα είχε σπάσει συνολικά 5x2=10 φ.δ. και 5x8=40 δ.Η. Επειδή τα δύο ακραία τμήματα του μορίου δεν θα είχαν εκατέρωθεν μονόκλωνα άκρα, τα τμήματα που θα ήταν κατάλληλα για ανασυνδυασμό θα ήταν 4 και θα χρειάζοντουσαν τουλάχιστον 4 πλασμίδια. Κατά τη δημιουργία ανασυνδυασμένων πλασμιδίων θα σχηματίζονταν 4x 4=16 φ.δ.

Γ2. **α.** Συμφώνα με τον 1ο Νόμο του Mendel τα ομόλογα χρωμοσώματα, καθώς και τα αλληλόμορφα γονίδια που βρίσκονται σ' αυτά διαχωρίζονται κατά τη μείωση, έτσι ώστε κάθε γαμέτης να έχει από ένα αλληλόμορφο, οι απόγονοι προκύπτουν από τον τυχαίο συνδυασμό των γαμετών των ατόμων που διασταυρώθηκαν.

Χρώμα τριχώματος	♀	♂
λευκό	44	43
καφέ	21	22
Σύνολο	65	65

Παρατηρούμε ότι η αναλογία φύλου (♀) : (♂) = (65) : (65) = 1(♀) : 1(♂) και η αναλογία λευκά προς καφέ είναι 2:1 και στα δύο φύλα, άρα συμπεραίνουμε πως η ιδιότητα αυτή ελέγχεται από ένα ζευγάρι αυτοσωμικών γονιδίων και υπάρχει θνησιγόνο υπολειπόμενο γονίδιο διότι έχουμε αναλογία 2:1, και όχι 3:1 άρα λείπει το ¼ των απογόνων.

Το θνησιγόνο γονίδιο δεν μπορεί να είναι το αλληλόμορφο γονίδιο που ελέγχει το καφέ χρώμα (το συμβολίζω με Α) διότι οι απόγονοι αυτοί είναι στην αναλογία 1 και με βάση το 1ο νόμο του Μέντελ είναι ομόζυγοι και ζουν. Επομένως το θνησιγόνο γονίδιο το φέρουν τα άτομα με λευκό χρώμα τριχώματος, είναι το αλληλόμορφο του Α (το συμβολίζω με α) το οποίο σε ετερόζυγη κατάσταση με το Α δίνει λευκό χρώμα και όποιο άτομο το φέρει σε ομόζυγη κατάσταση (αα) πεθαίνει.
Το αλληλόμορφο Α είναι επικρατές του α γιατί όποιος το φέρει δεν πεθαίνει.

β. Διασταύρωση:
Γονείς: Αα ⊗ Αα
Γαμέτες: Α, α / Α, α
Απόγονοι: ΑΑ, Αα, Αα, αα
Γονότυποι: 1(ΑΑ): 2(Αα): 1(αα)
Φαινότυποι: 1(καφέ χρώμα τριχώματος): 2(λευκό χρώμα): 1(πεθαίνει)

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Σ' ένα δίκλωνο μόριο DNA οι δύο αλυσίδες του είναι μεταξύ τους αντιπαράλληλες, δηλαδή το 3' άκρο της μιας αλυσίδας είναι απέναντι από το 5' άκρο της άλλης.

Κατά τη μεταγραφή η RNA πολυμεράση συνθέτει το mRNA συνδέοντας τα ριβονουκλεοτίδια μεταξύ τους με 3' – 5' φωσφοδιεστερικό δεσμό.

Η μεταγραφή έχει προσανατολισμό 5' → 3' . Το μόριο RNA που συντίθεται είναι συμπληρωματικό προς τη μία αλυσίδα του DNA του γονιδίου. Η αλυσίδα αυτή είναι η μεταγραφόμενη και ονομάζεται μη κωδική. Η συμπληρωματική αλυσίδα του DNA του γονιδίου ονομάζεται κωδική.

Το RNA είναι το κινητό αντίγραφο της πληροφορίας ενός γονιδίου.

Το mRNA είναι αντιπαράλληλο προς τη μη κωδική αλυσίδα του DNA.

Ο όρος κωδικόνιο δεν αφορά μόνο το mRNA αλλά και το γονίδιο από το οποίο παράγεται. Ο γενετικός κώδικας είναι κώδικας τριπλέτας, δηλαδή μια τριάδα νουκλεοτιδίων, το κωδικόνιο, κωδικοποιεί ένα αμινοξύ.

Σύμφωνα με το γενετικό κώδικα, κωδικόνιο έναρξης στη κωδική αλυσίδα του DNA είναι το 5'ATG3' και κωδικόνιο λήξης ένα από τα 5'TAA3' 5'TGA3' και 5'TAG3'.

Ελέγχοντας το παραπάνω μόριο DNA, βρίσκω κωδικόνιο έναρξης 5΄ATG3΄στη πάνω αλυσίδα από δεξιά προς τα αριστερά, προχωρώ με βήμα τριπλέτας και βρίσκω το επόμενο κωδικόνιο της Βαλίνης. Τα κωδικόνια για τα επόμενα αμινοξέα καθώς και το κωδικόνιο λήξης τα βρίσκω μόνο στην αλυσίδα 1, οπότε υποθέτω ότι αυτί είναι η κωδική αλυσίδα του γονιδίου.

Επομένως:
Πρόδρομο mRNA: 5’– AGCCGAUGGUUGGUGGCGGAGAUAGCAUUUC –3’
5’ αμετάφραστη περιοχή: 5’–AGCCG–3’
3’ αμετάφραστη περιοχή: 5’–CAUUUC–3’
Εσώνιο: 5’– GGUGG –3’
Εξώνιο 1ο: 5’–AGCCGAUGGUU–3’
Εξώνιο 2ο: 5’–CGGAGAUAGCAUUUC–3’
Κωδικόνιο λήξης: 5’ – UAG – 3’

Δ2. Ώριμο mRNA: 5’–AGCCGAUGGUUCGGAGAUAGCAUUUC–3’

Όταν ένα γονίδιο που περιέχει εσώνια μεταγράφεται, δημιουργείται το πρόδρομο mRNA που περιέχει και εξώνια και εσώνια. Το πρόδρομο mRNA μετατρέπεται σε mRNA με τη διαδικασία της ωρίμανσης, κατά την οποία τα εσώνια κόβονται από μικρά ριβονουκλεοπρωτεϊνικά «σωματίδια» και απομακρύνονται. Τα ριβονουκλεοπρωτεϊνικά σωματίδια αποτελούνται από snRNA και από πρωτεΐνες και λειτουργούν ως ένζυμα: κόβουν τα εσώνια και συρράπτουν τα εξώνια μεταξύ τους. Έτσι σχηματίζεται το «ώριμο» mRNA.

Δ3. **α.** Το δίκλωνο τμήμα DNA που βγαίνει από το mRNA είναι:

Αλυσίδα 1: 3’-CTTTACGATAGAGGCTTGGTAGCCGA-5’
Αλυσίδα 2: 5’-GAAATGCTATCTCCGAACCATCGGCT-3’

β. Το mRNA χρησιμοποιείται σαν καλούπι για τη σύνθεση μιας συμπληρωματικής αλυσίδας DNA (cDNA), σύνθεση του cDNA γίνεται από το ένζυμο αντίστροφη μεταγραφάση. Το cDNA στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η αλυσίδα 2.

Παράγονται υβριδικό μόριο cDNA-mRNA. Το mRNA διασπάται με κατάλληλες χημικές ουσίες ή αποδιατάσσεται με θέρμανση και το μονόκλωνα cDNA χρησιμεύουν σαν καλούπι για τη σύνθεση μιας συμπληρωματικής αλυσίδας DNA. Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία δίκλωνων μορίων DNA με τη βοήθεια της DNA πολυμεράσης. Η αλυσίδα 1 δημιουργείτε από την DNA πολυμεράση.

Δ4. Αν συγκρίνουμε την αλληλουχία του ανθρώπου με του χιμπατζή θα δούμε ότι διαφέρει σε 2 νουκλεοτίδια. Συγκεκριμένα στο εσώνιο το 4ο νουκλεοτίδιο από το 5’ άκρο του, στον άνθρωπο είναι G ενώ στον χιμπατζή

C. Αυτή η αλλαγή είναι αντικατάσταση βάσης και της φαίνεται είναι ουδέτερη μετάλλαξη για τη δεν έχει επίπτωσή στη λειτουργικότητα του πεπτιδίου. Η επόμενη αλλαγή είναι στο 2ο κωδικόνιο όπου από 5'GTT3' στον άνθρωπο, έγινε 5'GTG3' στον χιμπατζή, τα δυο αυτά κωδικόνια είναι συνώνυμα, άρα η μετάλλαξη χαρακτηρίζεται σιωπηλή.

Αν συγκρίνουμε την αλληλουχία του ανθρώπου με της γάτας θα δούμε ότι διαφέρει σε 5 νουκλεοτίδια. Τα 4 από αυτά είναι αντικατάσταση βάσης, δυο από αυτές είναι στην 3' αμετάφραστη περιοχή και μία στην 5' αμετάφραστη περιοχή, αυτές οι αλλαγές είναι ουδέτερες μεταλλάξεις και η τέταρτη είναι στο 2ο κωδικόνιο ίδια με του χιμπατζή, άρα είναι σιωπηλή μετάλλαξη. Έχουμε και μία προσθήκη (ή έλλειψη) νουκλεοτιδίου (T) στο εσώνιο που είναι ουδέτερη μετάλλαξη.

Αν συγκρίνουμε την αλληλουχία του ανθρώπου με του κοτσυφιού θα δούμε ότι διαφέρει σε 9 νουκλεοτίδια. Τα 7 από αυτά είναι αντικατάσταση βάσης, δυο από αυτές είναι στην 3' αμετάφραστη περιοχή και δυο στην 5' αμετάφραστη περιοχή, αυτές οι αλλαγές είναι ουδέτερες μεταλλάξεις. Άλλη μία αντικατάσταση είναι στο 2ο κωδικόνιο ίδια με του χιμπατζή, άρα είναι σιωπηλή μετάλλαξη, της σιωπηλή μετάλλαξη έχουμε και στο κωδικόνιο λήξης, όπου στον άνθρωπο είναι 5'TAG3' και στο κοτσύφι είναι 5'TAA3'. Η τελευταία αντικατάσταση είναι στο 4ο κωδικόνιο όπου στον άνθρωπο είναι 5'AGA3' και κωδικοποιεί το αμινοξύ Αργινίνη ενώ στο κοτσύφι είναι 5'AGC3' και κωδικοποιεί το αμινοξύ Σερίνη, αυτή η αλλαγή δεν έχει επίδραση στη λειτουργικότητα της πρωτεΐνης άρα και αυτή η μετάλλαξη είναι ουδέτερη. Έχουμε και δύο προσθήκες (ή έλλειψη) νουκλεοτιδίων (T&G) στο εσώνιο που είναι ουδέτερες μεταλλάξεις.

Επιμέλεια: Μουρίκη Μαριλένα

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. 4
A2. 1
A3. 1
A4. 2
A5. 2

ΘΕΜΑ 2ο

B1.

Στήλη Ι	Γονιδιωματική Βιβλιοθήκη	cDNA Βιβλιοθήκη
1. Το 1ο εσώνιο γονιδίου μιας ιστόνης	+	-
2. Υποκινητής του γονιδίου της προϊνσουλίνης	+	-
3. Γονίδιο snRNA	+	-
4. Το 3ο εξώνιο του γονιδίου της RNA πολυμεράσης	+	+
5. 5' αμετάφραστη περιοχή του γονιδίου της RNA πολυμεράσης	+	+
6. 3΄αμετάφραστη περιοχή του γονιδίου της β-αλυσίδας της αιμοσφαιρίνης	+	-
7. Γονίδιο rRNA μικρής ριβοσωμικής υπομονάδας	+	-
8. Το 2ο εξώνιο του γονιδίου της προϊνσουλίνης	+	+
9. Το γονίδιο της β-γαλακτοσιδάσης του οπερονίου της λακτόζης	-	-

B2. Ο γενετικός κώδικας χαρακτηρίζεται σχεδόν καθολικός γιατί όλοι οι οργανισμοί (με ελάχιστες εξαιρέσεις) έχουν τον ίδιο γενετικό κώδικα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το mRNA από οποιονδήποτε οργανισμό μπορεί να μεταφραστεί σε εκχυλίσματα φυτικών, ζωικών ή βακτηριακών κυττάρων *in vitro* και να παραγάγει την ίδια πρωτεΐνη. Αυτή την ιδιότητα την εκμεταλλεύτηκε η τεχνολογία του ανασυνδυασμένου DNA στην cDNA βιβλιοθήκη όπου με αυτή την τεχνική δίνουν τη δυνατότητα σύνθεσης της πρωτεΐνης, ενός συγκεκριμένου γονιδίου του δότη, στο κύτταρο-ξενιστή.

B3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 83: «Κάθε κύηση ….. μέσα σε μια οικογένεια.»

B4. Οι κληρονομικές ασθένειες είναι:

- Σύνδρομο Down, οφείλεται στην ύπαρξη ενός επιπλέον χρωμοσώματος 21. Η διάγνωση γίνεται με καρυότυπο.

- Τρισωμία 13 και τρισωμία 18, οφείλεται στην ύπαρξη ενός επιπλέον χρωμοσώματος. Η διάγνωση γίνεται με καρυότυπο.
- Σύνδρομο φωνή της γάτας, έλλειψη τμήματος στο μικρό βραχίονα του χρωμοσώματος 5. Η διάγνωση γίνεται με καρυότυπο. Επιπλέον, είναι απαραίτητη η χρώση των χρωμοσωμάτων με τεχνικές που δημιουργούν ζώνες (ζώνες Giemsa) στο χρωμόσωμα που μας ενδιαφέρει. Τέλος, συγκρίνουμε το χρωμόσωμα με φυσιολογικό που βάφτηκε με τις ίδιες χρωστικές.
- Φαινυλκετονουρία (PKU), οφείλεται στην έλλειψη ενζύμου που μετατρέπει το αμινοξύ φαινυλαλανίνη σε τυροσίνη με αποτέλεσμα τη συσσώρευση φαινυλαλανίνης. Παρεμποδίζεται η φυσιολογική ανάπτυξη και η λειτουργία των κυττάρων του εγκεφάλου με συνέπεια τη διανοητική καθυστέρηση. Η διάγνωση γίνεται με έλεγχο DNA για την ύπαρξη του μεταλλαγμένου γονιδίου (μοριακή διάγνωση).

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Στα ευκαρυωτικά κύτταρα κάθε γονίδιο έχει το δικό του υποκινητή και μεταγράφεται αυτόνομα, η RNA πολυμεράση προσδένεται στον υποκινητή με τη βοήθεια μεταγραφικών παραγόντων. Στους πολυκύτταρους ευκαρυωτικούς οργανισμούς οι μεταγραφικοί παράγοντες παρουσιάζουν τεράστια ποικιλία και κάθε κυτταρικός τύπος περιέχει διαφορετικά είδη μεταγραφικών παραγόντων. Διαφορετικός συνδυασμός μεταγραφικών παραγόντων ρυθμίζει τη μεταγραφή κάθε γονιδίου. Μόνο όταν ο σωστός συνδυασμός των μεταγραφικών παραγόντων προσδεθεί στον υποκινητή ενός γονιδίου, αρχίζει η RNA πολυμεράση τη μεταγραφή ενός γονιδίου.
Ο συνδυασμός των μεταγραφικών παραγόντων που απαιτούνται για τη μεταγραφή του γονιδίου I βρίσκεται στα παγκρεατικά κύτταρα, άρα το γονίδιο αυτό είναι της προϊνσουλίνης.
Ο συνδυασμός των μεταγραφικών παραγόντων που απαιτούνται για τη μεταγραφή του γονιδίου II βρίσκεται στα πρόδρομα ερυθροκύτταρα, άρα το γονίδιο αυτό είναι της β πολυπετιδικής αλυσίδας της αιμοσφαιρίνης Α.
Ο συνδυασμός των μεταγραφικών παραγόντων που απαιτούνται για τη μεταγραφή του γονιδίου III βρίσκεται και στους δυο κυτταρικούς τύπους, γι’ αυτό θα αναφέρεται σε ένα γονίδιο που εκφράζεται και στα δύο κύτταρα όπως αυτό της ιστόνης.

Γ2. **α.** Αν η ασθένεια που δείχνει το γενεαλογικό δέντρο ήταν επικρατής, τότε κάθε ασθενής απόγονος έχει τουλάχιστον ένα γονέα ασθενή. Στο παραπάνω δέντρο αυτό δεν ισχύει, διότι το άτομο II_1 που πάσχει έχει και τους δύο γονείς του (I_1 & I_2) υγιείς, άρα η ασθένεια είναι υπολειπόμενη.
Αν η ασθένεια ήταν υπολειπόμενη φυλοσύνδετη, τότε μία μητέρα που πάσχει θα είχε όλους τους αρσενικούς απόγονους της να εμφανίζουν την ασθένεια, γιατί μόνο από αυτή θα έπαιρναν το χρωμόσωμα $X^{α}$, αυτό όμως δεν ισχύει, διότι η μητέρα III_3 που είναι ασθενής έχει έναν υγιή γιό (IV_2). Συνεπώς η ασθένεια που υποδεικνύει το δέντρο κληρονομείται με αυτοσωμικό υπολειπόμενο τρόπο.

β.
Α: φυσιολογικό γονίδιο.
α: γονίδιο υπεύθυνο για την ασθένεια.
I_1: Αα
I_2: Αα
II_1: αα
II_2: Αα
II_3: αα
III_1: ΑΑ ή Αα
III_2: αα
III_3: αα
III_4: Αα
IV_1: Αα
IV_2: Αα
IV_3: αα
γ. $IV_1 \otimes IV_2$: Αα ⊗ Αα
Γαμ: Α , α / Α , α
Απόγονοι: ΑΑ , Αα , Αα , αα
Η πιθανότητα το άτομο V_1 να είναι φυσιολογικό είναι ¾ και η πθανότητα να είναι κορίτσι είναι ½. Άρα η πιθανότητα να είναι και τα δύο είναι:

¾ * ½ = 3/8 (37,5%)

δ. Η πιθανότητα και οι δύο σύζυγοι να είναι φορείς της ίδιας ασθένειας που κληρονομείται με αυτοσωμικό υπολειπόμενο τρόπο είναι πολύ μικρή. Αυξάνεται όμως σε περίπτωση που οι δύο σύζυγοι είναι στενοί συγγενείς, όπως ξαδέλφια στην συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτό συμβαίνει, επειδή τα άτομα με κοινούς προγόνους είναι πιθανότερο να έχουν τα ίδια υπολειπόμενα αλληλόμορφα σε σχέση με άτομα μη συγγενικά

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η πάνω αλυσίδα είναι κωδική γιατί διαβάζοντάς την 5΄προς 3΄συναντούμε το κωδικόνιο ATG που αντιστοιχεί στο κωδικόνιο έναρξης 5΄AUG3΄ του mRNA και συνεχίζοντας το διάβασμα με βήμα τριπλέτας (αφού είμαστε σε βακτηριακό DNA και δεν υπάρχουν εσώνια) συναντούμε ακόμα 5 κωδικόνια αμινοξέων και στη συνέχεια το κωδικόνιο TAA που αντιστοιχεί στοκωδικόνιο λήξης 5΄UAA3΄ του mRNA.

Δ2. Μετά την αναστροφή το γονίδιο έχει μορφή
5΄TAATGGATATTTAACTTGCATAATC3΄
3΄ATTACCTATAAATTGAACGTATTAG5΄

mRNA: 5΄UAAUGGAUAUUUAACUUGCAUAAUC3΄
λόγω της αναστροφής δημιουργείται πρόωρο κωδικόνιο λήξης και παράγεται τριπεπτίδιο στο οποίο μόνο τα 2 πρώτα αμινοξέα ταυτίζονται με τα 2 πρώτα αμινοξέα της φυσιολογικής αλυσίδας

Δ3. Η αναστροφή ανήκει στις δομικές χρωμοσωμικές ανωμαλίες. Σελ. 101 σχολικού βιβλίου : «Οι δομικές χρωμοσωμικές ……. Ζώνες Giemsa.»

Δ4.
1η περίπτωση: γονότυπος ατόμου $I^{\alpha\alpha}I^{-}$
Γαμέτες : $I^{\alpha\alpha}$, I^{-}
Άρα παράγει τους μισούς γαμέτες φυσιολογικούς με δύο γονίδια α και τους άλλους μισούς γαμέτες χωρίς κανένα γονίδιο α
2η περίπτωση: γονότυπος ατόμου $I^{\alpha}I^{\alpha}$
Γαμέτες : I^{α}, I^{α}
Αρα όλοι οι γαμέτες θα είναι μη φυσιολογικοί και θα περιέχουν 1 γονίδιο α

Δ5. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ 105 : «Χαρακτηριστικό παράδειγμα ….. επιδιορθωτικά ένζυμα.»

Επιμέλεια: Γερολυμάτου Ανδρονίκη

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.

i) α=1, β=1
γ=1, δ=10

ii) α=3, β=5
γ=1, δ=10

iii) α=1, β=10
γ=2, δ=2

iv) α=1, β=10
γ=7, δ=8

v) α=1, β=10
γ=i, δ=i

vi) α=1, β=10
γ=1, δ=10

Α2.

i) Α[6]
Α[7]
Α[3]
Α[9]
Α[3]

ii) Για i από **1** μέχρι **5**

```
Για i από 1 μέχρι 5
      Αντιμετάθεσε Α[i],Α[11-i]
Τέλος_επανάληψης
```

Α3.

i)
```
ΑΝ ΒΑΘΜΟΣ > ΜΟ ΤΟΤΕ
      ΓΡΑΨΕ 'Πολύ Καλά'
ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ ΜΟ – ΒΑΘΜΟΣ <= 2 ΤΟΤΕ
      ΓΡΑΨΕ 'Καλά'
ΑΛΛΙΩΣ
      ΓΡΑΨΕ 'Μέτρια'
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

ii)
```
ΑΝ ΤΜΗΜΑ='Γ1' ΚΑΙ ΒΑΘΜΟΣ > 15 ΤΟΤΕ
      ΓΡΑΨΕ ΕΠΩΝΥΜΟ
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

iii)
```
ΑΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ<>'Ν' ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΗ<>'ν' ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΗ <>'Ο'
& ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΗ <>'ο' ΤΟΤΕ
      ΓΡΑΨΕ 'Λάθος απάντηση'
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

iv)
```
ΑΝ Χ<0 Ή ΗΜ(Χ)=0 ΤΟΤΕ
      ΓΡΑΨΕ 'Λάθος δεδομένο'
ΑΛΛΙΩΣ
      Υ←(Χ^2+5*Χ+1) / (Τ_Ρ(Χ)*ΗΜ(Χ))
      ΓΡΑΨΕ Υ
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

Α4.

```
Για x από 3 μέχρι 19 με_βήμα2
   Για y από 19 μέχρι x με_βήμα-2
      Αν Π[y]< Π[y-2] τότε
         Αντιμετάθεσε Π[y],Π[y-2]
      Τέλος_αν
   Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
```

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

Θα εμφανιστούν οι τιμές 5,4,7,9,9,16,11,25,13,36.

Β2.

i)
```
i←99
Όσο i >=1 επανάλαβε
   x←i^2
   Εμφάνισε x
   i←i−2
Τέλος_επαναληψης
```

ii)
```
i←99
Αρχή_επανάληψης
   x←i^2
   Εμφάνισεx
   i←i−2
Μέχρις_ότου i<1
```

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_3
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: min_ον1, ον, min_ον2
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: χωρ, μεγ, min1, min2, ποσοστό
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: πλ_όλων, πλ_10
ΑΡΧΗ
    πλ_όλων ← 0
    πλ_10 ← 0
    χωρ ← 1000
    ΔΙΑΒΑΣΕ μεγ
    min1 ← 1001
    min_ον1 ← ' '
    ΟΣΟ μεγ<= χωρ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
        ΔΙΑΒΑΣΕ ον
        ΓΡΑΨΕ 'Επιτρεπτή αποθήκευση'
        χωρ ← χωρ – μεγ
        πλ_όλων ← πλ_όλων + 1
        ΑΝ μεγ> 10 ΤΟΤΕ
            πλ_10 ← πλ_10 + 1
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΑΝ μεγ<min1 ΤΟΤΕ
            min2 ← min1
            min_ον2 ← min_ον1
            min1 ← μεγ
            min_ον1 ← ον
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ μεγ<min2 ΤΟΤΕ
            min2 ← μεγ
            min_ον2 ← ον
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΔΙΑΒΑΣΕ μεγ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ποσοστό ← πλ_10 / πλ_όλων * 100
    ΓΡΑΨΕ ποσοστό, '%'
```

```
    ΓΡΑΨΕ min_ον1, min_ον2
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_4
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: κοιν,Εμβ[8],Ορ[5],Εμβ_ορ,κοιν_δ[5,8],ΜΟ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i,j,όροφος,διαμ
    ΛΟΓΙΚΕΣ: βρέθηκε
ΑΡΧΗ
    ΔΙΑΒΑΣΕ κοιν
    ΓΙΑ Ι ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 8
        ΔΙΑΒΑΣΕ Εμβ[i]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    Ορ[1] ← κοιν * 5/100
    Ορ[2] ← κοιν * 15/100
    Ορ[3] ← κοιν * 20/100
    Ορ[4] ← κοιν * 25/100
    Ορ[5] ← κοιν * 35/100
    Εμβ_ορ ← 0
    ΓΙΑ iΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 8
        Εμβ_ορ ← Εμβ_ορ + Εμβ[i]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 5
        ΓΙΑ jΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 8
            κοιν_δ[i,j] ← Εμβ[j] / Εμβ_ορ * Ορ[i]
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΜΟ ← κοιν / 40
    όροφος ← 0
    διαμ ← 0
    βρέθηκε ← ΨΕΥΔΗΣ
    i ← 1
    ΟΣΟ i<= 5 ΚΑΙ βρέθηκε = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
         j ← 8
         ΟΣΟ j>= 1 ΚΑΙ βρέθηκε = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
```

```
                ΑΝ κοιν_δ[i,j]> ΜΟ ΤΟΤΕ
                    βρέθηκε ← ΑΛΗΘΗΣ
                    όροφος ← i
                    διαμ ← j
                ΑΛΛΙΩΣ
                    j ← j – 1
                ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
            i ←i + 1
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΓΡΑΨΕ όροφος,διαμ
    ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Σπύρος

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.

i) Α

1	0	0	0	0
0	2	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	2	0
0	0	0	0	1

ii) Θα εμφανιστεί η τιμή 9.

Α2.

```
Αλγόριθμος Θέμα_14
Δεδομένα //Α//
κ←4
Για iαπό 1 μέχρι 4
    λ←3
    Για jαπό 1 μέχρι 3
        B[i,j]←A[κ,λ]
        λ←λ–1
    Τέλος_επανάληψης
    κ← κ–1
Τέλος_επανάληψης
Αποτελέσματα //Β//
Τέλος Θέμα_14
```

Α3.

1) κ
2) >
3) i
4) Π[κ] ή **4)** Π[θ]
5) Π[θ] ή **5)** Π[κ]

Α4.

i)Εμφανίζονται οι τιμές 5,-2,5,100.

ii)

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Ασκ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: Α,Β
ΑΡΧΗ
    Α←5
    Β←-2
    ΓΡΑΨΕ Α,Β
    Β←Σ(Β)
    ΓΡΑΨΕ Α,Β
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Σ(Β): ΑΚΕΡΑΙΑ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: Β
ΑΡΧΗ
    Σ←100
ΤΕΛΟΣ_ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
```

Σημείωση: Η συνάρτηση Σ απλά επιστρέφει στο κύριο πρόγραμμα την τιμή 100. Άρα, δεν χρειάζεται να πάρει την τιμή καμίας μεταβλητής από το κύριο πρόγραμμα προκειμένου να το κάνει αυτό. Όμως, εμείς πρέπει να γράψουμε μια παράμετρο μέσα στις παρενθέσεις της συνάρτησης, διότι το σχολικό βιβλίο ορίζει ότι μια διαδικασία μπορεί να μην έχει καμία παράμετρο, αλλά δεν ορίζει το ίδιο για τις συναρτήσεις.

ΘΕΜΑ 2ο

B1.

i)
```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Υπολογισμοί
  ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
      ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: α,β,γ,δ
  ΑΡΧΗ
      ΔΙΑΒΑΣΕ α,β
      ΚΑΛΕΣΕ Πράξη_2(α,β,δ)
      γ←α+δ
      ΓΡΑΨΕ γ
  ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

  ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Πράξη_2(x,ψ,δ)
  ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
      ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: x,ψ,δ
  ΑΡΧΗ
      ΑΝ x >= ψ ΤΟΤΕ
          δ←x – ψ
      ΑΛΛΙΩΣ
          δ←x + ψ
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
  ΤΕΛΟΣ_ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ
```

ii)
```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Υπολογισμοί
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: α,β,γ,δ
ΑΡΧΗ
    ΔΙΑΒΑΣΕ α,β
    ΑΝ α>=β ΤΟΤΕ
        δ←α–β
    ΑΛΛΙΩΣ
        δ←α+β
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    γ←α+δ
    ΓΡΑΨΕ γ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

iii)

1)Θα εμφανιστεί η τιμή 15.
2)Θα εμφανιστεί η τιμή 5.
3)Θα εμφανιστεί η τιμή 11.

Β2.

α) 12, 17, 22
β) 12, 5, 8

ΘΕΜΑ 3ο

```
Αλγόριθμος ΘΕΜΑ_3
Δεδομένα //Σ//
Για i από 1 μέχρι 100
      Π[i] ← -1
Τέλος_επανάληψης
πλ_τροπ ← 0
πλ ← 0
Αρχή_επανάληψης
      Διάβασε ον
      βρέθηκε ← Ψευδής
      θέση ← 0
      i ← 1
      Όσο i<= 100 και βρέθηκε = Ψευδής επανάλαβε
              Αν ον = Σ[i] τότε
                    βρέθηκε ← Αληθής
                    θέση ← i
              αλλιώς
                    i ← i + 1
              Τέλος_αν
      Τέλος_επανάληψης
      Αν βρέθηκε = Ψευδής τότε
            Εμφάνισε "Άγνωστο"
      αλλιώς
            Διάβασε προσφ
            Αν Π[θέση] <> -1 τότε
                  Εμφάνισε "ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ"
                  πλ_τροπ ← πλ_τροπ + 1
            αλλιώς
                  πλ ← πλ + 1
            Τέλος_αν
```

```
            Π[θέση] ← προσφ
        Τέλος_αν
Μέχρις_ότουπλ = 100
πλ_0 ← 0
S ← 0
Για i από 1 μέχρι 100
        S ← S + Π[i]
        ΑνΠ[i] = 0 τότε
            πλ_0 ← πλ_0 +1
        Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Εμφάνισε S,πλ_0,πλ_τροπ
Τέλος ΘΕΜΑ_3
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_4
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
   ΑΚΕΡΑΙΕΣ:
S_λαθών_αποφ,S_λαθών_ληψ,S_προσπ,ποιότητα,πλ_λαθών_αποφ
   ΑΚΕΡΑΙΕΣ:
πλ_λαθών_ληψ,πλ_προσπ,i,ΜΕΤΑΔΟΣΗ[31],ΛΗΨΗ[31],πλ_λαθών
   ΑΚΕΡΑΙΕΣ: πλ_0,πλ_1
   ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: ΛΑΘΗΑΠΟΦ[10],ΛΑΘΗΛΗΨ[10]
ΑΡΧΗ
   S_λαθών_αποφ←0
   S_λαθών_ληψ←0
   S_προσπ←0
   ΓΙΑ ποιότητα ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
      πλ_λαθών_αποφ←0
      πλ_λαθών_ληψ←0
      πλ_προσπ←0
      ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
         πλ_προσπ← πλ_προσπ + 1
            ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 31
               ΔΙΑΒΑΣΕ ΜΕΤΑΔΟΣΗ[i],ΛΗΨΗ[i]
            ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
            πλ_λαθών←0
            ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 31
               ΑΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗ[i] <> ΛΗΨΗ[i] ΤΟΤΕ
```

```
            πλ_λαθών←πλ_λαθών + 1
         ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
      ΑΝ πλ_λαθών> 0 ΤΟΤΕ
         πλ_λαθών_ληψ←πλ_λαθών_ληψ + 1
         ΑΝ πλ_λαθών>= 16 ΤΟΤΕ
            πλ_λαθών_αποφ←πλ_λαθών_αποφ + 1
         ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
         πλ_0←0
         πλ_1←0
         ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 31
            ΑΝ ΛΗΨΗ[i] = 0 ΤΟΤΕ
               πλ_0←πλ_0 + 1
            ΑΛΛΙΩΣ
               πλ_1←πλ_1 + 1
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
         ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
         ΑΝ πλ_0 > πλ_1 ΤΟΤΕ
            ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 31
               ΛΗΨΗ[i]←0
            ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
         ΑΛΛΙΩΣ
            ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 31
               ΛΗΨΗ[i]←1
            ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
         ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
   ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ πλ_προσπ = 100000 Ή πλ_λαθών_αποφ = 100
   ΛΑΘΗΑΠΟΦ[ποιοτητα] ← πλ_λαθών_αποφ / πλ_προσπ* 100
   ΛΑΘΗΛΗΨ[ποιότητα] ← πλ_λαθών_ληψ / πλ_προσπ* 100
   S_λαθών_αποφ←S_λαθών_αποφ + πλ_λαθών_αποφ
   S_λαθών_ληψ←S_λαθών_ληψ + πλ_λαθών_ληψ
   S_προσπ←S_προσπ + πλ_προσπ
 ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
 ΓΡΑΨΕ S_λαθών_αποφ / S_προσπ* 100
 ΓΡΑΨΕ S_λαθών_ληψ / S_προσπ* 100
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1) Θα εκτυπωθεί η τιμή 75.

2) A

1	1	2	4

3) B

10	0	7	4	-3	0	14	7	-2	3

4) α) $i \bmod 2 <> 0$

β) $A[i] \bmod 2 <> 0$

γ) $A[i] >= 10$ και $A[i] <= 99$

δ) $i >= 10$ και $i <= 99$

στ) $A[i] < 20$

ε) $A[i] < 0$

5) α) Π

7	6	5
9	8	7
11	10	9

β) Π

5	11	24
-1	0	2
-1	-1	-1

6)
α)

Για <μετρητής> **από** <αρχική τιμή> **μέχρι** <τελική τιμή> **με_βήμα** <βήμα>
<ομάδα εντολών>
Τέλος_επανάληψης

β) Δοθέντων των στοιχείων $α_1$, $α_2$, ….., $α_n$ η ταξινόμηση συνίσταται στη μετάθεση της θέσης των στοιχείων ώστε να τοποθετηθούν σε μία νέα σειρά $α_{κ1}$, $α_{κ2}$, ….., $α_{κn}$ έτσι ώστε δοθείσης μιας συνάρτησης διάταξης f να ισχύει:
$f(α_{κ1})\le f(α_{κ2})\le …..\le f(α_{κn})$ → Ταξινόμηση κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.
$f(α_{κ1})\ge f(α_{κ2})\ge …..\ge f(α_{κn})$ → Ταξινόμηση κατά φθίνουσα τάξη μεγέθους.

ΘΕΜΑ 2ο

1) i) A

11	14	14	12	8	5	3	1

ii) Θα εμφανιστεί η τιμή 23.

2)

```
πλ_ΑΛ←0
Για i από 1 μέχρι 100
   Αν Π[i]=ΑΛΗΘΗΣ τότε
      πλ_ΑΛ←πλ_ΑΛ+1
   Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι πλ_ΑΛ
   Π[i]←ΑΛΗΘΗΣ
Τέλος_επανάληψης
Για i από πλ_ΑΛ+1 μέχρι 100
   Π[i]←ΨΕΥΔΗΣ
Τέλος_επανάληψης
```

3)

```
Αλγόριθμος Θέμα_Β3
Δεδομένα //Α,Β,Ν//
Για i από 1 μέχρι Ν
   Για j από 1 μέχρι Ν
      ΑΘΡ[i,j]←Α[i,j]+Β[i,j]
   Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι Ν
   Για j από 1 μέχρι Ν
      S←0
      Για κ από 1 μέχρι Ν
         S←S+Α[i,κ]*Β[κ,j]
      Τέλος_επανάληψης
      ΓΙΝ[i,j]←S
   Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Αποτελέσματα //ΑΘΡ,ΓΙΝ//
Τέλος Θέμα_Β3
```

ΘΕΜΑ 3ο

```
Αλγόριθμος ΘΕΜΑ_Γ
Αρχή_επανάληψης
   S←0
   Για i από 1 μέχρι 34
      Αρχή_επανάληψης
         Διάβασε πλ_τμ[i]
      Μέχρις_ότου πλ_τμ[i] > 0
      S←S + πλ_τμ[i]
   Τέλος_επανάληψης
Μέχρις_ότου S = 217
Για i από 1 μέχρι 65
   Διάβασε Ον[i]
   Για j από 1 μέχρι 217
      Διάβασε Σταυροί[i,j]
```

```
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι 65
    S←0
    Για j από 1 μέχρι 217
        S←S + Σταυροί[i,j]
    Τέλος_επανάληψης
    S_σταυρών[i]←S
    Εμφάνισε S_σταυρών[i]
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι 65
    S_2ο←0
    Για j από πλ_τμ[1]+1 μέχρι πλ_τμ[1]+πλ_τμ[2]
        S_2ο←S_2ο + Σταυροί[i,j]
    Τέλος_επανάληψης
    S_κατ_2[i]←S_2ο
Τέλος_επανάληψης
max←S_κατ_2[1]
Για i από 2 μέχρι 65
    Αν S_κατ_2[i] > max τότε
        max←S_κατ_2[i]
    Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι 65
    Αν S_κατ_2[i] = max τότε
        Εμφάνισε Ον[i]
    Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Για i από 2 μέχρι 65
    Για j από 65 μέχρι i με_βήμα -1
        Αν S_σταυρών[ j ] > S_σταυρών[ j-1 ] τότε
            Αντιμετάθεσε S_σταυρών[ j ],S_σταυρών[ j-1 ]
            Αντιμετάθεσε Ον[ j ],Ον[ j-1 ]
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i από 2 μέχρι 10
    Για j από 10 μέχρι i με_βήμα -1
```

```
        Αν Ον[ j ] < Ον[ j-1 ] τότε
            Αντιμετάθεσε Ον[ j ],Ον[ j-1 ]
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i από 1 μέχρι 10
    Εμφάνισε Ον[i]
Τέλος_επανάληψης
Για i από 11 μέχρι 65
    Αν S_σταυρών[i] = S_σταυρών[10] τότε
        Εμφάνισε Ον[i]
    Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Τέλος ΘΕΜΑ_Γ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
Αλγόριθμος ΘΕΜΑ_Δ
Δεδομένα //ΑΒ,ΚΕΙΜ//
πλ_κενών_τέλους←0
i←500
Όσο ΚΕΙΜ[i]= " " επανάλαβε
    πλ_κενών_τέλους←πλ_κενών_τέλους + 1
    i←i – 1
Τέλος_επανάληψης
Εμφάνισε πλ_κενών_τέλους
Αν πλ_κενών_τέλους = 0 τότε
    Εμφάνισε "Το μήκος του κειμένου είναι 500 χαρακτήρες"
Τέλος_αν
Για i από 1 μέχρι 500 – πλ_κενών_τέλους
    Αν ΚΕΙΜ[i] <> " " τότε
        βρέθηκε←Ψευδής
        στήλη←0
        κ←1
        Όσο κ <= 24 και βρέθηκε = Ψευδής επανάλαβε
            Αν ΚΕΙΜ[i]=ΑΒ[1,κ] τότε
                βρέθηκε←Αληθής
```

```
                στήλη←κ
            αλλιώς
                κ←κ + 1
            Τέλος_αν
        Τέλος_επανάληψης
        ΚΡΥΠ[i]←ΑΒ[2,στήλη]
    αλλιώς
        ΚΡΥΠ[i]←" "
    Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Για λ από i μέχρι 500
    ΚΡΥΠ[λ]←" "
Τέλος_επανάληψης
πλ_λέξεων←0
max ← -1
πλ_χαρ ← 0
Για i από 1 μέχρι 500 – πλ_κενών_τέλους
    Αν ΚΡΥΠ[i] =" " τότε
        πλ_λέξεων←πλ_λέξεων + 1
        Αν πλ_χαρ > max τότε
            max←πλ_χαρ
        Τέλος_αν
        πλ_χαρ←0
    αλλιώς
        πλ_χαρ←πλ_χαρ + 1
    Τέλος_αν
Τέλος_επανάληψης
Εμφάνισε πλ_λέξεων + 1
Αν πλ_χαρ > max τότε
    max←πλ_χαρ
Τέλος_αν
Εμφάνισε max
Τέλος ΘΕΜΑ_Δ
```

<u>Επιμέλεια</u>: Οικονομόπουλος Σπύρος

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1) **α.** Θα εμφανιστούν οι τιμές 12 και 6.
β. Θα εμφανιστούν οι τιμές 6,5,5.

2) **α.**
```
Για i από 1 μέχρι 4
    Για j από 1 μέχρι 4
        Αν i=j τότε
            A[i,j]←1
        αλλιώς
            A[i,j]←0
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
```
β.
```
Για i από 1 μέχρι 4
    Για j από 1 μέχρι 4
        Αν i=j ή i+j=5 τότε
            A[i,j]←1
        αλλιώς
            A[i,j]←0
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
```
γ.
```
Για i από 1 μέχρι 4
    Για j από 1 μέχρι 4
        Αν i=j τότε
            A[i,j]←1
        αλλιώς_αν i > j τότε
            A[i,j]←2
        αλλιώς
```

```
            A[i,j]←0
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
```

δ.

```
κ←0
Για i από 1 μέχρι 5
    Για j από 1 μέχρι 5
        κ←κ+1
        A[i,j]←κ
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
```

3) i)

```
max←A[1,1]
i←1
Όσο i<=20 επανάλαβε
      j←1
      Όσο j<=50 επανάλαβε
            Αν A[i, j] > max τότε
                  max ← A[i, j]
            Τέλος_αν
            j ← j+1
      Τέλος_επανάληψης
      i ← i+1
Τέλος_επανάληψης
Εμφάνισε max
```

<u>ή:</u>

```
max ← A[1,1]
Για i από 1 μέχρι 20
    Για j από 1 μέχρι 50
        Αν A[i, j] > max τότε
            max ← A[i, j]
        Τέλος_αν
```

```
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Εμφάνισε max
```

ii)Υπολογίζει και εμφανίζει το μέγιστο στοιχείο του πίνακα A[20,50].

4)

```
Αλγόριθμος Θέμα_Α4
Δεδομένα //Α//
κ←0
Για i από 1 μέχρι 4
    Για j από 1 μέχρι 3
        κ←κ+1
        Β[κ]←Α[i,j]
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Αποτελέσματα //Β//
Τέλος Θέμα_Α4
```

5)

```
Αλγόριθμος Θέμα_Α5
Δεδομένα //Α//
Για j από 1 μέχρι 5
    Για i από 1 μέχρι 3
        Αν j=1 τότε
            B[i,j]←A[i,j]
        αλλιώς_αν j=2 τότε
            Διάβασε B[i,j]
        αλλιώς
            B[i,j]←A[i,j-1]
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Αποτελέσματα //Β//
Τέλος Θέμα_Α5
```

6)

α) Πίνακας είναι ένα σύνολο αντικειμένων ίδιου τύπου, τα οποία αναφέρονται με ένα κοινό όνομα. Καθένα από τα αντικείμενα που απαρτίζουν τον πίνακα λέγεται στοιχείο του πίνακα. Η αναφορά στα στοιχεία του πίνακα γίνεται με το όνομα του πίνακα ακολουθούμενο από έναν ή περισσότερους δείκτες.

β) Με τον όρο στατική δομή δεδομένων εννοείται ότι το ακριβές μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης καθορίζεται κατά τη στιγμή του προγραμματισμού τους και κατά συνέπεια κατά τη στιγμή της μετάφρασής τους και όχι κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος. Επίσης, τα στοιχεία των στατικών δομών αποθηκεύονται σε συνεχόμενες θέσεις μνήμης.

ΘΕΜΑ 2ο

1)

α. Θα εμφανίσει τις τιμές: 1, 10, 2, 0, 3, 7, 0, 3 .

β. B

10	0	7

γ. Αλλαγή στο κύριο πρόγραμμα:

```
.
.
.
ΑΝ A[I] MOD 2 = 1 ΤΟΤΕ
    ΚΑΛΕΣΕ Διαδ_Σ1(A[I],Y)
    B[X]←Y DIV 2
ΑΛΛΙΩΣ
    ΚΑΛΕΣΕ Διαδ_Σ1(A[I],Y)
    B[X]←Y MOD 2
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
.
.
.
```

Διαδικασία:

```
ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Διαδ_Σ1(Χ,Υ)
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: Χ,Υ,Χ1
ΑΡΧΗ
    Χ1←Χ
    ΚΑΛΕΣΕ Δ2(Χ1)
    Υ←Χ1
ΤΕΛΟΣ_ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ
```

2)

Αρ. Γρ.	Χ	ΠΛ	ΑΡ	ΔΕ	Β	Μ	Έξοδος
01	35						
02		0					
03			1				
04				12			
05					ΨΕΥΔΗΣ		
06						6	
08			7				
10		1					
06						9	
09				8			
10		2					
06						7	
07					ΑΛΗΘΗΣ		
10		3					
11							7

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Γ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
   ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, EL[5], ES[5],αριθμός, θέση_max_EL, θέση_max_ES
   ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: χώρα, συνέχεια
   ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: max_ποσ_EL, max_ποσ_ES
ΑΡΧΗ
   ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 5
      EL[i]←0
      ES[i]←0
   ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
   !Λόγω της σημείωσης που υπάρχει στο ερώτημα Δ4 καταλαβαίνουμε ότι
   σίγουρα !θα υπάρχει τουλάχιστον μία απάντηση, άρα μπορούμε να
   χρησιμοποιήσουμε τη !δομή ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ
   ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
      ΔΙΑΒΑΣΕ χώρα,αριθμός
      ΑΝ χώρα = 'EL' ΤΟΤΕ
         EL[αριθμός]←EL[αριθμός] + 1
      ΑΛΛΙΩΣ
         ES[αριθμός]←ES[αριθμός] + 1
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΓΡΑΨΕ 'για Διακοπή της εισαγωγής πατήστε Δ ή δ'
      ΔΙΑΒΑΣΕ συνέχεια
   ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ συνέχεια='Δ' Ή  συνέχεια='δ'
   ΚΑΛΕΣΕ ΜΕΓ_ΠΟΣ(EL,max_ποσ_EL,θέση_max_EL)
   ΓΡΑΨΕ θέση_max_EL,max_ποσ_EL
   ΚΑΛΕΣΕ ΜΕΓ_ΠΟΣ(ES,max_ποσ_ES,θέση_max_ES)
   ΓΡΑΨΕ θέση_max_ES,max_ποσ_ES
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΓ_ΠΟΣ(A,max_ποσ,θέση_max)
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
```

```
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: A[5], θέση_max, max, i
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: max_ποσ
ΑΡΧΗ
    max←A[1]
    θέση_max←1
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 5
        ΑΝ A[i] > max ΤΟΤΕ
            max←A[i]
            θέση_max← i
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    max_ποσ←max / (A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]) * 100
ΤΕΛΟΣ_ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Δ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: ΜΟ_ημ_παραγ[12], ΜΟ_έτους
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: έτος, i, Αρ_ημ[12], j, Αρ_αυγών[12,31], S_έτους,
    πλ_ημ_έτους, S_μην, κ
ΑΡΧΗ
ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΔΙΑΒΑΣΕ έτος
ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ έτος >=2000 ΚΑΙ έτος<=2099
ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
    Αρ_ημ[i]←Υπολ_ημ(έτος,i)
ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ Αρ_ημ[i]
        ΔΙΑΒΑΣΕ Αρ_αυγών[i,j]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
```

```
ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
S_ετ←0
πλ_ημ_έτους←0
ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
    S_μην←0
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ Αρ_ημ[i]
        S_μην←S_μην+Αρ_αυγών[i,j]
        S_ετ←S_ετ+Αρ_αυγών[i,j]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΜΟ_ημ_παραγ[i]←S_μην / Αρ_ημ[i]
    πλ_ημ_έτους←πλ_ημ_έτους+Αρ_ημ[i]
ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΜΟ_έτους←S_ετ / πλ_ημ_έτους
κ←0
ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
    ΑΝ  Α_Τ(ΜΟ_ημ_παραγ[i] – ΜΟ_έτους) <= 10 / 100 * ΜΟ_έτους
    ΤΟΤΕ
        κ←κ+1
        ΑΝ κ=3 ΤΟΤΕ
            ΓΡΑΨΕ i
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΑΝ κ<3 ΤΟΤΕ
    ΓΡΑΨΕ 'Δεν υπάρχει ο μήνας που ζητάτε'
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Υπολ_ημ (έτος,μήνας): ΑΚΕΡΑΙΑ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: έτος, μήνας
ΑΡΧΗ
ΑΝ μήνας<=7 ΤΟΤΕ
    ΑΝ μήνας=2 ΤΟΤΕ
```

```
        ΑΝ (έτος MOD 4 = 0 ΚΑΙ έτος MOD 100 <> 0) Ή (έτος MOD 400
        = 0) ΤΟΤΕ
            Υπολ_ημ←29
        ΑΛΛΙΩΣ
            Υπολ_ημ←28
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ μήνας MOD 2 = 0 ΤΟΤΕ
        Υπολ_ημ←30
    ΑΛΛΙΩΣ
        Υπολ_ημ←31
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΑΛΛΙΩΣ
    ΑΝ μήνας MOD 2 = 0 ΤΟΤΕ
        Υπολ_ημ←31
    ΑΛΛΙΩΣ
        Υπολ_ημ←30
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
```

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Σπύρος

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. 1. Σωστό, **2.** Λάθος, **3.** Λάθος, **4.**Λάθος, **5.**Σωστό.

Α2. Σχολικό βιβλίο §9.4 Τυπικές επεξεργασίες πινάκων.

Α3. A ΑΚΕΡΑΙΑ
B ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ
C ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ
D ΛΟΓΙΚΗ
E ΛΟΓΙΚΗ

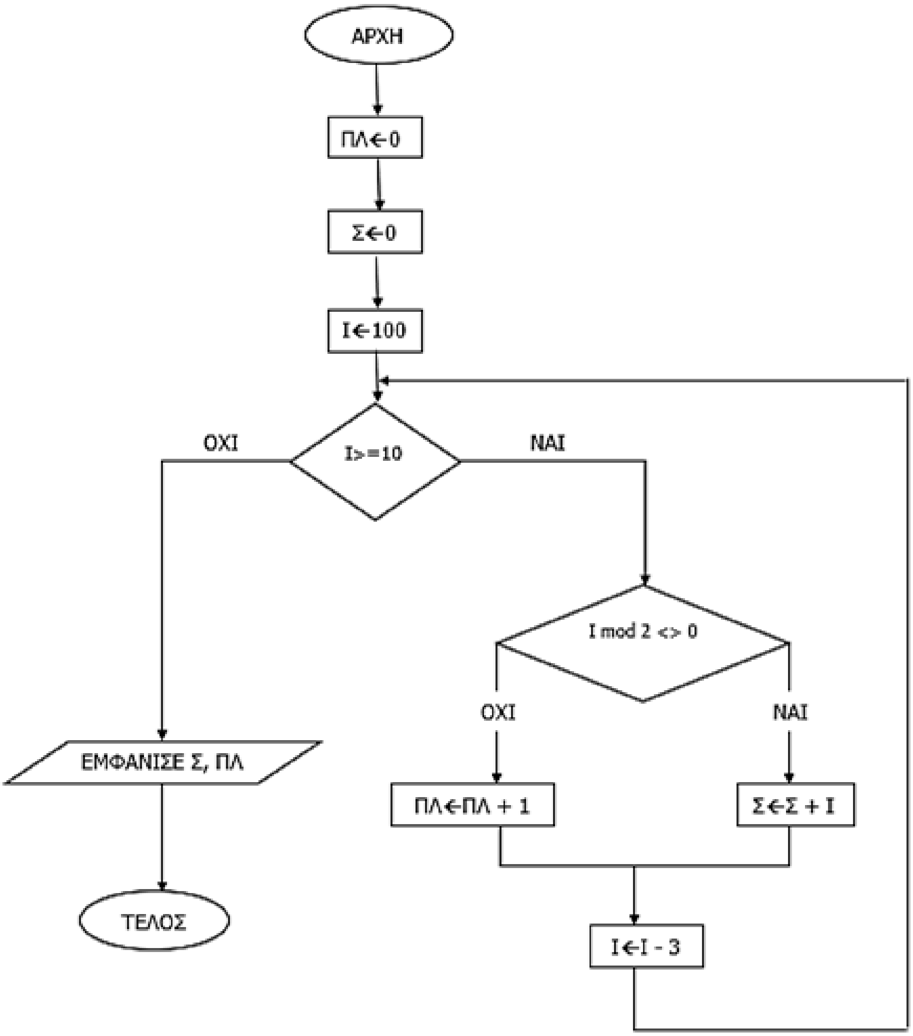
Α4.

Λογικές Μεταβλητές		Λογικές εκφράσεις	
Α	Β	((ΟΧΙ Α) Ή Β) ΚΑΙ Β	(ΟΧΙ Α) ΚΑΙ (ΟΧΙ (Β Ή Α))
Αληθής	Αληθής	Αληθής	Ψευδής
Αληθής	Ψευδής	Ψευδής	Ψευδής
Ψευδής	Αληθής	Αληθής	Ψευδής

Α5. 1. Α = 101, Β = 999 (ή 1000), Γ = 2
2. Α = 10, Β = -20, Γ = -1
3. Α = 3, Β = 80, Γ = 3

ΘΕΜΑ 2ο

B1.



B2. (1) 40, (2) Μ, (3) Κ, (4) Κ, (5) Κ, (6) 5, (7) 1, (8) 1

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Θέμα_Γ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
      ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, πμ, χρεωση, SUMX, SUMY
      ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: περ
ΑΡΧΗ
    SUMX←0
    SUMY←0
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 500
        ΔΙΑΒΑΣΕ πμ
        ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
              ΔΙΑΒΑΣΕ περ
        ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ περ = 'ΧΑΜΗΛΗ' Ή περ = 'ΥΨΗΛΗ'
        χρεωση←υπολογισμος(πμ,περ)
        ΓΡΑΨΕ χρεωση
        ΑΝ περ='ΧΑΜΗΛΗ' ΤΟΤΕ
              SUMX←SUMX+χρεωση
        ΑΛΛΙΩΣ
              SUMY←SUMY+χρεωση
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΡΑΨΕ SUMX, SUMY
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ υπολογισμος(πμ,περ): ΑΚΕΡΑΙΑ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
      ΑΚΕΡΑΙΕΣ: πμ
      ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: περ
ΑΡΧΗ
    ΑΝ περ='ΧΑΜΗΛΗ' ΤΟΤΕ
        ΑΝ πμ<=3 ΤΟΤΕ
              υπολογισμος←40*πμ
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ πμ<=7 ΤΟΤΕ
              υπολογισμος←30*πμ
        ΑΛΛΙΩΣ
              υπολογισμος←25*πμ
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

```
    ΑΛΛΙΩΣ
        ΑΝ πμ<=3 ΤΟΤΕ
            υπολογισμος←70*πμ
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ πμ<=7 ΤΟΤΕ
            υπολογισμος←55*πμ
        ΑΛΛΙΩΣ
            υπολογισμος←50*πμ
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
Αλγόριθμος Θέμα_Δ
Για i απο 1 μέχρι 20
    Διάβασε ΟΝΚΩΔ[i,1], ΟΝΚΩΔ[i,2]
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 1 μέχρι 20
    S[i]←0
Τέλος_επανάληψης
Διάβασε κωδ
ΟΣΟ κωδ<>΄΄ΤΕΛΟΣ΄΄ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
    βρέθηκε←Ψευδής
    θέση←0
    i←1
    Όσο (βρέθηκε = Ψευδής) και (i<=20) επανάλαβε
        Αν ΟΝΚΩΔ[i,2]= κωδ τότε
            βρέθηκε←Αληθής
            θέση←i
        αλλιώς
            i← i + 1
        Τέλος_αν
    Τέλος_επανάληψης
    Αν βρέθηκε = Αληθής τότε
        Διάβασε ποσο
        S[θέση]←S[θέση] + ποσο
    αλλιώς
        Εμφάνισε ΄΄Άγνωστος κωδικός΄΄
    Τέλος_αν
    Διάβασε κωδ
```

```
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 1 μέχρι 20
   Εμφάνισε S[i], ONKΩΔ[i,1]
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 2 μέχρι 10
   Για j απο 10 μέχρι i με_βήμα -1
      Αν S[j]>S[j-1] τότε
            temp←S[j]
            S[j] ← S[j-1]
            S[j-1]←temp
            temp2←ONKΩΔ[j,1]
            ONKΩΔ[j,1]←ONKΩΔ[j-1,1]
            ONKΩΔ[j-1,1]←temp2
      Τέλος_αν
   Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 12 μέχρι 20
   Για j απο 20 μέχρι i με_βήμα -1
      Αν S[j]>S[j-1] τότε
            temp←S[j]
            S[j]←S[j-1]
            S[j-1]←temp
            temp2←ONKΩΔ[j,1]
            ONKΩΔ[j,1]←ONKΩΔ[j-1,1]
            ONKΩΔ[j-1,1]←temp2
      Τέλος_αν
   Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 1 μέχρι 3
   Εμφάνισε ONKΩΔ[i,1], ΄΄υποκατάστημα Αθήνας΄΄
Τέλος_επανάληψης
Για i απο 11 μέχρι 13
   Εμφάνισε ONKΩΔ[i,1], ΄΄υποκατάστημα Θεσσαλονίκης΄΄
Τέλος_επανάληψης
Τέλος Θέμα_Δ
```

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Σπύρος

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.

1. Λάθος,
2. Σωστό,
3. Σωστό,
4. Σωστό,
5. Λάθος.

Α2.

1. (x+3*y)*(x-5*y)
2. 10/20-5/(7*ω^3)
3. 30.5*x+γ*δ+ω*x
4. y^5-z*(μ-γ)^2
5. Τ_Ρ(ω-x^2)

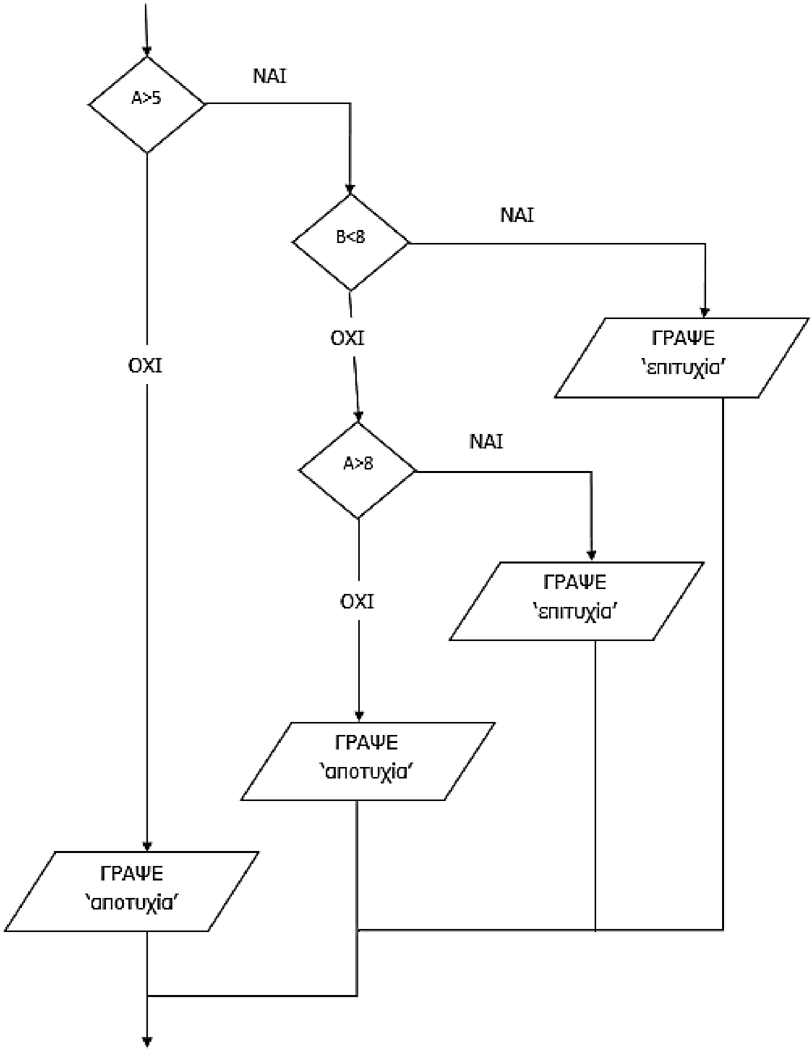
Α3. **α.** Σχολικό βιβλίο §3.6
β. Σχολικό βιβλίο §8.2

Α4.

(1) 0
(2) Ν
(3) Μ
(4) x+1
(5) x

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. α.



β.

Αν Α>5 και (Β<8 ή Α>8) τότε
    Γράψε 'επιτυχία'
Αλλιώς
    Γράψε 'αποτυχία'
Τέλος_αν

Β2.

(1) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Π_Μ(ΗΛ,Ο,Χ): ΑΚΕΡΑΙΑ
(2) Ν = 200
(3) i,ΗΛ[200],Π
(4) Χ,Ο[200]
(5) ΤΕΛΟΣ_ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Γ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: Σ, δεμ, αιθ, προηγ, max
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, θέση, φιαλ, π, μεγ
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: απ
ΑΡΧΗ
  Σ←0
  i←0
  π←1
  προηγ←-1
  μεγ←0
  max←-1
  ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΔΙΑΒΑΣΕ δεμ, αιθ
    i←i + 1
    Σ←Σ + αιθ
    ΑΝ αιθ > max ΤΟΤΕ
        max←αιθ
        θεση←i
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΑΝ αιθ=προηγ ΤΟΤΕ
            π←π+1
    ΑΛΛΙΩΣ
            ΑΝ π>μεγ ΤΟΤΕ
                μεγ←π
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            π←1
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

```
        προηγ←αιθ
        ΑΝ αιθ<>0 ΤΟΤΕ
              ΓΡΑΨΕ ‘Θα συνεχιστεί η εισαγωγή; ΝΑΙ/ΟΧΙ’
              ΔΙΑΒΑΣΕ απ
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ απ=’ΟΧΙ’ Ή αιθ=0
    ΓΡΑΨΕ ‘Το πληθος των δεμάτων που εισήχθησαν είναι’, i
    ΓΡΑΨΕ ‘Το συνολικό βάρος του αιθέριου ελαίου είναι’, Σ
    φιαλ←Α_Μ(Σ/2)
    ΓΡΑΨΕ θέση, φιαλ
    ΑΝ π>μεγ ΤΟΤΕ
          μεγ←π
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΓΡΑΨΕ μεγ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  ΘΕΜΑ_Δ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
      ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i,j, προηγ,νησί,ΑΠ[15,15],S,ΕΠ[15],πλ_1ης
      ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: ΟΝ[15]
ΑΡΧΗ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
        ΔΙΑΒΑΣΕ ΟΝ[i]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
        ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
            ΑΝ i<j ΤΟΤΕ
                ΔΙΑΒΑΣΕ ΑΠ[i,j]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
        ΕΠ[i]←0
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΕΠ[1]←1
```

```
    προηγ←1
    S←0
    πλ_1ης←1
    ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΔΙΑΒΑΣΕ vησί
        ΑΝ ΕΠ[vησί]=0 ΤΟΤΕ
            πλ_1ης←πλ_1ης+1
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΕΠ[vησί]←ΕΠ[vησί]+1
        ΑΝ προηγ < vησί ΤΟΤΕ
            S←S+ΑΠ[προηγ,vησί]
        ΑΛΛΙΩΣ
            S←S+ΑΠ[vησί,προηγ]
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        προηγ←vησί
    ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ πλ_1ης = 15
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
        ΓΡΑΨΕ ΟΝ[i],ΕΠ[i]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΡΑΨΕ S
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

<u>Επιμέλεια</u>: Οικονομόπουλος Σπύρος

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Σωστό

Α2.

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 68: «Συμπληρωματικό εκπαιδευτικό υλικό».
2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 125: «Συμπληρωματικό εκπαιδευτικό υλικό»

Α3.

1. Β
2. Α
3. Γ

Α4.

1. 55
2. Άπειρες
3. 0
4. 40

Α5.

1. Κ, Δ, Μ
2. Μ, Δ, Κ
3. Δ, Μ, Κ
4. Δ, Κ, Μ
5. Μ, Κ, Δ

ΘΕΜΑ 2ο

B1.

A)

i.

Π	Υ	Α	Ι
1	1	11	0
5	1	5	1
2	0	2	2
1	1	1	3
0		0	4

ii.

A = 11
Δυαδική αναπαράσταση: 1011

B)

i.

Π	Υ	Α	Ι
1	0	8	0
4	0	4	1
2	0	2	2
1	1	1	3
0		0	4

ii.

A = 8
Δυαδική αναπαράσταση: 1000

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Γ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΛΟΓΙΚΕΣ: ΒΡΕΘΗΚΕ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, N, ΘΕΣΗ, Συχν[100], Min, ΠΛ
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: ΛΕΞΕΙΣ[100], Λέξη, Κειμ
ΑΡΧΗ
    ΔΙΑΒΑΣΕ ΛΕΞΕΙΣ[1]
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 100
        ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
            ΔΙΑΒΑΣΕ Λέξη
            N ← i – 1
            ΚΑΛΕΣΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ(ΛΕΞΕΙΣ,N, Λέξη, ΒΡΕΘΗΚΕ, ΘΕΣΗ)
        ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ ΒΡΕΘΗΚΕ = ΨΕΥΔΗΣ
        ΛΕΞΕΙΣ[i] ← Λέξη
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 100
        Συχν[i] ← 0
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΠΛ ← 0
    ΔΙΑΒΑΣΕ Κειμ
    N ← 100
    ΟΣΟ Κειμ <> ‘ΤΕΛΟΣ_ΚΕΙΜΕΝΟΥ’ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
        ΠΛ ← ΠΛ + 1
        ΚΆΛΕΣΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕ(ΛΕΞΕΙΣ, N, Κειμ, ΒΡΕΘΗΚΕ, ΘΕΣΗ)
        ΑΝ ΒΡΕΘΗΚΕ = ΑΛΗΘΗΣ ΤΟΤΕ
            Συχν[ΘΕΣΗ] ← Συχν[ΘΕΣΗ] + 1
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΔΙΑΒΑΣΕ Κειμ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    Min ← ΠΛ + 1
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 100
        ΑΝ Συχν[i]  < Min ΚΑΙ Συχν[i] <> 0 ΤΟΤΕ
            Min ← Συχν[i]
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 100
```

```
        ΑΝ Συχν[i] = Min ΤΟΤΕ
            ΓΡΑΨΕ ΛΕΞΕΙΣ[i]
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ


ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ(Π, Ν, Χ, ΒΡΕΘΗΚΕ, ΘΕΣΗ)
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: ΘΕΣΗ, i, Ν
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: Π[100], Χ
    ΛΟΓΙΚΕΣ: ΒΡΕΘΗΚΕ
ΑΡΧΗ
    ΘΕΣΗ ← 0
    ΒΡΕΘΗΚΕ ← ΨΕΥΔΗΣ
    i ←1
    ΟΣΟ i <= Ν ΚΑΙ ΒΡΕΘΗΚΕ = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
        ΑΝ Π[i] = Χ ΤΟΤΕ
            ΒΡΕΘΗΚΕ ← ΑΛΗΘΗΣ
            ΘΕΣΗ ← i
        ΑΛΛΙΩΣ
            i ← i +1
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΤΕΛΟΣ_ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Δ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: Π[75, 12], Temp, Max_περ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, j, κ, Α[[75], Σ[15], max
ΑΡΧΗ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 75
        ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
            ΔΙΑΒΑΣΕ Π[i, j]
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 75
        ΓΙΑ j ΑΠΟ 75 ΜΕΧΡΙ i ΜΕ_ΒΗΜΑ -1
            ΑΝ Π[j,11] < Π[j-1,11] ΤΟΤΕ
                ΓΙΑ κ ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
                    Temp ← Π[j, κ]
                    Π[j, κ] ← Π[j – 1, κ]
                    Π[j – 1, κ] ← Temp
                ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
            ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[j,11] = Π[j-1,11] ΤΟΤΕ
                ΑΝ Π[j, 1] < Π[j – 1, 1]ΤΟΤΕ
                    ΓΙΑ κ ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 12
                        Temp ← Π[j, κ]
                        Π[j, κ] ← Π[j – 1, κ]
                        Π[j – 1, κ] ← Temp
                    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
                ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 75
        ΑΝ Π[i, 12] = 'Ι' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 10
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[i, 12] = 'Κ' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 50
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[i, 12] = 'Λ' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 100
```

```
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[i, 12] = 'Μ' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 500
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[i, 12] = 'Ν' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 1000
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ Π[i, 12] = 'Ξ' ΤΟΤΕ
            Α[i] ← 5000
        ΑΛΛΙΩΣ
            Α[i] ← 10000
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 15
        Σ[i] ← 0
        max ← 0
        ΓΙΑ κ ΑΠΟ i ΜΕΧΡΙ 75 ΜΕ_ΒΗΜΑ 15
            Σ[i] ← Σ[i] + Α[κ]
            ΑΝ Α[κ] > max ΤΟΤΕ
                max ← Α[κ]
                Max_περ ← Π[κ, 11]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΓΡΑΨΕ Π[i, 1], Max_περ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Σπύρος

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.

1. Λάθος
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Σωστό

Α2.

α.

```
ΑΝ ποσό <= 100 ΤΟΤΕ
    επιβ ← 1 / 100 * ποσό
ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ ποσό <= 1000 ΤΟΤΕ
    επιβ ← 1 / 100 * 100 + 0.8 / 100 * ( ποσό – 100 )
ΑΛΛΙΩΣ
    επιβ ← 1 / 100 * 100 + 0.8 / 100 * 900 + 0.6 / 100 * ( ποσό – 1000 )
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

β. Θα εμφανιστούν οι τιμές 3, 5, 8, 13.

Α3.

α. Οι απαντήσεις του i και του ii βρίσκονται στη σελίδα 221 του πράσινου βιβλίου μαθητή.

β. Οι πλέον διαδεδομένοι αλγόριθμοι αναζήτησης είναι η σειριακή και η δυαδική αναζήτηση. Ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος είναι η δυαδική αναζήτηση η οποία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ταξινομημένους πίνακες.

Α4.

- **α.** +
- **β.** =
- **γ.** Όχι
- **δ.** 1
- **ε.** Β
- **στ.** Σ MOD 3 = 1
- **ζ.** Β ή Σ > 100

Α5.

1. δ
2. γ
3. β
4. α
5. α

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

- (1) <=
- (2) >=
- (3) < (εναλλακτικά μπορεί να τοποθετηθεί ο τελεστής <=)
- (4) κ
- (5) +
- (6) κ
- (7) j
- (8) –

B2.

Χ	Βρέθηκε	Υπάρχει	i
10	Ψευδής	Ψευδής	2
40	Αληθής	Αληθής	4
70	Ψευδής	Ψευδής	7
100	Ψευδής	Αληθής	7

ΘΕΜΑ 3ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Γ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΛΟΓΙΚΕΣ: είσοδος
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: max, αίθουσα, επισκέπτες, επιλογή
ΑΡΧΗ
    max ← -1
    αίθουσα ← 0
    επισκέπτες ← 0
    ΔΙΑΒΑΣΕ επιλογή
    ΟΣΟ επιλογή <> 0 Ή αίθουσα <> 0 ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
        ΑΝ επιλογή = 1 ΤΟΤΕ
            ΔΙΑΒΑΣΕ άτομα
            επισκέπτες ← επισκέπτες + άτομα
            είσοδος ← IN(άτομα,αίθουσα)
            ΑΝ είσοδος = ΑΛΗΘΗΣ ΤΟΤΕ
                αίθουσα ← αίθουσα + άτομα
            ΑΛΛΙΩΣ
                ΓΡΑΨΕ 'ΔΟΚΙΜΑΣΤΕ ΑΡΓΟΤΕΡΑ'
                ΑΝ άτομα > max ΤΟΤΕ
                    max ← άτομα
                ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ επιλογή = 2 ΤΟΤΕ
            ΑΝ αίθουσα <> 0 ΤΟΤΕ
                αίθουσα ← αίθουσα – 1
            ΑΛΛΙΩΣ
                ΓΡΑΨΕ 'ΑΔΥΝΑΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ'
```

```
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΔΙΑΒΑΣΕ επιλογή
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΑΝ max <> -1 ΤΟΤΕ
        ΓΡΑΨΕ max
    ΑΛΛΙΩΣ
        ΓΡΑΨΕ 'ΔΕΝ ΑΠΟΡΡΙΦΘΗΚΕ ΚΑΜΙΑ ΟΜΑΔΑ'
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΓΡΑΨΕ επισκέπτες
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΙΝ (άτομα,αίθουσα) : ΛΟΓΙΚΗ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: άτομα, αίθουσα
ΑΡΧΗ
    ΑΝ αίθουσα + άτομα <= 1000 ΤΟΤΕ
        ΙΝ ← ΑΛΗΘΗΣ
    ΑΛΛΙΩΣ
        ΙΝ ← ΨΕΥΔΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
```

ΘΕΜΑ 4ο

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΘΕΜΑ_Δ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: ΜΟ[10], max2, ΜΟ2, Διαφορά[10], min2
    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: Ο[10], max_ομ, min_ομ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: i, B[10,10], j, max, min, S
ΑΡΧΗ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
        ΔΙΑΒΑΣΕ Ο[i]
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
        ΔΙΑΒΑΣΕ B[i,i]
        ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ i – 1
            ΓΡΑΨΕ Ο[j]
            ΔΙΑΒΑΣΕ B[i,j]
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΓΙΑ j ΑΠΟ i + 1 ΜΕΧΡΙ 10
            ΓΡΑΨΕ Ο[j]
            ΔΙΑΒΑΣΕ B[i,j]
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
        max ← B[1,j]
        min ← B[1,j]
        ΓΙΑ i ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 10
            ΑΝ B[i,j] > max ΤΟΤΕ
               max ← B[i,j]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            ΑΝ B[i,j] < min ΤΟΤΕ
               min ← B[i,j]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        S ← 0
        ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
            ΑΝ B[i,j] <> max ΚΑΙ B[i,j] <> min ΤΟΤΕ
               S ← S + B[i,j]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
```

```
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΜΟ[j] ← S / 8
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    max2 ← ΜΟ[1]
    max_ομ ← Ο[1]
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 10
        ΑΝ ΜΟ[j] > max2 ΤΟΤΕ
            max2 ← ΜΟ[j]
            max_ομ ← Ο[j]
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΡΑΨΕ max_ομ
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
        S ← 0
        ΓΙΑ i ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 10
            ΑΝ i <> j ΤΟΤΕ
               S ← S + B[i,j]
            ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΜΟ2 ← S / 9
        Διαφορά[j] ← Α_Τ(B[j,j] – ΜΟ2)
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    min2 ← Διαφορά[1]
    min_ομ ← Ο[1]
    ΓΙΑ j ΑΠΟ 2 ΜΕΧΡΙ 10
        ΑΝ Διαφορά[j] < min2 ΤΟΤΕ
            min2 ← Διαφορά[j]
            min_ομ ← Ο[j]
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΡΑΨΕ min_ομ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

<u>Επιμέλεια</u>: Οικονομόπουλος Σπύρος

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

α. Λάθος
β. Σωστή
γ. Σωστή
δ. Σωστή
ε. Σωστή

Β. **1.** α
2. δ

ΟΜΑΔΑ 2η

Κεφάλαιο 7ο, σελ. 142 – 143 σχολικού βιβλίου, παράγραφος 10. «Το Α.Ε.Π. ως δείκτης οικονομικής ευμάρειας και οι αδυναμίες του»

ΟΜΑΔΑ 3η

α. Κ.Ε. του $\Psi = \dfrac{\text{Μονάδες του X που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του Ψ που παράγονται}}$

Ο συνδυασμός Α είναι ακραίος, άρα, $\boxed{X = 0}$.

Β → Α: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x-0}{100} \Leftrightarrow \boxed{x = 50}$.

Γ → Β: $\dfrac{1}{4} = \dfrac{x-50}{200} \Leftrightarrow \boxed{x = 100}$

Δ → Γ: $\dfrac{1}{6} = \dfrac{x-100}{300} \Leftrightarrow \boxed{x = 150}$

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΕΝΟΣ

	ΑΓΑΘΟ Χ	ΑΓΑΘΟ Ψ
Α	0	600
Β	50	500
Γ	100	300
Δ	150	0

β. Η παραγωγή $X=40$ και $X=80$ αποτελούν ενδιάμεσες παραγωγές στους συνδυασμούς Α → Β και Β → Γ αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε: Κ.Ε. του $X=\dfrac{\text{Μονάδες του Ψ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του Χ που παράγονται}}$

Άρα: $\underset{(A\to B)}{\text{Κ.Ε του Χ}}=\dfrac{100}{50}=2$, άρα, $2=\dfrac{600-\psi_1}{40}\Leftrightarrow \psi_1=520$.

Δηλαδή για δεδομένο $X=40$ το μέγιστο $\Psi=520$.

$\underset{(B\to \Gamma)}{\text{Κ.Ε του Χ}}=\dfrac{200}{50}=4$, άρα, $4=\dfrac{500-\psi_2}{30}\Leftrightarrow \psi_2=380$.

Δηλαδή, για δεδομένο $X=80$ το μέγιστο $\Psi=380$.

Άρα: Για να μειωθεί η παραγωγή του Χ από 80 σε 40 μονάδες πρέπει να παραχθούν $520-380=\boxed{\text{140 μονάδες του αγαθού Ψ}}$

γ. Η παραγωγή $X=20$ αποτελεί ενδιάμεση παραγωγή, στο συνδυασμό Α → Β.

$\underset{(A\to B)}{\text{Κ.Ε του Χ}}=2$, άρα, $2=\dfrac{600-\psi}{20}\Leftrightarrow \psi=560$.

Δηλαδή, για δεδομένο $X=20$ το μέγιστο $\Psi=560$.

Αφού κάθε εργάτης παράγει την ίδια ποσότητα από το αγαθό Ψ, μπορούμε να υπολογίσουμε την παραγωγή ανά εργάτη (παραγωγικότητα εργασίας). Γνωρίζουμε ότι το εργατικό δυναμικό της οικονομίας είναι 120 εργάτες, άρα, στον ακραίο συνδυασμό Α χρησιμοποιούνται **και** οι 120 εργάτες για να παράγουν $\Psi=600$ και $X=0$.

Έτσι, έχουμε:

$AP_{\Psi} = \frac{Q_{\Psi}}{L_{\Psi}} = \frac{600}{120} = 5$ μονάδες (η παραγωγή του Ψ ανά εργάτη)

Άρα, στον άριστο συνδυασμό $(X = 20, \Psi = 560)$, για να παραχθεί $\Psi = 560$ απασχολούνται: $560 = 5 \cdot L_{\Psi} \Leftrightarrow L_{\Psi} = 112$ εργάτες.

Επομένως, οι υπόλοιποι $120 - 112 = \boxed{8 \text{ εργάτες}}$ παράγουν 20 μονάδες του αγαθού Χ.

ΟΜΑΔΑ 4η

α. ΖΗΤΗΣΗ: Δίνεται ότι η $|E_D| = 1$ κατά μήκος της καμπύλης ζήτησης, άρα, είναι ισοσκελής υπερβολή, δηλαδή $P \cdot Q = A$

Άρα: $P = 60$, $Q_D = 15$ δηλαδή, $P \cdot Q = 60 \cdot 15 = 900$, άρα: $\boxed{Q_D = \frac{900}{P}}$

ΠΡΟΣΦΟΡΑ:

Για $P = 10$: $Q_D = \frac{900}{10} = 90$

$\text{Έλλειμμα} = 55 \Leftrightarrow Q_D - Q_S = 55 \Leftrightarrow 90 - Q_S = 55 \Leftrightarrow Q_S = 35$

Άρα: $P_1 = 10$, $Q_1 = 35$, $E_S = 2/7$

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{Q_S - 35}{P - 10} \cdot \frac{10}{35} \Leftrightarrow \boxed{Q_S = 25 + P}$$

β. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΓΟΡΑΣ:

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow \frac{900}{P} = 25 + P \Leftrightarrow P^2 + 25P - 900 = 0 \begin{cases} \boxed{P_1 = 20 = P_E} \\ P_2 = -45 \,(\text{αδύνατη}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_D = \frac{900}{20} = 45 \\ Q_S = 25 + 20 = 45 \end{array}\right\} \boxed{Q_E = 45 \text{ μονάδες}}$$

γ. $Q_S' = Q_S + 20 \Leftrightarrow Q_S' = (25 + P) + 20 \Leftrightarrow Q_S' = 45 + P$

ΝΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΓΟΡΑΣ:

$$Q_D = Q_S' \Leftrightarrow \frac{900}{P} = 45 + P \Leftrightarrow P^2 + 45P - 900 = 0 \begin{cases} \boxed{P_1 = 15 = P_E'} \\ P_2 = -60 (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= \frac{900}{15} = 60 \\ Q_S' &= 45 + 15 = 60 \end{aligned}\right\} \boxed{Q_E' = 60 \ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\epsilon\varsigma}$$

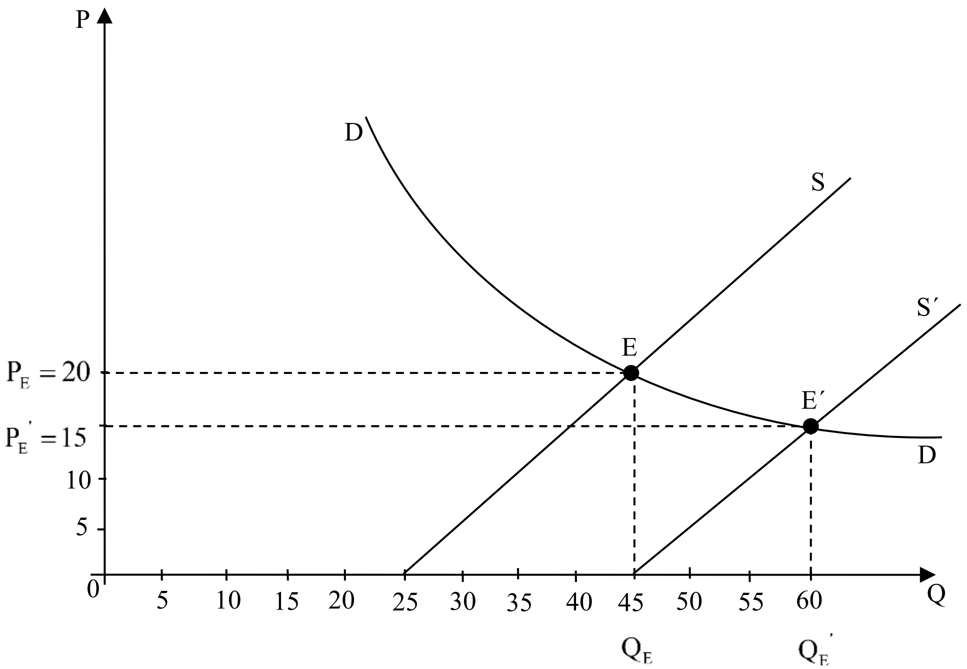
δ. Αρχικά $\Sigma E = P_E \cdot Q_E = 20 \cdot 45 = 900$ €

Τελικά $\Sigma E' = P_E' \cdot Q_E' = 15 \cdot 60 = 900$ €

Άρα: $\Sigma E' - \Sigma E = 900 - 900 = \boxed{0 \text{ €}}$

Η καμπύλη ζήτησης είναι ισοσκελής υπερβολή. Επομένως, ανεξάρτητα από τη μεταβολή της προσφοράς, και κατ' επέκταση της τιμής, τα συνολικά έσοδα $(P \cdot Q)$ των παραγωγών θα παραμείνουν σταθερά και ίσα με 900€.

ε.



Επιμέλεια: Κουτσουμπέλη Κατερίνα

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

1. Λάθος
2. Σωστή
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Λάθος

Β. 1. β 2. γ

ΟΜΑΔΑ 2η

Κεφάλαιο 1, σελ. 16 – 17 σχολικού βιβλίου, παράγραφος (i). «Οι Συντελεστές της Παραγωγής.»

ΟΜΑΔΑ 3η

α. Ζήτηση: $P_1 = 40$, $Q_1 = 160$, $E_D = -0,25$

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta Q}\frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow -0,25 = \frac{Q_D - 160}{P - 40}\frac{40}{160} \Leftrightarrow \boxed{Q_D = 200 - P}$$

Προσφορά: $P_1 = 90$, $Q_1 = 200$, $E_S = 0,9$

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow 0,9 = \frac{Q_S - 200}{P - 90}\frac{90}{200} \Leftrightarrow \boxed{Q_S = 20 + 2P}$$

β. Ισορροπία αγοράς: $Q_D = Q_S \Leftrightarrow 200 - 2P = 20 + 2P \Leftrightarrow \boxed{P_E = 60 \ \text{χ.μ.}}$

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= 200 - 60 = 140 \\ Q_S &= 20 + 2 \cdot 60 = 140 \end{aligned}\right\} \boxed{Q_E = 140 \ \text{μον.}}$$

γ. Συνολικά Έσοδα = $P_E \cdot Q_E = 60 \cdot 140 = \boxed{8.400 \ \text{χ.μ.}}$

δ. Η κατώτατη τιμή $\left(P_K\right)$ που επιβάλλεται από το Κράτος είναι μεγαλύτερη από την τιμή ισορροπίας $\left(P_E\right)$, με αποτέλεσμα να δημιουργείται πλεόνασμα στην αγορά, ίσο με $Q_S - Q_D$.

Για P_K: $\left.\begin{matrix} Q_D = 200 - P_K \\ Q_S = 20 + 2P_K \end{matrix}\right\} Q_S - Q_D = \left(20 + 2P_K\right) - \left(200 - P_K\right) = -180 + 3P_K$ (1)

Το πλεόνασμα αυτό το αγοράζει το Κράτος στην τιμή P_K.

Άρα: Επιβάρυνση Κρατικού Προϋπολογισμού =
$\text{Πλεόνασμα} \cdot P_K \Leftrightarrow 12.000 = \text{Πλεόνασμα} \cdot P_K$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) έχω:

$$12.000 = \left(-180 + 3P_K\right) \cdot P_K \Leftrightarrow 3P_K^{\ 2} - 180P_K - 12.000 = 0 \left\langle \begin{matrix} P_1 = -40\left(\text{αδύνατη}\right) \\ P_2 = 100 \end{matrix}\right.$$

Άρα: Η κατώτατη τιμή είναι $\boxed{P_K = 100 \ \text{χ.μ.}}$

ε. Για $P_K = 100$: $Q_{D_K} = 200 - 100 = 100$

Άρα: $\Sigma\Delta_K = P_K \cdot Q_{D_K} = 100 \cdot 100 = \boxed{10.000 \ \text{χ.μ.}}$

στ. Για $P_K = 100$: $Q_{S_K} = 20 + 2 \cdot 100 = 220$

Άρα: $\Sigma E_K = P_K \cdot Q_{S_K} = 100 \cdot 220 = 22.000 \ \text{χ.μ.}$

$\Sigma E_E = P_E \cdot Q_E = 60 \cdot 140 = 8.400 \ \text{χ.μ.}$

Άρα, οι παραγωγοί ωφελήθηκαν κατά
$\Sigma E_K - \Sigma E_E = 22.000 - 8.400 = \boxed{13.600 \ \text{χ.μ.}}$

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

- Γνωρίζουμε ότι:
  $\text{Φόρος εισοδήματος} = \text{Εισόδημα κλιμακίου} \cdot \text{φ.σ.}$

Πολίτης Ζ Εισόδημα=19.000€		
Ετήσιο εισόδημα (κλιμακίου)	**Φορολογικός συντελεστής**	**Φόρος**
8.000	0%	0
2.000	10%	200
9.000	22%	1.980
Εισόδημα: 19.000€		2.180€

β.

- Ο πολίτης Ω πλήρωσε φόρο εισοδήματος 2.960€.

- Για να υπολογίσουμε το εισόδημα του Ω πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το φόρο εισοδήματος σε κάθε κλιμάκιο.

Πολίτης Ω		
Εισόδημα κλιμακίου	**Φορολογικός συντελεστής**	**Φόρος**
8.000	0%	0
2.000	10%	200
10.000	22%	2.200
10.000€	28%	x
		2.400€ + x

- Βρίσκουμε το φόρο που πλήρωσε στο τελευταίο κλιμάκιο:
$2.960 = 2.400 + x \Rightarrow x = 2.960 - 2.400 \Rightarrow x = 560$ ο φόρος στο τελευταίο κλιμάκιο.
- Επομένως πρέπει να βρούμε ποιο τμήμα του εισοδήματος του πολίτη Ω αποδίδει φόρο 560€.
- Γνωρίζουμε ότι: $\text{Εισόδημα κλιμακίου} = \frac{\text{φόρος}}{\text{φ.σ.}} = \frac{560}{0,28} = 2.000$
- Άρα το εισόδημα του πολίτη Ω είναι:
$8.000 + 2.000 + 10.000 + 2.000 = 22.000\,€$

γ.

- Ο πολίτης Φ έχει αποφορολογημένο εισόδημα 28.000€.
- Γνωρίζουμε ότι
  $\text{Εισόδημα} = \text{αποφορολογημένα εισόδημα} + \text{Φόρος εισοδήματος}$

Πολίτης Φ		
Εισόδημα κλιμακίου	**Φορολογικός συντελεστής**	**Φόρος**
8.000	0%	0
2.000	10%	200
10.000	22%	2.200
10.000	28%	2.800
x	36%	$x \cdot 36\%$
Εισόδημα: 30.000+x		$5.200 + x \cdot 36\%$

- Άρα:
  $30.000 + x = 28.000 + 5.200 + 0,36x \Rightarrow$
  $30.000 + x = 33.200 + 0,36x \Rightarrow$
  $0,64x = 3.200 \Rightarrow x = 5.000\,€$ το εισόδημα του τελευταίου κλιμακίου
- Εισόδημα του πολίτη Φ $= 30.000 + 5.000 = 35.000\,€$
- $\text{Φόρος εισοδήματος} = \text{Εισόδημα} - \text{Αποφορολογημένα εισόδημα} =$
  $= 35.000 - 28.000 = 7.000\,€$

Επιμέλεια: Κουτσουμπέλη Κατερίνα

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

A.

1. Λάθος
2. Λάθος
3. Σωστή
4. Σωστή
5. Λάθος

Β.1. γ

Β.2. β

ΟΜΑΔΑ 2η

Σχολικό βιβλίο σελ. 170: Κεφάλαιο 9ο → Παράγραφος 4: «Είδη ανεργίας»

ΟΜΑΔΑ 3η

α) ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΓΟΡΑΣ:

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow 400 - 5P = -100 + 20P \Leftrightarrow P_E = 20 \text{ χ.μ.}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= 400 - 5 \cdot 20 = 300 \\ Q_S &= -100 + 20 \cdot 20 = 300 \end{aligned}\right\} Q_E = 300 \text{ μον.}$$

β) $«\text{Καπέλο»}=10 \Leftrightarrow P^{/}-P_A=10 \Leftrightarrow P^{/}=P_A+10 \ (1)$

Στην P_A, οι παραγωγοί προσφέρουν $Q_S=-100+20P_A \ (2)$ ενώ οι καταναλωτές είναι διατεθειμένοι να απορροφήσουν την ποσότητα αυτή σε μία $P^{/}$, δηλαδή $Q_D=400-5P^{/} \ (3)$.

Για $P^{/}$ και P_A, η $Q_D=Q_S$.

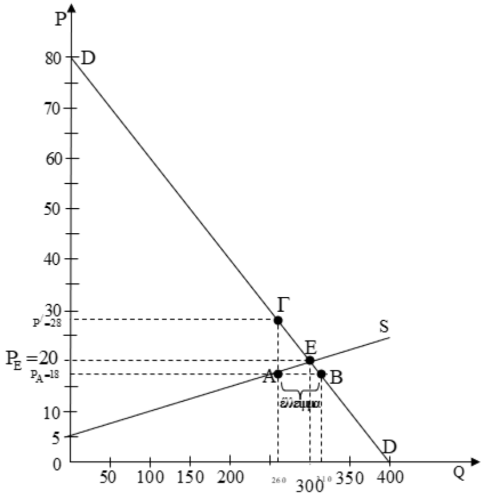
Άρα: Από (2), (3) έχω:

$$Q_D=Q_S \Leftrightarrow 400-5P^{/}=-100+20P_A \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 400-5(P_A+10)=$$
$$-100+20P_A \Leftrightarrow P_A=18 \ \text{χ.μ.}$$

γ) Για $P_A=18$:

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= 400-5\cdot 18=310 \\ Q_S &= -100+20\cdot 18=260 \end{aligned}\right\} \text{Έλλειμμα}=Q_D-Q_S=310-260=50 \ \text{μον.}$$

δ)



ΟΜΑΔΑ 4η

α.

- $Ρ.Π_{03} = 12\% \Leftrightarrow \dfrac{ΔΤ_{03} - ΔΤ_{02}}{ΔΤ_{02}} \cdot 100 = 12 \Leftrightarrow \dfrac{ΔΤ_{03} - 125}{125} \cdot 100 = 12 \Leftrightarrow ΔΤ_{03} = 140$
- $ΑΕΠ_{(2002)} στ.τ. = \dfrac{ΑΕΠ_{(2002)} τρ.τ.}{ΔΤ_{02}} \cdot 100 = \dfrac{150}{125} \cdot 100 = 120$ χ.μ.
- Πραγματική ποσοστιαία μεταβολή(2002-2003) $= 50\% \Leftrightarrow$

  $\dfrac{ΑΕΠ_{03\ στ.τ} - ΑΕΠ_{02\ στ.τ}}{ΑΕΠ_{02\ στ.τ}} \cdot 100 = 50\% \Leftrightarrow$

  $\dfrac{ΑΕΠ_{03\ στ.τ} - 120}{120} \cdot 100 = 50\% \Leftrightarrow ΑΕΠ_{03\ στ.τ} = 180$ χ.μ
- $ΑΕΠ_{(2003)} στ.τ. = \dfrac{ΑΕΠ_{(2003)} τρ.τ.}{ΔΤ_{03}} \cdot 100 \Leftrightarrow 180 = \dfrac{ΑΕΠ_{(2003)} τρ.τ.}{140} \cdot 100 \Leftrightarrow$

  $ΑΕΠ_{(2003)} τρ.τ. = 252$ χ.μ.
- $Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2002)} στ.τ. = \dfrac{Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2002)} τρ.τ.}{ΔΤ_{(2002)}} \cdot 100 \Leftrightarrow$

  $1,2 = \dfrac{Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2002)} τρ.τ.}{125} \cdot 100 \Leftrightarrow Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2002)} τρ.τ. = 1,5$ χ.μ
- $Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2003)} στ.τ. = \dfrac{Κ.Κ.\ ΑΕΠ_{(2003)} τρ.τ.}{ΔΤ_{(2003)}} \cdot 100 = \dfrac{3,15}{140} \cdot 100 = 2,25$ χ.μ.

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΕΝΟΣ

ΕΤΟΣ	ΔΤ	ΑΕΠ (τρέχ.τ.)	ΑΕΠ (στ.τ.)	Κ.Κ. ΑΕΠ (τρέχ.τ.)	Κ.Κ. ΑΕΠ (στ.τ.)
2001	100	80	80	1,1	1,1
2002	125	150	**120**	**1,5**	1,2
2003	**140**	**252**	**180**	3,15	**2,25**

β. $\text{Κ.Κ. ΑΕΠ στ.τ.} = \dfrac{\text{ΑΕΠ στ.τ.}}{\text{πληθυσμός}}$

- Άρα για το έτος 2002:

$$1,2 = \frac{120}{\text{πληθυσμός}} \Leftrightarrow \text{πληθυσμός}_{(2002)} = 100 \text{ κάτοικοι}$$

- Για το έτος 2003:

$$2,25 = \frac{180}{\text{πληθυσμός}} \Leftrightarrow \text{πληθυσμός}_{(2003)} = 80 \text{ κάτοικοι}$$

γ. Γίνεται αλλαγή του έτους βάσης.

- $\Delta T_{(2002)} = 100$ (νέο έτος βάσης)
- $\Delta T_{(2001)} = \dfrac{100}{125} \cdot 100 = 80$
- $\Delta T_{(2003)} = \dfrac{140}{125} \cdot 100 = 112$

$$\text{ΑΕΠ στ.τ.} = \frac{\text{ΑΕΠ τρ.τ.}}{\Delta T} \cdot 100$$

- $\text{ΑΕΠ}_{(2001)\text{ στ.τ.}} = \dfrac{80}{80} \cdot 100 = 100$
- $\text{ΑΕΠ}_{(2002)\text{ στ.τ.}} = \dfrac{150}{100} \cdot 100 = 150$
- $\text{ΑΕΠ}_{(2003)\text{ στ.τ.}} = \dfrac{252}{112} \cdot 100 = 225$
- Επομένως ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

Έτος	ΔΤ	Α.Ε.Π. (τρ.τ.)	Α.Ε.Π. (στ.τ.)
2001	80	80	100
2002	100	150	150
2003	112	252	225

- Πραγματική μεταβολή(2001-2002) = $150 - 100 = 50$ χ.μ.
- Πραγματική μεταβολή(2002-2003) = $225 - 150 = 75$ χ.μ.

Επιμέλεια: Κουτσουμπέλη Κατερίνα

4^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

α. Λάθος
β. Σωστή
γ. Σωστή
δ. Λάθος
ε. Λάθος

Β.1 β και γ

Β.2 δ

ΟΜΑΔΑ 2η

Κεφάλαιο 5^o . Μεταβολή της τιμής και της ποσότητας ισορροπίας.
Μεταβολή της Ζήτησης.
Μεταβολή της Προσφοράς.
Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.: 96, 97, 98

ΟΜΑΔΑ 3η

α.

ΑΓΝΩΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ L	L	AP	Q	MP	ATC	MC
1	x	25	25x		80	
2	x+1		25x+40			
3	x+2	max		30		50

$$AP_{3max} = MP_3 = 30$$

$$Q_3 = AP_3 \cdot L_3 = 30 \cdot (x+2) \Rightarrow Q_3 = 30x + 60$$

$$MP_3 = \frac{Q_3 - Q_2}{L_3 - L_2} \Rightarrow 30 = \frac{30x + 60 - 25x - 40}{x + 2 - x - 1} \Rightarrow x = 2$$

Ο πίνακας γίνεται:

L	Q	MC
2	50	
3	90	
4	120	50

$$TC_{50} = ATC_{50} \cdot Q_{50} = 80 \cdot 50 = 4.000$$
$$VC = L \cdot W$$
$$MC_{120} = \frac{VC_{120} - VC_{90}}{Q_{120} - Q_{90}} \Rightarrow 50 = \frac{4w - 3w}{120 - 90} \Rightarrow w = 1500$$
$$VC_{50} = L \cdot W = 2 \cdot 1500 = 3000$$
$$FC = TC_{50} - VC_{50} = 4000 - 3000 \Rightarrow FC = 1000$$

β.

$$VC_{90} = L \cdot W = 3 \cdot 1500 = 4500$$
$$VC_{120} = L \cdot W = 4 \cdot 1500 = 6000$$

γ.

Αν η επιχείρηση απασχολήσει έναν επιπλέον L η παρουσία του θα μεταβάλει την παραγωγή κατά 25 μονάδες.

Άρα $MP_5 = 25$, από

$$MP_5 = \frac{Q_5 - Q_4}{L_5 - L_4} \Rightarrow 25 = \frac{Q_5 - 120}{5 - 4} \Rightarrow Q_5 = 145$$
$$VC_{145} = L \cdot W = 5 \cdot 1500 = 7500$$
$$VC_x = VC_{145} - 2000 \Rightarrow VC_x = 5500$$

Το Q_x είναι ενδιάμεση παραγωγή μεταξύ του Q_{90} και Q_{120}. Το οριακό κόστος δείχνει στην επιχείρηση πόσο θα μεταβληθεί το κόστος παραγωγής της από την παραγωγή της κάθε φορά τελευταίας παραγόμενης μονάδας. Κάθε μία μονάδα μεγαλύτερη του 90 και εως το 120 έχει οριακό κόστος 50.

Άρα,

$$MC_x = 50$$

$$MC_x = \frac{VC_x - VC_{90}}{Q_x - Q_{90}} \Rightarrow 50 = \frac{5500-4500}{Q_x - 90} \Rightarrow Q_x = 110$$

$$\Delta Q = Q_{145} - Q_{110} = 145 - 110 = 35 \text{ μονάδες}$$

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

$$\text{"καπέλο"} = P_A + 20 \Rightarrow P' - P_A = P_A + 20 \Rightarrow P' = 2P_A + 20 \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Συνολικά Έσοδα } P_A = 200 \Rightarrow P_A \cdot Q_{S_A} = 200 \\ \text{Συνολικά Έσοδα } P' = 800 \Rightarrow P' \cdot Q_{S_A} = 800\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{S_A} = \dfrac{200}{P_A} \\ Q_{S_A} = \dfrac{800}{P'} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{200}{P_A} = \frac{800}{2P_A + 20} \Rightarrow \boxed{P_A = 10}$$

$$P' = 2 \cdot 10 + 20 \Rightarrow \boxed{P' = 40}$$

$$Q_{S_A} = \frac{200}{10} \Rightarrow \boxed{Q_{S_A} = 20}$$

β. Η προσφορά και η ζήτηση είναι γραμμικές συναρτήσεις. Ο λόγος $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ εκφράζει την κλίση της ευθείας, δηλ. το όρο «δ» στη συνάρτηση της προσφοράς και το «β» στη συνάρτηση της ζήτησης.

Άρα,

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_A}{Q_{S_A}} \Rightarrow 2 = \delta \cdot \frac{10}{20} \Rightarrow \delta = 4$$

$$Q_{S_A} = \gamma + \delta P \Rightarrow Q_{S_A} = \gamma + 4 \cdot P_A \Rightarrow 20 = \gamma + 4 \cdot 10 \Rightarrow \gamma = -20$$

$$Q_S = -20 + 4 \cdot P$$

Στην $P': Q_{S_A} = 20 = Q_D$

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P'}{Q_D} \Rightarrow -4 = \beta \cdot \frac{40}{20} \Rightarrow \beta = -2.$$

$$Q_D = \alpha + \beta P' \Rightarrow 20 = \alpha - 2 \cdot 40 \Rightarrow \alpha = 100.$$

$$Q_D = 100 - 2 \cdot P$$

Επιμέλεια: Κουτσουμπέλη Κατερίνα

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

1. Λάθος
2. Λάθος
3. Σωστή
4. Σωστή
5. Σωστή

Β1. γ

Β2. β

ΟΜΑΔΑ 2η

Κεφάλαιο 1ο . Το οικονομικό κύκλωμα
Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.: 23, 24.

ΟΜΑΔΑ 3η

α.

2007

Το έτος 2007 είναι έτος βάσης, άρα το ΑΕΠ σε τρέχουσες τιμές ταυτίζεται με το ΑΕΠ σε σταθερές τιμές. Για να βρεθεί ο αριθμός των ανέργων πρέπει να υπολογιστεί ο πληθυσμός το 2007 και το εργατικό δυναμικό της χώρας αυτής. Άρα:

- $\text{Πληθυσμός} = \dfrac{\text{ΑΕΠ}_{(2007)\text{ σε τ. }(2007)}}{\text{ΚΚ ΑΕΠ}_{(2007)}} = \dfrac{320.000.000.000}{16.000} = 20.000.000 \text{ άτομα}$
- $\text{Εργατικό δυναμικό} = \text{Πληθυσμός} \cdot 65\% = 20.000.000 \cdot 65\% = 13.000.000 \text{ άτομα}$
- $\text{Άνεργοι} = \dfrac{\text{Εργατικό δυναμικό} \cdot \text{Ποσοστό ανεργίας}}{100} =$

  $= \dfrac{13.000.000 \cdot 23}{100} = 2.990.000 \text{ άτομα}$

2008

- $\text{Πληθυσμός}_{(2008)} = \text{Πληθυσμός}_{(2007)} + \text{Πληθυσμός}_{(2007)} \cdot 25\% =$

  $20.000.000 + 20.000.000 \cdot 25\% = 25.000.000 \text{ άτομα}$
- $\text{Οικονομικά ενεργός πληθυσμός} = \text{Εργατικό δυναμικό}$
- $\text{Εργατικό δυναμικό}_{(2008)} = \text{Εργατικό δυναμικό}_{(2007)} + 3.000.00 =$

  $= 13.000.000 + 3.000.000 = 16.000.000 \text{ άτομα}$
- $\text{Ποσοστό ανεργίας}_{(2008)} = 23 + 2 = 25\%$
- $\text{Άνεργοι} = \dfrac{16.000.000 \cdot 25}{100} = 4.000.000 \text{ άτομα}$

β.

- $\text{Οικονομικά μη ενεργός πληθυσμός}_{(2008)} =$

  $\text{Πληθυσμός} - \text{Οικονομικά ενεργός πληθυσμός} =$

  $25.000.000 - 16.000.000 = 9.000.000 \text{ άτομα}$

γ.

- Το ΚΚ πραγματικό $\text{ΑΕΠ}_{(2008)}$ = 16.000
- Άρα:
- $\text{ΑΕΠ}_{(2008)\text{ σε τ.}(2007)} = \text{ΚΚ ΑΕΠ}_{(2008)\text{ σε τ.}(2007)} \cdot \text{Πληθυσμό}_{(2008)} =$

  $= 16.000 \cdot 25.000.000 = 400.000.000.000$
- $\text{Πραγματική ποσοστιαία μεταβολή ΑΕΠ}_{(2007-2008)} = \dfrac{400-320}{320} \cdot 100 = 25\%$

δ. Για να βρεθεί ο ρυθμός πληθωρισμού του 2008 πρέπει να υπολογιστεί ο $\text{ΔΤ}_{(2008)}$

Άρα:

- $$\Delta T_{(2008)} = \frac{ΑΕΠ_{(2008)\ σε\ τ.(2008)}}{ΑΕΠ_{(2008)\ σε\ τ.(2007)}} \cdot 100 = \frac{460}{400} \cdot 100 = 115$$
- $$ΡΠ_{(2008)} = \frac{\Delta T_{(2008)} - \Delta T_{(2007)}}{\Delta T_{(2007)}} \cdot 100 = \frac{115-100}{100} \cdot 100 = 15\%$$

ΟΜΑΔΑ 4η

Α. $E: \ Q_D = Q_S \Rightarrow 120 - 10P = 20P \Rightarrow \boxed{P_E = 4}$

Για $P_E = 4$:

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= 120 - 10 \cdot 4 \Rightarrow Q_D = 80 \\ Q_S &= 20 \cdot 4 \Rightarrow Q_S = 80 \end{aligned}\right\} \boxed{Q_E = 80}$$

Στην Ε:

$Q_{D'} > Q_S \Rightarrow Q_{D'} - Q_S = έλλειμμα$

$Q_{D'} - Q_S = 16 \Rightarrow Q_{D'} - 80 = 16 \Rightarrow Q_{D'} = 96$

Ποσοστό μετ. ποσ. $= \dfrac{96-80}{80} \cdot 100 = \boxed{20\%}$

$E_Y = \dfrac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta Y}{Y}} = \dfrac{20\%}{10\%} = 2$. Το «Λ» είναι κανονικό.

Β.

$Q_{D'} = 1,2 \cdot Q_D \Rightarrow \boxed{Q_{D'} = 144 - 12P}$ → η νέα ζήτηση

Στο νέο σημείο ισορροπίας E':

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_{E'}}{Q_{E'}} \Rightarrow -1 = -12 \cdot \frac{P_{E'}}{144 - 12P_{E'}} \Rightarrow \boxed{P_{E'} = 6}$$

Οπότε: $Q_{D'} = 144 - 12 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{Q_{E'} = 72}$

Στο νέο σημείο ισορροπίας E':

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_{E'}}{Q_{E'}} \Rightarrow 1 = \delta \cdot \frac{6}{72} \Rightarrow \delta = 12$$

$$Q_S = \gamma + \delta P \Rightarrow 72 = \gamma + 12 \cdot 6 \Rightarrow \gamma = 0$$

Άρα η νέα προσφορά είναι: $\boxed{Q_{S'} = 12P}$

Γ. Στο νέο σημείο ισορροπίας E' η $|E_D| = 1$ είναι το μέσον της ευθείας της ζήτησης.

- Εάν η προσφορά μειωθεί, δηλαδή κινηθεί προς τα αριστερά με σταθερή τη ζήτηση, η αγορά θα ισορροπήσει σε μεγαλύτερη τιμή και μικρότερη ποσότητα. Η ελαστικότητα ζήτησης είναι ελαστική στην περιοχή αυτή.
  Η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Άρα η συνολική δαπάνη που είναι το συνολικό έσοδο των παραγωγών θα μειωθεί.
- Εάν η προσφορά αυξηθεί, δηλαδή κινηθεί προς τα δεξιά με σταθερή τη ζήτηση, η αγορά θα ισορροπήσει σε μικρότερη τιμή και μεγαλύτερη ποσότητα. Η ελαστικότητα ζήτησης είναι ανελαστική στην περιοχή αυτή.
  Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας. Άρα η συνολική δαπάνη που είναι το συνολικό έσοδο των παραγωγών θα μειωθεί.
- Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι παραγωγοί του αγαθού «Λ» πρέπει να κρατήσουν σταθερή την προσφορά γιατί κάθε μετατόπιση θα μειώσει τα έσοδά τους.

Επιμέλεια: Κουτσουμπέλη Κατερίνα

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.1

α. ΣΩΣΤΗ
β. ΣΩΣΤΗ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΣΩΣΤΗ

Β 1 γ
Β2 δ

ΟΜΑΔΑ 2η

Α. Κεφάλαιο 6ο. Βλέπε σχολικό βιβλίο 7. Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν σελ. 140,141

Β. Κεφάλαιο 6ο. Βλέπε σχολικό βιβλίο 9. Το Κατά Κεφαλήν Πραγματικό ΑΕΠ σελ. 142

ΟΜΑΔΑ 3η

α.

- $L = 4$, $AP_4 = 40$, άρα $Q_4 = AP_4 \cdot L_4 = 40 \cdot 4 = 160$
  $VC_{160} = \text{ημερομήσθια} + \text{πρώτες ύλες} + \text{μεταφορικά} =$
  $= 1500 + 200 + 100 = \boxed{1800}$

- $L = 5$, $AP_5 = 40$, $AP_{5\max} = MP_5 = 40$
  Άρα $MP_5 = \dfrac{Q_5 - Q_4}{L_5 - L_4} \Rightarrow Q_5 = 200$
  $\Delta VC = \Delta TC = 1400 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} TC_{200} - TC_{160} = 1400 \\ TC_{200} = 1,5TC_{160} \end{array}\right| \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1,5TC_{160} - TC_{160} = 1400 \Rightarrow \boxed{TC_{160} = 2800}$
  Άρα $TC_{200} = 1,5 \cdot 2800 = \boxed{4200}$

- $Q_x = 210$ Αφού η κάθε μία από τις επιπλέον μονάδες προϊόντος μεταβάλλει το κόστος κατά 60 ευρώ, ισχύει $MC_{210} = 60$.
  $MC_{210} = \dfrac{TC_{210} - TC_{200}}{Q_{210} - Q_{200}} \Rightarrow 60 = \dfrac{TC_{210} - 4200}{10} \Rightarrow \boxed{TC_{210} = 4800}$

Άρα:

Q	TC
160	2800
200	4200
210	4800

β. Το ενοίκιο του κτιρίου είναι το Σταθερό Κόστος

Άρα $FC = TC_{160} - VC_{160} = 2800 - 1800 = \boxed{1000}$

$\text{Ενοίκιο} = \text{τετραγωνικά μέτρα} \cdot \text{τιμή τετραγωνικού μέτρου}$

Άρα $\text{Τιμή τετραγωνικού} = \dfrac{1000}{500} = 2 \text{ ευρώ το τετραγωνικό μέτρο}$

γ. Για $Q_{\psi} = \text{άγνωστο}\ TC_{\psi} = 3500$

Χρειαζόμαστε το MC_{200}

$$MC_{200} = \frac{TC_{200} - TC_{160}}{Q_{200} - Q_{160}} = \frac{4200 - 2800}{40} = 35$$

Άρα $MC_{\psi} = 35$

$$MC_{\psi} = \frac{TC_{\psi} - TC_{160}}{Q_{\psi} - Q_{160}} \Rightarrow 35 = \frac{3500 - 2800}{Q_{\psi} - 160} \Rightarrow Q_{\psi} = 180$$

Q	TC	MC
160	2800	-
Q_{ψ}=180	**3500**	35
210	4200	35

Αν αυξήσει την παραγωγή της κατά 25 μονάδες $Q = 180 + 25 = 205$

Το Q_{205} ενδιάμεση παραγωγή, άρα $MC_{205} = 60$

$$MC_{205} = \frac{TC_{205} - TC_{200}}{Q_{205} - Q_{200}} \Rightarrow 60 = \frac{TC_{205} - 4200}{5} \Rightarrow \boxed{TC_{205} = 4500}$$

Q	TC	MC
200	4200	-
205	**TC=4500**	60
210	4800	60

Άρα $\Delta TC = TC_{205} - TC_{180} = 4500 - 3500 = 1000$

ΟΜΑΔΑ 4η

α. Αγαθό Χ

Στην $Q_{D_1} = 100$, $\Sigma\Delta_1 = 2500$, $P_1 = \frac{\Sigma\Delta_1}{Q_{D_1}} = \frac{2500}{100} = 25$

$P_1 = 25$, $Q_{D_1} = 100$. Το μέσον της ευθείας D_x. Άρα $ED_x = -1$

Από την $ED_x = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} \Rightarrow -1 = \beta \cdot \frac{25}{100} \Rightarrow \boxed{\beta = 4}$

$Q_{Dx} = \alpha + \beta P \Rightarrow 100 = \alpha - 4 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{\alpha = 200}$

$\boxed{Q_{Dx} = 200 - 4P}$

Αγαθό Ψ

Στην τιμή $P_1 = 10$, $ED_\psi = -1/3$ και $\beta = -10$ από την

$$ED_\psi = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} \Rightarrow -\frac{1}{3} = \beta \cdot \frac{10}{Q_1} \Rightarrow \boxed{Q_1 = 300}$$

$$Q_{D_\psi} = \alpha + \beta P \Rightarrow 300 = \alpha - 10 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\alpha = 400}$$

$$\boxed{Q_{D_\psi} = 400 - 10P}$$

β. Στην τιμή $P_1 = 25$,

$$\Sigma\Delta_1 = 12,5\% Y_1 \Rightarrow Y_1 = \frac{\Sigma\Delta_1}{0,125} \Rightarrow Y_1 = \frac{2500}{0,125} \Rightarrow \boxed{Y_1 = 20.000}$$

Άρα $Y_2 = Y_1 + 0,5Y_1 \Rightarrow Y_2 = 1,5Y_1 \Rightarrow \boxed{Y_2 = 30.000}$

γ. Η αύξηση του εισοδήματος αποτελεί προσδιοριστικό παράγοντα της ζήτησης και για τα δύο αγαθά. Η ζήτηση τους θα αυξηθεί γιατί είναι κανονικά. Για να βρεθεί η αντίδραση του καταναλωτή μετά την αύξηση του εισοδήματος τους πρέπει να υπολογισθεί η εισοδηματική ελαστικότητα (E_Y) και για τα δύο αγαθά σε σταθερή τιμή.

Αγαθό Χ

Η αύξηση του εισοδήματος κατά 50% αύξησε τη D_x κατά 100%. Άρα στην σταθερή τιμή 25, $E_Y = \dfrac{\Delta Q / Q}{\Delta Y / Y} = \dfrac{100\%}{50\%} \Rightarrow \boxed{E_Y = 2}$

Η αύξηση του εισοδήματος του καταναλωτή αύξησε τη ζήτηση κατά 200 μονάδες σε κάθε επίπεδο τιμής. Άρα στην σταθερή τιμή 10 η ποσότητα που ζητάει ο καταναλωτής είναι 500 μονάδες.

Άρα	$Y_1 = 20.000$	$Q_1 = 300$	$\Delta Y = 10.000$
	$Y_2 = 30.000$	$Q_2 = 500$	$\Delta Y = 200$

$$E_Y = \frac{\Delta Q}{\Delta Y} \cdot \frac{Y_1}{Q_1} = \frac{200}{10.000} \cdot \frac{20.000}{300} \Rightarrow \boxed{E_Y = 1,33}$$

δ. Η νέα συνάρτηση ζήτησης του Χ :

$$Q_{D'_x} = 2 \cdot Q_{D_x} \Rightarrow \boxed{Q_{D'_x} = 400 - 8P}$$

Η νέα συνάρτηση ζήτησης του Ψ :

$$Q_{D'_{\psi}} = Q_{D_{\psi}} + 200 \Rightarrow \boxed{Q_{D'_{\psi}} = 600 - 10P}$$

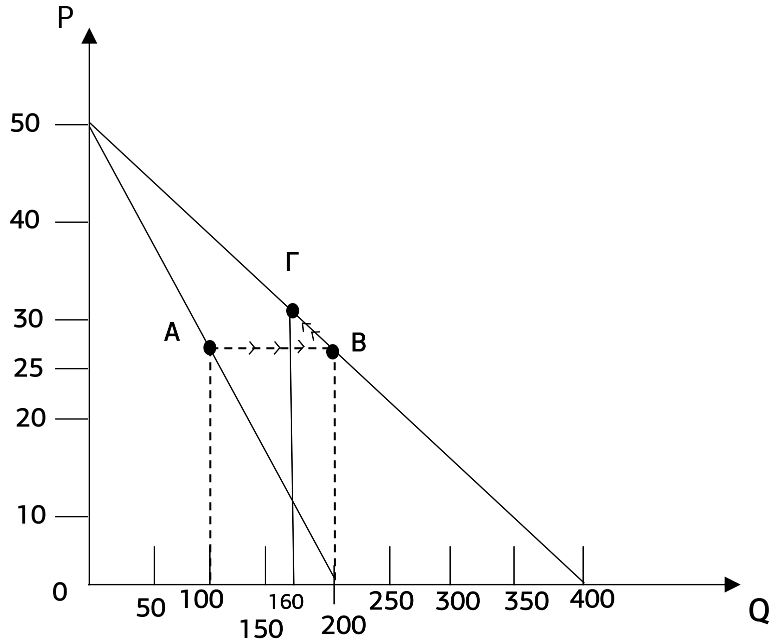
ε. Η αύξηση του εισοδήματος είχε σαν αποτέλεσμα ο καταναλωτής να ζητάει από το αγαθό Χ στην $P_1 = 25$, $Q_{D'_x} = 40 - 8 \cdot 25 \Rightarrow Q_{D_x} = 200$.

Η ταυτόχρονη μεταβολή της τιμής μείωσε την ποσότητα στις 160 μονάδες.
Άρα η τιμή αυξήθηκε από 25 χρηματικές μονάδες σε 30 χρηματικές μονάδες.
Η τελική $\text{Συνολική Δαπάνη} = 30 \cdot 160 = 4800$ χρ.μ.

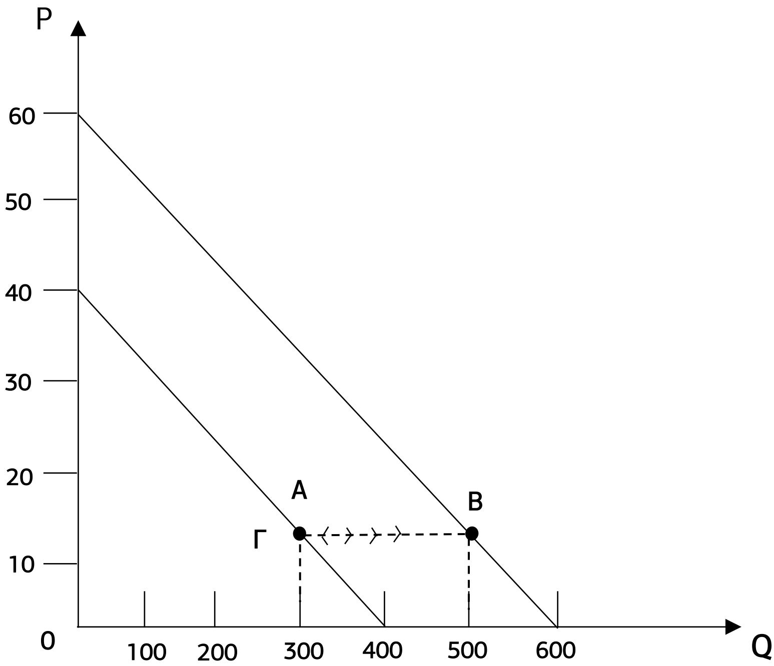
Άρα $\Delta\Sigma\Delta = 4800 - 2500 = 2300$ χρ.μ.
Η αύξηση της τιμής του Χ (συμπληρωματικό) μείωσε τη ζήτηση του Ψ κατά 200 μονάδες και την επανάφερε στο αρχικό επίπεδο.

Άρα η Συνολική Δαπάνη για το Ψ παρέμεινε σταθερή.
$\Sigma\Delta = 10 \cdot 300 = 3000$ χρηματικές μονάδες .

ΑΓΑΘΟ Χ



ΑΓΑΘΟ Ψ



7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

A..

1. ΛΑΘΟΣ
2. ΣΩΣΤΗ
3. ΣΩΣΤΗ
4. ΣΩΣΤΗ
5. ΛΑΘΟΣ

B.

I. γ
II. β

ΟΜΑΔΑ 2η

Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 83-84 (παράγραφοι α, β, γ).

ΟΜΑΔΑ 3η

α)

L	MP	MC	ATC	Q	VC
1	8			8	
2	10			18	20·400
3	12	1000		30	32·400
4	20	840	1064	50	49·200
5	10			60	

$MP = \dfrac{\Delta Q}{\Delta L}$ και βρίσκω το Q

$VC = W \cdot L + Q \cdot \text{Κόστος πρώτης ύλης}$

$VC_{30} = W \cdot 3 + 30 \cdot 600$

$VC_{50} = W \cdot 4 + 50 \cdot 600$

Άρα:

$$MC_{50} = \frac{VC_{50} - VC_{30}}{Q_{50} - Q_{30}} \Leftrightarrow 840 = \frac{(4W + 30.000) - (3W + 18.000)}{20} \Leftrightarrow$$

$W = 4.800 \chi.\mu.$

β) $TC_{50} = ATC_{50} \cdot Q_{50} = 1.064 \cdot 50 = 53.200$ χ.μ.

$VC_{50} = (4 \cdot 4.800) + (50 \cdot 600) = 49.200$ χ.μ.

Άρα: $FC_{50} = TC_{50} - VC_{50} = 53.200 - 49.200 = 4.000$ χ.μ. = FC

γ) $MC_{50} = \frac{VC_{50} - VC_{40}}{Q_{50} - Q_{40}} \Leftrightarrow 840 = \frac{49.200 - VC_{40}}{10} \Leftrightarrow VC_{40} = 40.800 \chi.\mu.$

$TC_{40} = FC + VC_{40} = 4.000 + 40.800 = 44.800$ χ.μ.

Άρα: $ATC_{40} = \frac{TC_{40}}{Q_{40}} = \frac{44.800}{40} = 1.120 \chi.\mu.$

δ) $VC_{50} = 49.200$

$\Delta(VC) = \Delta(TC) = 22.800$ χ.μ. (γιατί $\Delta(FC) = 0$)

Θέλουμε $VC_Q = 49.200 - 22.800 = 26.400$ χ.μ. (ενδιάμεσος)

Χρειαζόμαστε $MC_{30} = 1.000$ χ.μ.

Άρα: $MC_{30} = \frac{VC_{30} - VC_Q}{30 - Q} \Leftrightarrow 1000 = \frac{32.400 - 26.400}{30 - Q} \Leftrightarrow Q = 24$ μον.

ΟΜΑΔΑ 4η

α) $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1}$ ceteris paribus

Γ → Α: Για Υ = 4000

$P_1 = 30$: $ΣΔ_1 = P_1Q_1 \Leftrightarrow 450 = 30 \cdot Q_1 \Leftrightarrow Q_1 = 15$

$P_2 = 20$: $ΣΔ_2 = P_2Q_2 \Leftrightarrow 800 = 20 \cdot Q_2 \Leftrightarrow Q_2 = 40$

Άρα: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1} = \frac{25}{-10}\frac{30}{15} = -5$

$|E_D| > 1$: Ελαστική ζήτηση

β) Για Υ = 4.000: $ΣΔ_1 = 450$ χ.μ.
$ΣΔ_2 = 800$ χ.μ.

Άρα: $ΣΔ_2 - ΣΔ_1 = 800 - 450 = 350$ χ.μ.

Η $|E_D| > 1$ $\left(\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| > \left|\frac{\Delta P}{P}\right|\right)$ και η τιμή μειώνεται, άρα, στο γινόμενο $P \cdot Q$ επικράτησε η ισχυρότερη μεταβολή τη ποσότητας και η ΣΔ αυξήθηκε κατά 350 χ.μ.

γ) $ΣΔ_B = P_B \cdot Q_B \Leftrightarrow 1.600 = 20 \cdot Q_B \Leftrightarrow Q_B = 80$

Β → Α: Για P = 20

$Q_1 = 80$ $Y_1 = 6.000$

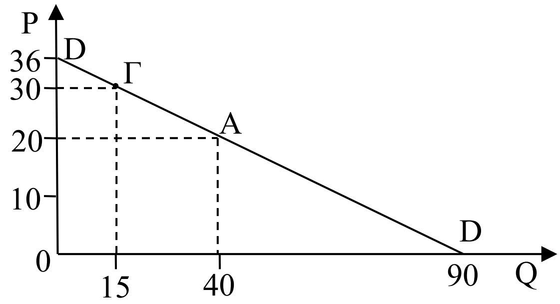
$Q_2 = 40$ $Y_2 = 4.000$

Άρα: $E_Y = \frac{\Delta Q}{\Delta Y}\frac{Y_1}{Q_1} = \frac{-40}{-2000}\frac{6000}{80} = 1{,}5$ $E_Y > 0$: Κανονικό αγαθό

δ) Για Υ = 4.000: $Q_D = α + βP$ (σημεία Α και Γ)

$$\begin{Bmatrix} 15 = \alpha + \beta \cdot 30 \\ 40 = \alpha + \beta \cdot 20 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 90 \text{ και } \beta = -2{,}5$$

Άρα: $\boxed{Q_D = 90 - 2{,}5\ P}$



ε) Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 46.

Επιμέλεια: Λυμπεροπούλου Κατερίνα

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

1. ΣΩΣΤΗ
2. ΛΑΘΟΣ
3. ΣΩΣΤΗ
4. ΛΑΘΟΣ
5. ΛΑΘΟΣ

Β.

1. δ
2. γ

ΟΜΑΔΑ 2η

α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 54, παράγραφος 3.
β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 65.

ΟΜΑΔΑ 3η

Α. Κ.Ε του Χ= $\frac{\text{Μονάδες Ψ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες Χ που παράγονται}}$

Α→ Β : $\frac{20}{20} = 1 // \text{Β} \to \Gamma\text{:} \frac{30}{20} = 1{,}5 // \Gamma \to \Delta\text{:} \frac{40}{20} = 2 // \Delta \to E\text{:} \frac{80}{20}$ =4

Το κόστος ευκαιρίας είναι <u>αυξανόμενο</u> (σελ.21-22 σχολικού βιβλίου)

Β. Για Χ=30 (ενδιάμεσος):

$$\underset{(B\to\Gamma)}{\text{K.E του}}\ X = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = \frac{150-\Psi}{10} \Leftrightarrow \Psi_{max} = 135$$

Άρα : Ο συνδυασμός Κ (Χ=30), Ψ=140) είναι ανέφικτος

Γ.

Από τη νέα Κ.Π.Δ., στο

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ	Χ (+50%)	Ψ
Α΄	0	170
Β΄	30	150
Γ΄	60	120
Δ΄	90	80
Ε΄	120	0

συνδυασμό Β ΄, για Χ=30 , Ψ_{max} = 150

Άρα, ο Κ (Χ=30, Ψ=140) είναι εφικτός (σελ 19 – 20 σχολ. βιβλίου)

Δ.

α. Για Χ=55 (ενδιάμεσος στην αρχική Κ.Π.Δ.):

$$\underset{(\Gamma\to\Delta)}{\text{K.E του}}\ X = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{120-\Psi}{15} \Leftrightarrow \Psi_{max} = 90$$

Άρα, για τις πρώτες 55 μονάδες από το Χ πρέπει να θυσιαστούν 170-90= 80 μονάδες Ψ.

β. Για Χ=55 (ενδιάμεσος στη νέα Κ.Π.Δ):

$$\underset{(B'\to\Gamma')}{\text{K.E του}}\ X = \frac{30}{30} = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{150-\Psi}{25} \Leftrightarrow \Psi_{max} = 125$$

Άρα, για τις πρώτες 55 μονάδες από το Χ πρέπει να θυσιαστούν 170-125=45 μονάδες Ψ.

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

ΕΤΟΣ	2015	2016	2017
P (χρηματικές μονάδες)	150	165	198
Q (μονάδες)	**160**	180	200
Α.Ε.Π. (σε τρέχουσες τιμές)	**24.000**	**29.700**	**39.600**
Δείκτης Τιμών (%)	100	**110**	**132**
Α.Ε.Π. (σε σταθερές τιμές)	**24.000**	**27.000**	30.000
Κατά κεφαλήν πραγματικό Α.Ε.Π.	20	**18**	18,75
Πληθυσμός	1.200	**1.500**	**1.600**
Εργατικό Δυναμικό	**960**	1.200	1.280
Απασχολούμενοι	816	984	**1.088**
Άνεργοι	**144**	216	**192**
Ποσοστό Ανεργίας	15%	**18%**	15%

- $\text{ΑΕΠ}_{\text{τρ.τ.}} = \text{P}_{\text{τρέχοντος έτους}} \cdot \text{Q}_{\text{τρέχοντος έτους}}$
- $\text{ΑΕΠ}_{\text{στ.τ.}} = \text{P}_{\text{έτους βάσης}} \cdot \text{Q}_{\text{τρέχοντος έτους}}$
- $\text{Κ.Κ.ΑΕΠ}_{\text{στ.τ.}} = \dfrac{\text{ΑΕΠ}_{\text{στ.τ.}}}{\text{Πληθυσμός}}$
- $\text{Ποσοστό ανεργίας} = \dfrac{\text{Άνεργοι}}{\text{Εργατικό δυναμικό}} \cdot 100$
- $\Delta\text{T} = \dfrac{\text{P}_{\text{τρέχοντος έτους}}}{\text{P}_{\text{έτους βάσης}}} \cdot 100$

- $\Delta T = \frac{ΑΕΠ_{τρ.τ.}}{ΑΕΠ_{στ.τ.}} \cdot 100$
- $ΑΕΠ_{στ.τ.} = \frac{ΑΕΠ_{τρ.τ.}}{\Delta T} \cdot 100$
- $\text{Εργατικό δυναμικό} = \text{Απασχολούμενοι} + \text{Άνεργοι}$

β.

<u>**ΕΤΟΣ ΒΑΣΗΣ = 2016**</u>

- $ΑΕΠ_{15\ στ.τ.} = P_{16} \cdot Q_{15} = 165 \cdot 160 = 26.400 χ.μ.$
- $ΑΕΠ_{16\ στ.τ.} = P_{16} \cdot Q_{16} = 165 \cdot 180 = 29.700 χ.μ.\ \left(= ΑΕΠ_{τρ.τ.} \to \text{Έτος βάσης}\right)$

$\text{Άρα: Πραγματική ποσοστ. μεταβολή}_{2015-2016} = \frac{29.700-26.400}{26.400} \cdot 100 = \boxed{12{,}5\%}$

γ. $\text{Ρυθμός πληθωρισμού}_{2017} = \frac{\Delta T_{17}-\Delta T_{16}}{\Delta T_{16}} \cdot 100 = \frac{132-110}{110} \cdot 100 =$
$= \boxed{20\%}$ (ανεξαρτήτως έτους βάσης)

δ. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 141.

<u>Επιμέλεια</u>: Λυμπεροπούλου Κατερίνα

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.

1. Λάθος
2. Σωστή
3. Λάθος
4. Σωστή
5. Λάθος

Β.

I. δ
II. α

ΟΜΑΔΑ 2η

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 164:

α. Η φάση της ύφεσης.
β. Η φάση της ανόδου.

Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 165, «Τα αίτια των οικονομικών κύκλων».

ΟΜΑΔΑ 3η

α)

Γ → Α: <u>Για W = 500 και ενοίκιο = 8000</u>

$P_1 = 25 \qquad Q_1 = 80$

$P_2 = 20 \qquad Q_2 = 40$

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1} = \frac{-40}{-5}\frac{25}{80} = 2{,}5$$

$E_S>1$: Ελαστική προσφορά

Ε → Β: <u>Για W = 400 και ενοίκιο = 6000</u>

$P_1 = 48 \qquad Q_1 = 100$

$P_2 = 24 \qquad Q_2 = 70$

$$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1} = \frac{-30}{-24}\frac{48}{100} = 0{,}6$$

$E_S<1$: Ανελαστική προσφορά

β) $Q_S = \gamma + \delta P$ (ceteris paribus)

<u>Συνδυασμοί Α και Γ</u>

$$\left.\begin{aligned} 40 &= \gamma + \delta \cdot 20 \\ 80 &= \gamma + \delta \cdot 25 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \gamma &= -120 \\ \delta &= 8 \end{aligned}$$

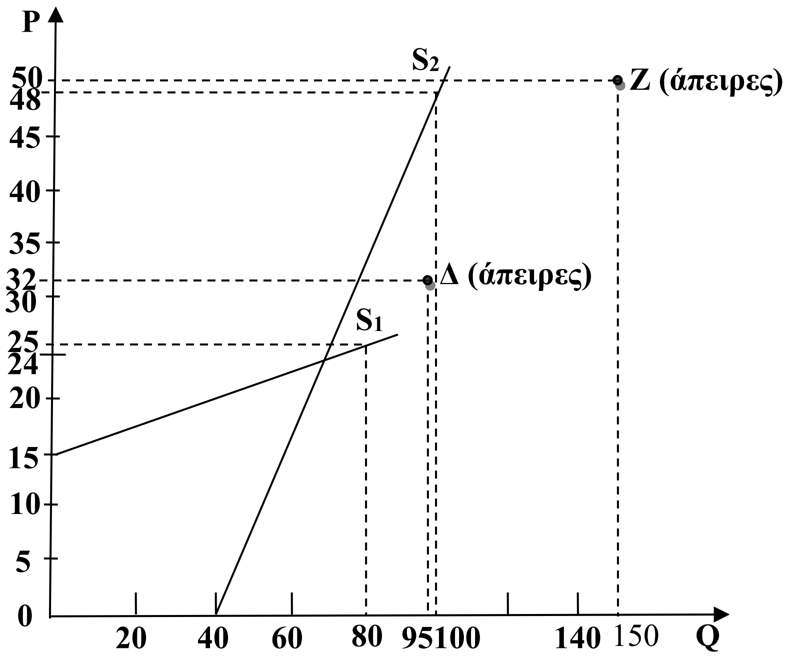
Άρα: $Q_{S_1} = -120 + 8\,P$

<u>Συνδυασμοί Β και Ε</u>

$$\left.\begin{aligned} 70 &= \gamma + \delta \cdot 24 \\ 100 &= \gamma + \delta \cdot 48 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \gamma &= 40 \\ \delta &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Άρα: $Q_{S_2} = 40 + 1{,}25\,P$

γ)



ΟΜΑΔΑ 4η

α)

L	Q	VC	AVC	MC	MP
1	4				4
2	10	3.000			6
3	18	4.800		225	8
4	28	6.800		200	10
5	; 40		225		12
6	; 48	10.800			8

$VC_{18} = W \cdot L_3 + Q_{18} \cdot \text{Αξία πρώτης ύλης} \Leftrightarrow$

$4800=(1000\cdot 3)+\left(18\cdot \text{Αξία πρώτης ύλης}\right)\Leftrightarrow$

Αξία πρώτης ύλης=100 χ.μ.

β)

$VC_{Q_5}=AVC\cdot Q_5=225\cdot Q_5\ (1)$

$VC_{Q_5}=W\cdot L_5+Q_5\cdot 100\overset{(1)}{\Leftrightarrow}225\cdot Q_5=(1000\cdot 5)+(Q_5\cdot 100)\Leftrightarrow Q_5=40\ \text{μον.}$

$MP_6=\dfrac{Q_6-Q_5}{L_6-L_5}\Leftrightarrow 8=\dfrac{Q_6-40}{1}\Leftrightarrow Q_6=48\ \text{μον.}$

γ)

$VC_{10}=(2\cdot 1000)+(10\cdot 100)=3000\ \text{χ.μ.}$

$MC_{18}=\dfrac{VC_{18}-VC_{10}}{Q_{18}-Q_{10}}=\dfrac{4800-3000}{8}=225\ \text{χ.μ.}$

$MC_{18}=\dfrac{VC_{18}-VC_{15}}{Q_{18}-Q_{15}}\Leftrightarrow 225=\dfrac{4800-VC_{15}}{3}\Leftrightarrow VC_{15}=4125\ \text{χ.μ.}$

Άρα: $AVC_{15}=\dfrac{VC_{15}}{Q_{15}}=\dfrac{4125}{15}=275\text{χ.μ.}$

δ) $VC_{48}=(1000\cdot 6)+(48\cdot 100)=10.800\text{χ.μ.}$

Θέλουμε $VC_Q=10.800-5.800=5.000\text{χ.μ.}$ (ενδιάμεσος)

Χρειαζόμαστε MC_{28} και το υπολογίζουμε

($VC_{28}=1000\cdot 4+28\cdot 100=6.800\text{χ.μ.}$)

$MC_{28}=\dfrac{VC_{28}-VC_{18}}{Q_{28}-Q_{18}}=\dfrac{6.800-4.800}{10}=200\ \text{χ.μ.}$

Άρα: $MC_{28}=\dfrac{VC_{28}-VC_Q}{28-Q}\Leftrightarrow 200=\dfrac{6.800-5.000}{28-Q}\Leftrightarrow Q=19\ \text{μον.}$

ε) Βρίσκουμε το $MP=\dfrac{\Delta Q}{\Delta L}$.

Η λειτουργία του Νόμου της Φθίνουσας ή μη Ανάλογης Απόδοσης αρχίζει με την προσθήκη του 6ου εργάτη, γιατί το MP μειώνεται και το TP (Q) αρχίζει να αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό.

Επιμέλεια: Λυμπεροπούλου Κατερίνα

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α1.

α. Λάθος
β. Σωστή
γ. Σωστή
δ. Σωστή
ε. Λάθος

Α2.
I. α
II. γ

ΟΜΑΔΑ 2η

α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 13: «Συνειδητά … ζουν τα μέλη του».
β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 14: ii. «Η επιχείρηση».

ΟΜΑΔΑ 3η

α.

ΕΤΟΣ	P_X	P_Ψ	Q_X	Q_Ψ	Α.Ε.Π. (τρ.τ.)	Δ.Τ.	Α.Ε.Π. (στ.τ.)
2015	**4**	10	200	160	2.400	**80**	**3.000**
2016	5	12,5	240	224	**4.000**	100	**4.000**
2017	6	**15**	250	**300**	**6.000**	120	5.000

- $\text{ΑΕΠ}_{\text{τρ.τ.}} = P_{X\ \text{τρέχοντος έτους}} \cdot Q_{X\ \text{τρέχοντος έτους}} + P_{\Psi\ \text{τρέχοντος έτους}} \cdot Q_{\Psi\ \text{τρέχοντος έτους}}$
- $\text{ΑΕΠ}_{\text{στ.τ.}} = P_{X\ \text{έτους βάσης}} \cdot Q_{X\ \text{τρέχοντος έτους}} + P_{\Psi\ \text{έτους βάσης}} \cdot Q_{\Psi\ \text{τρέχοντος έτους}}$
- $\Delta T = \dfrac{P_{X\ \text{τρέχοντος έτους}} + P_{\Psi\ \text{τρέχοντος έτους}}}{P_{X\ \text{έτους βάσης}} + P_{\Psi\ \text{έτους βάσης}}} \cdot 100$

  ή $\Delta T = \dfrac{\text{ΑΕΠ}_{\text{τρ.τ.}}}{\text{ΑΕΠ}_{\text{στ.τ.}}} \cdot 100$

- $ΑΕΠ_{στ.τ.} = \frac{ΑΕΠ_{τρ.τ.}}{ΔΤ} \cdot 100$

β. <u>ΕΤΟΣ ΒΑΣΗΣ = 2015</u>

- $ΑΕΠ_{16\ σε\ στ.τ.} = (4 \cdot 240) + (10 \cdot 224) = 3.200 χ.μ.$
- $ΑΕΠ_{17\ σε\ στ.τ.} = (4 \cdot 250) + (10 \cdot 300) = 4.000 χ.μ.$

Άρα: $Πραγματική\ ποσοστ.\ μεταβολή_{2016-2017} = \frac{4.000-3.200}{3.200} \cdot 100 = \boxed{25\%}$

γ.

- $Ρυθμός\ πληθωρισμού_{2016} = \frac{ΔΤ_{16}-ΔΤ_{15}}{ΔΤ_{15}} \cdot 100 = \frac{100-80}{80} \cdot 100 = \boxed{25\%}$
- $Ρυθμός\ πληθωρισμού_{2017} = \frac{ΔΤ_{17}-ΔΤ_{16}}{ΔΤ_{16}} \cdot 100 = \frac{120-100}{100} \cdot 100 = \boxed{20\%}$

(ανεξάρτητα από το έτος βάσης)

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

P	Q_D	Q_S	ΕΛΛΕΙΜΜΑ	ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ
80	360	<u>120</u>	240	
120	40	<u>280</u>		240

<u>ΖΗΤΗΣΗ</u>: $Q_D = α + βP$

$$\left.\begin{aligned} 360 &= α + β \cdot 80 \\ 40 &= α + β \cdot 120 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} α &= 1.000 \\ β &= -8 \end{aligned}\right\} \text{ ΑΡΑ: } Q_D = 1.000 - 8P$$

Για $P = 80$: Έλλειμμα $= Q_D - Q_S \Leftrightarrow 240 = 360 - Q_S \Leftrightarrow Q_S = 120$

Για $P = 120$: Πλεόνασμα $= Q_S - Q_D \Leftrightarrow 240 = Q_S - 40 \Leftrightarrow Q_S = 280$

$$Q_S = γ + δ \cdot P, \text{ άρα } \left.\begin{aligned} 120 &= γ + δ \cdot 80 \\ 280 &= γ + δ \cdot 120 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} γ &= -200 \\ δ &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ ΑΡΑ: } Q_S = -200 + 4P$$

β.

Ισορροπία: $Q_D = Q_S \Leftrightarrow 1000 - 8P = -200 + 4P \Leftrightarrow P_E = 100$ χ.μ

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= 1.000 - 8 \cdot 100 = 200 \\ Q_S &= -200 + 4 \cdot 100 = 200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_E = 200 \text{ μον.}$$

γ.

Η $E_Y > 0$, άρα, το αγαθό Χ είναι κανονικό αγαθό.

Επομένως, η ζήτηση του αγαθού Χ <u>αυξήθηκε</u>, όταν αυξήθηκε το εισόδημα.

$$E_Y = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta Y}{Y}} \Leftrightarrow 1,25 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{20\%} \Leftrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 25\%$$

ΑΡΑ: $Q_{D'} = Q_D + \frac{25}{100} Q_D =$

$$\left(1.000 - 8P\right) + \frac{1}{4}\left(1.000 - 8P\right) = 1.250 - 10P = Q_{D'}$$

Αύξηση του κόστους παραγωγής σημαίνει <u>μείωση</u> της προσφοράς του αγαθού Χ.

ΑΡΑ:

$$Q_{S'} = Q_S - \frac{50}{100} Q_S = \left(-200 + 4P\right) - \frac{1}{2}\left(-200 + 4P\right) = -100 + 2P = Q_{S'}$$

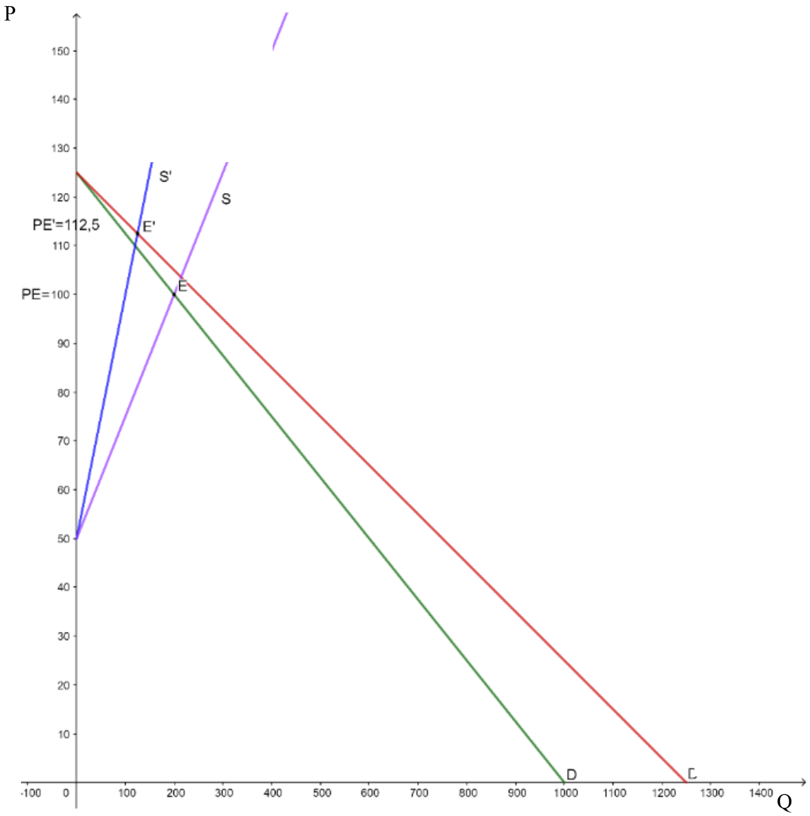
δ.

ΝΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ:

$$Q_{D'} = Q_{S'} \Leftrightarrow 1.250 - 10P = -100 + 2P \Leftrightarrow P_{E'} = 112,5 \text{ χ.μ}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{D'} &= 1.250 - 10 \cdot 112,5 = 125 \\ Q_{S'} &= -100 + 2 \cdot 112,5 = 125 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_{E'} = 125 \text{ μον.}$$

ε.



Επιμέλεια: Λυμπεροπούλου Κατερίνα

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α1.

Α. ΣΩΣΤΗ
Β. ΛΑΘΟΣ
Γ. ΛΑΘΟΣ
Δ. ΣΩΣΤΗ
Ε. ΛΑΘΟΣ

Α2.
Ι. β
ΙΙ. β

ΟΜΑΔΑ 2η

Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 182 (iiβ) «Δημόσιος Δανεισμός».

ΟΜΑΔΑ 3η

$Q_D = 500 - 25P \qquad Q_S = -400 + 50P$

α.
Η $E_Y > 0$, άρα, το αγαθό Χ είναι κανονικό αγαθό.
Επομένως η αύξηση του εισοδήματος θα <u>αυξήσει</u> και τη ζήτηση του αγαθού Χ.

$$E_Y = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta Y}{Y}} \Leftrightarrow 2 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{10\%} \Leftrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 20\%$$

ΑΡΑ: $Q_{D'} = Q_D + \frac{20}{100}Q_D = (500 - 25P) + \frac{1}{5}(500 - 25P) = 600 - 30P = Q_{D'}$

Μείωση του κόστους παραγωγής σημαίνει <u>αύξηση</u> της προσφοράς του αγαθού Χ.
ΑΡΑ: $Q_{S'} = Q_S + 200 = (-400 + 50P) + 200 = -200 + 50P = Q_{S'}$

β.
ΝΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ: $Q_{D'} = Q_{S'} \Leftrightarrow 600 - 30P = -200 + 50P \Leftrightarrow P_{E'} = 10$ χ.μ

$$\left.\begin{array}{l} Q_{D'} = 600 - 30 \cdot 10 = 300 \\ Q_{S'} = -200 + 10 \cdot 50 = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_{E'} = 300 \text{ μον.}$$

γ.
Για P_A η $Q_{S'} = -200 + 50P_A$ (1)
ενώ οι καταναλωτές είναι διατεθειμένοι να απορροφήσουν την ποσότητα αυτή σε μία τιμή P', δηλαδή, $Q_{D'} = 600 - 30P'$ (2)
$\text{"Καπέλο"} = 8 \Leftrightarrow P' - P_A = 8 \Leftrightarrow P' = P_A + 8$ (3)
Για P' και P_A η $Q_{D'} = Q_{S'}$

$$(1),(2) \Rightarrow Q_{D'} = Q_{S'} \Leftrightarrow 600 - 30P' = -200 + 50P_A$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} 600 - 30(P_A + 8) = -200 + 50P_A \Leftrightarrow P_A = 7\chi.\mu.$$

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

L	Q	VC	MC
30	150	600	4
40	170	740	7
50	180	860	12

- $VC = w \cdot L + c \cdot Q$

Άρα: $\left. \begin{array}{l} 600 = w \cdot 30 + c \cdot 150 \\ 740 = w \cdot 40 + c \cdot 170 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} w = 10 \text{ χρηματικές μονάδες} \\ c = 2 \text{ χρηματικές μονάδες} \end{array}}$

β.

- $MC_{180} = \dfrac{VC_{180} - VC_{170}}{Q_{180} - Q_{170}} = \dfrac{860 - 740}{10} = 12$
- $MC_{180} = \dfrac{VC_{180} - VC_{175}}{Q_{180} - Q_{175}} \Leftrightarrow 12 = \dfrac{860 - VC_{175}}{5} \Leftrightarrow VC_{175} = 800$
- $VC_{175} = w \cdot L + c \cdot Q_{175} \Leftrightarrow 800 = 10 \cdot L + 2 \cdot 175 \Leftrightarrow L = 45 \; (\text{για } Q = 175)$

i.

- Για $Q = 150$: Δαπάνη εργασίας $= w \cdot L = 10 \cdot 30 = 300$ χ.μ.
- Για $Q = 175$: Δαπάνη εργασίας $= w \cdot L = 10 \cdot 45 = 450$ χ.μ.

Άρα αύξηση κατά $450 - 300 = \boxed{150 \text{ χ.μ.}}$

ii.

- Για $Q = 150$: Δαπάνη πρ. υλών $= c \cdot Q = 2 \cdot 150 = 300$ χ.μ.
- Για $Q = 175$: Δαπάνη πρ. υλών $= c \cdot Q = 2 \cdot 175 = 350$ χ.μ.

Άρα αύξηση κατά $350 - 300 = \boxed{50 \text{ χ.μ.}}$

γ. $MP_{40} = \dfrac{Q_{40} - Q_{30}}{L_{40} - L_{30}} = \dfrac{170 - 150}{10} = 2$, άρα,

$$2 = \frac{170 - Q_{32}}{40 - 32} \Leftrightarrow Q_{32} = 154 \ (\text{για } L = 32)$$

Άρα: $VC_{154} = w \cdot L_{32} + c \cdot Q_{154} = 10 \cdot 32 + 2 \cdot 154 = \boxed{628 \text{ χ.μ.}}$

δ. Βρίσκω:

$$MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$$

AVC_{min} για $Q = 150$ σημαίνει $AVC_{min} = MC$ (αρχή καμπύλης προσφοράς)

Ανερχόμενο $MC \geq AVC_{min} \rightarrow$ καμπύλη S

ΑΡΑ:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

$P = MC$	Q_S
4	150
7	170
12	180

$$Q_{S_{αγοραία}} = Q_{S_{ατομική}} \cdot \text{Αριθμός επιχειρήσεων}$$

ΑΡΑ:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΓΟΡΑΙΑΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

P	Q_S
4	$150 \cdot 200 = 30.000$
7	$170 \cdot 200 = 34.000$
12	$180 \cdot 200 = 36.000$

ε. Η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της όταν $P = MC$.
Άρα, πρέπει να παράγει $Q = 180$ $(P = MC = 12 \text{ χ.μ.})$

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ 1η

Α.1.

1. ΣΩΣΤΗ
2. ΛΑΘΟΣ
3. ΛΑΘΟΣ
4. ΣΩΣΤΗ
5. ΛΑΘΟΣ

Α.2.

I. δ
II. γ

ΟΜΑΔΑ 2η

α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.133-134
β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ.134
γ. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 135

ΟΜΑΔΑ 3η

α.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ	Χ	Ψ
Α	0 εργάτες • 4 = 0	200 εργάτες • 8 = 1.600
Β	50 εργάτες • 4 = 200	150 εργάτες • 8 = 1.200
Γ	100 εργάτες • 4 = 400	100 εργάτες • 8 = 800
Δ	150 εργάτες • 4 = 600	50 εργάτες • 8 = 400
Ε	200 εργάτες • 4 = 800	0 εργάτες • 8 = 0

Οι παραγωγικοί συντελεστές έχουν την ίδια εξειδίκευση στην παραγωγή καιτων δύο αγαθών (κάθε εργάτης παράγει ή 4 μονάδες του αγαθού Χ ή 8μονάδες του αγαθού Ψ), άρα, η Κ.Π.Δ. είναι ευθεία. Το κόστος ευκαιρίας είναι σταθερό, δηλαδή, θυσιάζονται σταθερές μονάδες από το ένα αγαθό γιανα παραχθεί μία επιπλέον μονάδα από το άλλο.

β. Κ.Ε. του Ψ= $\frac{\text{Μονάδες Χ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες Ψ που παράγονται}}$ =0,5 (σταθερό σε όλη την ΚΠΔ)

Δηλαδή, για να παραχθεί μία επιπλέον μονάδα του αγαθού Ψ θυσιάζονται 0,5 μονάδες Χ. Άρα, για να παραχθεί η 1.000ή μονάδα Ψ πρέπει να θυσιαστούν 0,5 μονάδες Χ.

γ.

- Στον εφικτό Κ απασχολούνται:
  Εργατικό δυναμικό-Άνεργοι=200-32= 168 εργάτες
- Για Ψ=560 απασχολούνται: 560=8LΨ $\Longleftrightarrow$ LΨ=70 εργάτες
- Οι υπόλοιποι 168-70=98 εργάτες παράγουν Χ=4 • 98=392 μον. Ψ

Ο εφικτός Κ μπορεί να καταστεί μέγιστος, αν η ΚΠΔ μετατοπιστεί προς τα αριστερά. Αυτό θα συμβεί, αν μειωθεί η ποσότητα των παραγωγικών συντελεστών της οικονομίας ή αν χειροτερεύσει η τεχνολογία ή αν υπάρξειςυνδυασμός και των δύο.

δ. Θέλω Χ=450+80=530Για
Χ=530:

Κ.Ε. του Ψ=0,5 $\Longleftrightarrow$ 0,5= $\frac{600-530}{\Psi max-400}$ - Ψ_{max}=540

Άρα, το Ψ πρέπει να αυξηθεί κατά: $\frac{540-500}{500}\cdot 100 = 8\%$

ΟΜΑΔΑ 4η

α.

$$Q_S = \gamma + \delta P \text{ , άρα,ΑΡΑ: } \left.\begin{aligned} 80 &= \gamma + \delta \cdot 40 \\ 100 &= \gamma + \delta \cdot 60 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \gamma &= 40 \\ \delta &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{Q_s = 40 + P}$

β. Καμπύλη D_2 Y 4600

Για P 40 η E_Y 5

$Q_1 = 80$ $\quad$ $Y_1 = 4000$

$Q_2 = Q_B$ $\quad$ $Y_2 = 4600$

$$E_Y = \frac{\Delta Q}{\Delta Y}\cdot\frac{Y_1}{Q_1} \Leftrightarrow 5 = \frac{Q_B - 80}{600}\cdot\frac{4000}{80} \Leftrightarrow Q_B = 140$$

$$Q_{D_2} = \alpha + \beta P, \text{ άρα, } \left.\begin{aligned} 140 &= \alpha + \beta \cdot 40 \\ 100 &= \alpha + \beta \cdot 60 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 220 \\ \beta &= -2 \end{aligned}$$

ΑΡΑ: $\boxed{Q_{D_2} = 220 - 2P}$

Καμπύλη D_1 $Y = 4000$

Παράλληλες καμπύλες σημαίνει ότι $\beta = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -2$ και για τις δύο καμπύλες D .

Για $P = 40$ η $Q_{D^1} = 80$

ΑΡΑ: $Q_{D^1} = \alpha + \beta P \Leftrightarrow 80 = \alpha - 2\cdot 40 \Leftrightarrow \alpha = 160$

ΑΡΑ: $\boxed{Q_{D_1} = 160 - 2P}$

γ. $Q_{D_1} = 160 - 2P$

$$E = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow -3 = \beta\cdot\frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow -3 = -2\cdot\frac{P_1}{160 - 2P_1} \Leftrightarrow P_1 = 60$$

D

$$\text{Για} \quad P_1 = 60 : Q_{D_1} = 160 - 2 \cdot 60 = 40, \quad \text{δηλ.} = \boxed{P_1 = 60, \quad Q_1 = 40}$$

δ.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Για} \quad P_\kappa = 50 : Q_{D_\kappa} = 160 - 2 \cdot 50 = 60 \\ Q_{S_\kappa} = 40 + 50 = 90 \end{array}\right\} \text{Πλεόνασμα} = Q_{S_\kappa} - Q_{D_\kappa} = 90 - 60 = 30 \quad \text{μον.}$$

$$\Sigma E_\varepsilon = P_\varepsilon \cdot Q_\varepsilon = 40 \cdot 80 = 3200 \quad (\text{χωρίς κρατική παρέμβαση})$$

α. $\Sigma E_\kappa = P_\kappa \cdot Q_{S_\kappa} = 50 \cdot 90 = 4500$ (μετά την κρατική παρέμβαση)

$$\text{ΑΡΑ} \quad \Sigma E_\kappa - \Sigma E_\varepsilon = 4500 - 3200 = \boxed{1300 \quad \text{χμ}}$$

β. Από τους καταναλωτές εισέπραξαν:

$$\Sigma\Delta_\kappa = P_\kappa \cdot Q_{D_\kappa} = 50 \cdot 60 = \boxed{3.000 \quad \text{χμ.}}$$

Από το κράτος εισπέπραξαν:

$$\text{Πλεόνασμα} \cdot P_K = 30 \cdot 50 = \boxed{1.500 \quad \text{χμ}}$$

Επιμέλεια: Λυμπεροπούλου Κατερίνα

ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ - ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α.

- Ο αυταρχικός τρόπος διαπαιδαγώγησης ωθεί στην επιθετική συμπεριφορά του παιδιού. → Ξεσπάσματα οργής σε κάθε φορέα εξουσίας αλλά και εκδήλωση μίσους προς αδύναμα πλάσματα → Μηχανισμός άμυνας.
- Υιοθέτηση στερεοτύπων από παιδιά οικοτροφείων, που δεν είχαν θετικά πρότυπα και ερεθίσματα.
- Αύξηση ρατσισμού – Μηδαμινή μεταλαμπάδευση ηθικών αρχών απ' τους φορείς αγωγής – Ρατσισμός: ένδειξη των αδυναμιών της προσωπικότητας του ατόμου.

Β1. Ο φόβος της απώλειας των κεκτημένων και διατάραξης της κοινωνικής γαλήνης σε συνδυασμό με προϋπάρχουσες προκαταλήψεις και διαιωνιζόμενα στερεότυπα ωθεί κάποιους ανθρώπους στη μισαλλοδοξία και την επιθετική συμπεριφορά σε βάρος των ξένων, που μετατρέπονται σε εξιλαστήρια θύματα…

Β2.

α. Η συγγραφέας επικαλείται την εξήγηση της ψυχοδυναμικής θεωρίας για τη γέννηση του ρατσισμού. Αρχικά δίνει ένα παράδειγμα για να τεκμηριώσει τη θέση της, στο οποίο εμπεριέχεται μία σύγκριση – αντίθεση για να δείξει το ρόλο των αυταρχικών γονέων («Για παράδειγμα … παιδιά»). Ακολουθεί ένα αίτιο – αποτέλεσμα για να φανεί η επίδραση αυτής της συμπεριφοράς στα παιδιά («Αυτά … εξουσίας»), αλλά και μία σύγκριση – αντίθεση που εισάγεται με την συνεκτική φράση: «Από την άλλη πλευρά … άλλους». Ακολούθως αιτιολογεί γιατί τα παιδιά από θύματα γίνονται θύτες («Απ' το ρόλο … ίδια») και επικαλούμενη την αυθεντία του Freud αιτιολογεί επιπροσθέτως γιατί τα παιδιά υιοθετούν τη συμπεριφορά των γονιών τους.

β.

- <u>**που κάνει κάποιος, να προστατέψει, αγγίζει**</u>: ενεργητική σύνταξη
- <u>**Μετατροπή**</u>: Συχνά απ' την προσπάθεια που γίνεται από κάποιον προκειμένου να προστατευτούν τα κεκτημένα του από

πραγματικούς ή φανταστικούς εξωτερικούς εχθρούς, αγγίζονται τα όρια του μίσους και της ξενοφοβίας.

γ.

- §1η → §2η : Χρήση ερώτησης
- §4η → §5η : Αντίθεση (ενώ, όμως)

Β3.

α.

- **Εισαγωγικά:** μεταφορική και ειρωνική χρήση της λέξης «κολλητική»
- **Άνω και κάτω τελεία:** προσθήκη μιας άποψης

β.

- **ξεσηκώνουν** → εγείρουν
- **γούστα** → προτιμήσεις
- **ριζωμένη** → εδραιωμένη
- **έχει να κάνει** → συσχετίζεται, συνδέεται
- **στρέφεται εναντίον** → αντιτίθεται, αντιμάχεται

Γ. Ο ποιητής θεωρεί αδιανόητο να μην μπορούν να συνειδητοποιήσουν οι άνθρωποι ότι τους ενώνει ένα κοινό χαρακτηριστικό, η μοίρα της θνητότητας, δηλαδή ότι η ζωή μας είναι εφήμερη, παροδική και εμείς «περαστικοί» από αυτόν τον κόσμο. Αντ' αυτού πολλοί άνθρωποι λειτουργούν παράλογα και ρατσιστικά, θεωρούν τους εαυτούς τους υπέρτερους, υποτιμούν τους συνανθρώπους τους και «τραβούν διαχωριστικές γραμμές», εκδηλώνοντας έντονα αισθήματα μίσους λόγω του χρώματος ή της διαφορετικής προέλευσης ή των πεποιθήσεων των άλλων. Για τον ποιητή είναι ανεπίτρεπτο και παράλογο να ταυτίζουν κάποιοι τη διαφορετικότητα με την κατωτερότητα ενώ όλοι ανεξαρτήτως θα έχουμε μια κοινή κατάληξη, τον θάνατο.

Δ.

<u>Αναγκαιότητα σεβασμού της διαφορετικότητας:</u>

- Προστασία ανθρωπίνων δικαιωμάτων και ανθρώπινης αξιοπρέπειας – Διασφάλιση δημοκρατικών θεσμών.
- Ομαλή συνύπαρξη – αγαστή συνεργασία → Κοινωνική ευδοκίμηση και ατομική ανέλιξη.
- Άρση ρατσισμού, εθνικισμού και γενικά των φαινομένων της κοινωνικής παθογένειας → Όχι διάσπαση κοινωνικής συνοχής.

Εφικτοί τρόποι εξάλειψης ρατσιστικών διαθέσεων:

- Ανθρωπιστική παιδεία – Ενίσχυση του αλτρουισμού και της αλληλεγγύης – Συμμετοχή σε αντίστοιχες εθελοντικές δράσεις ή πολιτιστικές εκδηλώσεις
- Ηθική διαπαιδαγώγηση από την οικογένεια.
- Αυστηρές κυρώσεις από την πολιτεία σε όσους εκδηλώνουν τέτοια απαράδεκτη συμπεριφορά.
- Τα Μ.Μ.Ε. να μην στοχοποιούν ανθρώπους, υπογραμμίζοντας την καταγωγή ή το θρήσκευμά τους. Αντ' αυτού προβολή πνευματικών ανθρώπων και Μ.Κ.Ο, που διατρανώνουν την αξία του ουμανισμού και της πνευματικής ανεκτικότητας.

Επιμέλεια: Μανωλάκη Αγγελική

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Διατήρηση της εθνικής μας ταυτότητας, αλλά όχι απόρριψη της επαφής με άλλα έθνη. → Αλληλεπίδραση – Συνεργασία – Ειρήνη → Παγκόσμια σύμπνοια – Ανθρωπιστικά ιδεώδη → Απόρριψη μισαλλοδοξίας.

Β1. α.

1. Σωστή
2. Σωστή
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Σωστή

β.

- Όχι αποκοπή από τις ρίζες.
- Παράδοση: πυξίδα προσανατολισμού για το Νεοέλληνα.
- Άντληση δυνάμεων απ' αυτή.

Β2. α.

α΄ πληθυντικό:

- **Συγγραφέας**: δεν αποστασιοποιείται – Καθολικότητα
- **Επικοινωνιακός τόνος**: ζωηρότητα, αμεσότητα, παραστατικότητα.
- **Συλλογική ευθύνη** – από κοινού αντιμετώπιση του θέματος.

β.
- Ενεργητική σύνταξη:
    - Τονίζεται ο φορέας της ενέργειας
    - Επικοινωνιακός τόνος: ζωηρότητα, αμεσότητα, παραστατικότητα
- Μετατροπή: Είναι ψυχική αρρώστια, που πρέπει να ξεπεραστεί από εμάς, για να δοθεί στην εθνική μας υπόσταση όλη της η αξία και όλο της το βάθος.

γ.
- **ιδανικό** → ιδεώδες
- **ανεξάντλητους** → αστείρευτους
- **ανυπολόγιστη** → ανεκτίμητη
- **αλλάζουν** → μεταβάλλονται
- **διάλυση** → αποδόμηση, καταστροφή

Β3.
- Επίκληση στη λογική με τεκμήρια: Καθολική αλήθεια («Και μάλιστα … Ευρώπης), παραδείγματα («σαν κλασικός… Εικοσιένα, Λατίνους - Σλάβους»). Επιχείρημα → Ισχυρή στήριξη της θέσης του, ρεαλιστική απεικόνιση της κατάστασης.
- Επίκληση στο συναίσθημα με ποιητική λειτουργία της γλώσσας («γαλούχησε … τους θησαυρούς της») και λέξεις με συναισθηματική φόρτιση («ανεξάντλητους θησαυρούς», «αξία ανυπολόγιστη») → Πρόκληση ψυχικών αντιδράσεων, επικοινωνιακός τόνος (ζωηρότητα, αμεσότητα), ευαισθητοποίηση του δέκτη.

Γ.
- Ομοιότητα: Χάνουν την επαφή με τη γλώσσα τους. Μιλούν «βαρβαρικά».
- Διαφορά: Οι Ποσειδωνιάτες έχουν επίγνωση του εκφυλισμού τους και αυτό είναι κάτι που τους στενοχωρεί, ενώ οι Νεοέλληνες δεν έχουν συνειδητοποιήσει τη ζοφερή αυτή κατάσταση.

Δ.

α. Αναγκαιότητα παράδοσης:
- Αντίσταση στο σαρωτικό κύμα της παγκοσμιοποίησης και της πολιτιστικής αλλοτρίωσης.
- Ακρογωνιαίος λίθος πολιτιστικής ανέλιξης και σφυρηλάτησης ισχυρών δεσμών.

- Αντιμετώπιση πανανθρώπινων προβλημάτων
- Αποφυγή των λαθών του παρελθόντος.

Αναγκαιότητα διεθνούς συνεργασίας:
- Πολιτισμική αλληλεπίδραση – Άρση ξενοφοβικών και ρατσιστικών τάσεων.
- Διεύρυνση αγοράς – Τόνωση οικονομίας – Παγκόσμια ειρήνη/ Σύμπνοια.
- Διασφάλιση αναφαίρετων δικαιωμάτων.

β. Τρόποι επίτευξης των παραπάνω στόχων:
- Όχι αποκοπή απ' τις ρίζες.
- Αποφυγή της άκριτης προσκόλλησης στο παρελθόν και της προοδοπληξίας.
- Γόνιμη ενσωμάτωση των ξενικών στοιχείων – **όχι** ξενομανία και μιμητισμός.
- Προώθηση του υγιούς διεθνισμού μέσω πολιτιστικών εκδηλώσεων και αθλητικών αγώνων.
- Συμμετοχή σε προγράμματα ανταλλαγής μαθητών και φοιτητών – Εκπαιδευτικός τουρισμός – «Αδελφοποίηση» σχολείων.
- Ευθύνη Μ.Μ.Ε. και πνευματικών ανθρώπων.
- Ρόλος του σχολείου – Θελκτικός τρόπος διδασκαλίας αντίστοιχων μαθημάτων – Βιωματική γνώση και επαφή με τα στοιχεία της πολιτιστικής κληρονομιάς.
- Ευθύνη οικογένειας: Τήρηση ηθών, εθίμων εορτασμός θρησκευτικών και εθνικών επετείων.

Επιμέλεια: Μανωλάκη Αγγελική

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

- Αναγκαία η χρήση εναλλακτικών μορφών ενέργειας.
- Αξιοποίηση γεωθερμίας, ηλιακής και αιολικής ενέργειας.
- Αφαλάτωση του θαλασσινού νερού.

- ¨Πρόγραμμα τσιγγουνιάς¨ : ηλιακά πάνελ και επιλογή υβριδικής αυτοκίνησης, παραγωγή λιγότερων απορριμμάτων.

Β1.

1. Σ
2. Σ
3. Λ
4. Λ
5. Λ

Β2. Και τα δυο κείμενα δίνουν έμφαση στους τρόπους προστασίας του πλανήτη από την κλιματική αλλαγή. Στο κείμενο Α παρουσιάζονται τρόποι ενεργειακής επάρκειας αλλά και προσωπικές επιλογές, που εμείς οι απλοί πολίτες μπορούμε να στηρίξουμε. Στο κείμενο Γ δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στο νομοθετικό πλαίσιο που η χώρα μας ετοιμάζει μ΄ άλλες ευρωπαϊκές και με οικολογικές οργανώσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Απ' τις δημοσιεύσεις αντιλαμβανόμαστε ότι πρόκειται για ένα <u>καίριο</u>, <u>επίκαιρο</u> θέμα.

Β3.

α) Επιστημική τροπικότητα.

- Παρατηρώ ότι τα παράθυρα δεν εξοικονομούν ενέργεια.
  Δηλώνει βεβαιότητα.
- Η γη έχει σταθερή θερμοκρασία.
  Δηλώνει βεβαιότητα.

β) Εναλλαγή α' ενικού και α' πληθυντικού.

<u>Α' ενικό:</u> Κατάθεση προσωπικού προβληματισμού → διερώτηση-οικείος, επικοινωνιακός τόνος.

<u>Α' πληθυντικό:</u> <u>ΟΧΙ</u> αποστασιοποίηση- Καθολικότητα- Ευαισθητοποίηση- Από κοινού αντιμετώπιση- Επικοινωνιακός τόνος.

Β4. Συνυποδηλωτική σημασία λέξεων.

Υδάτινοι πύργοι
Πόλεις σιωπηλές- Ανάσα σκέψης
Μεταφορικός- Εικονοπλαστικός λόγος → Επίκληση συναισθήματος
→ Ψυχικές αντιδράσεις
→ Κινητοποίηση φαντασίας
→ Εύληπτο μήνυμα – Επικοινωνιακός τόνος

Β5. Δύο στοιχεία άρθρου.

- Επίκαιρο θέμα που δημοσιεύεται σε εφημερίδα.
- Αναφορική λειτουργία της γλώσσας, γ' πρόσωπο → πληροφοριακός τόνος.

Γ. Θέμα- Προβληματισμός: Ο σύγχρονος άνθρωπος θα πληρώσει ένα βαρύ τίμημα εξαιτίας της επαίσχυντης και κερδοσκοπικής συμπεριφοράς του απέναντι στη φύση. Ο αχάριστος άνθρωπος με τις ωφελιμιστικές βλέψεις και τις αδηφάγες διαθέσεις ¨αφαιμάσσει¨ τους φυσικούς πόρους και θα τιμωρηθεί γι' αυτό.

Κειμενικοί δείκτες

- Οπτική εικόνα: Όταν οι άνθρωποι … τρύπες.→ Οδυνηρή συνειδητοποίηση του μεγάλου κακού!
- Προσωποποίηση: θα μισήσουν, θα φύγουν → Φύση: Πληγωμένος ¨ζωντανός¨ οργανισμός.
- Χρήση μέλλοντα: θα μείνουνε, θα πέσουν → Δυσοίωνες προβλέψεις, που αποπνέουν ανησυχία.

Δ.

Οδυνηρές συνέπειες

Πλημμύρες

Ατμοσφαιρική μόλυνση –Εξαφάνιση ↗ φυτών ↘ ζώων

Ερημοποίηση φυσικού τοπίου – Διατάραξη ισορροπίας οικοσυστημάτων.
Σωματικές και ψυχικές ασθένειες
Οικονομική κρίση
Απομάκρυνση του ανθρώπου απ' το περιβάλλον → Υποβάθμιση ποιότητας ζωής.
Καταστροφή περιουσιών.

Λύσεις

- Εθελοντικές δράσεις – Ευαισθητοποίηση- Οικολογική συνείδηση- Συμμετοχή σε δενδροφυτεύσεις.
- Περιορισμός του υπερκαταναλωτισμού- Ανακύκλωση
- Χρήση εναλλακτικών μέσων μετακίνησης.
- Συμμετοχή μαθητών σε ανάλογους ομίλους, ημερίδες, συνέδρια.

Υιοθεσία ζώων

- Αξιοποίηση εναλλακτικών μορφών ενέργειες.

- Βιολογικές καλλιέργειες.
- ¨Πράσινη¨ ανάπτυξη – Χρηματοδότηση για την κατασκευή ¨οικολογικών¨ κατοικιών .
- Μέτρα δασοπροστασίας.
- Σχέδιο νόμου για αναδάσωση.
- Αυστηρές ποινές σε εμπρηστές κ. α.

Επιμέλεια: Μανωλάκη Αγγελική

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Το κείμενο πραγματεύεται το θέμα της παραβίασης των ανθρωπίνων δικαιωμάτων σ' όλες τις χώρες. Αρχικά επαινείται η προσπάθεια του ΟΗΕ για την κατοχύρωση και προστασία των ανθρωπίνων δικαιωμάτων, εκφράζονται όμως προβληματισμοί και αμφιβολίες για την τήρηση τους, καθώς οι παραβιάσεις είναι καθημερινές. Δηλώνεται ότι ο σεβασμός και η διαφύλαξή τους αποτελεί ηθικό καθήκον κι όχι επιβεβλημένο χρέος. Τέλος καταγράφεται η δυσοίωνη πρόβλεψη ότι η προάσπιση των δικαιωμάτων αποτελεί ψευδεπίγραφο.

Β.

Ερώτημα 1ο

α) Σωστό

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ: Τα ανθρώπινα δικαιώματα είναι διεθνή, ισχύουν παντού και ισχύουν τα ίδια για όλους.

β) Λάθος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ: Αποτελεί κοινή διαπίστωση ότι τα περισσότερα ανθρώπινα δικαιώματα παραβιάζονται με τον πιο βάναυσο τρόπο.

γ) Λάθος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ: Η Οικουμενική Διακήρυξη των Ανθρωπίνων Δικαιωμάτων δεν είναι νομικά δεσμευτική, γι' αυτό χρειάζεται και τη θέληση του κάθε ανθρώπου ατομικά.

δ) Σωστό

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ: «Θα πρέπει να …ίδιο τρόπο».

ε) Λάθος
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ: Η δύναμη της συλλογικότητας και της ομαδικής προσπάθειας θα βοηθήσει ιδιαίτερα για την προάσπιση των ανθρωπίνων δικαιωμάτων.

Ερώτημα 2ο
α) Το θέμα των δύο πρώτων κειμένων είναι κοινό, καθώς αφορά στα ανθρώπινα δικαιώματα. Και οι δύο συγγραφείς στην τελευταία παράγραφο των κειμένων τους αναφέρουν τρόπους με τους οποίους μπορεί να περιοριστεί ή και να εξαλειφθεί η καταπάτηση των ανθρωπίνων δικαιωμάτων. Στο πρώτο απόσπασμα αναφέρεται στην ανάγκη συλλογικής προσπάθειας και συμμετοχής στα κοινωνικά θέματα και προβλήματα. Η ενασχόληση με τα προβλήματα του κοινωνικού συνόλου διασφαλίζει καλύτερες συνθήκες διαβίωσης και στο ίδιο το άτομο είτε αντιμετωπίζει το ίδιο τα θέματα αυτά είτε όχι. Ωστόσο, και ο συγγραφέας του δεύτερου κειμένου ενισχύει αυτή την άποψη αλλά μέσα από την παιδαγωγική διαδικασία. Θεωρεί ότι βασικό στόχο της εκπαίδευσης πρέπει να αποτελεί η διαμόρφωση ελεύθερων και ενεργών προσωπικοτήτων. Τα άτομα αυτά θα σέβονται και θα προσπαθούν να βελτιώσουν τις συνθήκες για το υπόλοιπο κοινωνικό σύνολο.

β) ρητορικά ερωτήματα στόχο έχουν να δώσουν

έμφαση, ζωντάνια, παραστατικότητα, να ευαισθητοποιήσουν και να προβληματίσουν το κοινό, αλλά και να εξυπηρετήσουν τη συνοχή του κειμένου.

(Ερώτημα 3ο)
α) Η σύνταξη είναι ενεργητική. Η αντίστοιχή της παθητική είναι: Ιστορικά, η παροχή της παιδείας ρυθμιζόταν από δύο κίνητρα.
Δίνει στο ύφος έμφαση ,ζωντάνια , παραστατικότητα ,τονίζει το υποκείμενο

β) Παραγωγική από τη θέση του συγγραφέα στο υλικό υποστήριξης , προσθέτω κειμενικές αναφορές

Γ. Το θέμα που αναδεικνύεται στο συγκεκριμένο απόσπασμα είναι ο συντριπτικός αντίκτυπος που έχει στην ψυχολογία και στη νοητική κατάσταση της ηρωίδας ο βιασμός της. Η πράξη αυτή αποτελεί μία από τις πλέον αποτρόπαιες μορφές βίας, που προκαλεί εύλογη αγανάκτηση απέναντι σ' εκείνους που την ασκούν είτε ως μέσο εκδίκησης είτε ως μέσο νοσηρής ευχαρίστησης. Πρόκειται για ένα γεγονός που τραυματίζει το θύμα όχι μόνο σωματικά, αλλά και ψυχικά, στερώντας του, μεταξύ άλλων, τη δυνατότητα να νιώθει ασφάλεια και να ζει χωρίς το διαρκή φόβο μιας επικείμενης απειλής. Πρόκειται, συνάμα, για μια πράξη που θα πρέπει να τιμωρείται με ιδιαίτερη αυστηρότητα, εφόσον ο αντίκτυπός της, έστω κι αν δεν είναι πάντοτε ορατός, μπορεί να λάβει δραματικές διαστάσεις, επηρεάζοντας εφόρου ζωής το θύμα. Στο κείμενο αυτό, άλλωστε, η αφηγήτρια επιτυγχάνει να αποδώσει με ιδιαίτερα δραματικό τρόπο το πόσο την έχει πληγώσει και το πόσο την έχει επηρεάσει αυτό το γεγονός. Οι αμείλικτες ερωτήσεις που θέτει στον Θεό, αλλά και πολύ περισσότερο η εναγώνια έκκληση της μητέρας της να μην ενδώσει στην τρέλα που απειλεί να την οδηγήσει στο χαμό της, δημιουργούν μια συγκλονιστική αποτύπωση των φρικτών επιπτώσεων που έχει ο βιασμός στη ζωή μιας γυναίκας.

Δ.

<u>Πρόλογος</u>

Η γενικότερη υποχώρηση των κατακτημένων ανθρώπινων δικαιωμάτων, επιφέρει και την παραβίαση θεμελιακών αξιών που αφορούν τον ευαίσθητο τομέα των παιδιών. Και τούτο παρατηρείται όχι μόνο στο θεσμικό επίπεδο με την αδρανοποίηση και περιθωριοποίηση φορέων προστασίας των δικαιωμάτων τους, αλλά κυρίως με τα αδρανή κοινωνικά αντανακλαστικά που αδιαφορούν θανάσιμα γι' αυτά.

<u>Κύριο μέρος</u>

Η υποχώρηση του κοινωνικού ιστού έχει συντελέσει στην αποδόμηση του κρίσιμου ρόλου της οικογένειας ως θεμελιακής και φυσικής προστασίας του ανήλικου παιδιού. Η απουσία των γονέων από τον φυσικό χώρο του σπιτιού, οι εξοντωτικές επαγγελματικές υποχρεώσεις,

το συνεχές κυνήγι του κέρδους, στερούν από τα παιδιά τη συναισθηματική και ψυχολογική ενδυνάμωση στα πρώτα βήματα της ζωής τους. Τον παιδαγωγικό ρόλο των γονέων αναλαμβάνει τώρα ο απρόσωπος παιδικός σταθμός και η κοινωνικοποίησή του επαφίεται στα χέρια των ηλεκτρονικών νταντάδων. Η έλλειψη βιωματικής φροντίδας και στοργής με την αποσάθρωση των συζυγικών σχέσεων στερεί από το παιδί ένα ασφαλές και θετικό περιβάλλον που λειτουργεί προστατευτικά και ενθαρρυντικά για το ίδιο το παιδί. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την υποχώρηση συλλογικών δομών όπως τη γειτονιά, οι απρόσωπες σχέσεις στα σύγχρονα αστικά κέντρα, επιτείνουν την ανασφάλεια του παιδιού και το αφήνουν έκθετο σε παντοίους κινδύνους

. Από την άλλη, στην οικονομική κρίση και τα προβλήματα φτωχοποίησης της οικογένειας φέρουν τα παιδιά αντιμέτωπα με το επιτακτικό αίτημα της απασχόλησης και της εργασίας. Η παιδική εργασία παραβιάζει κατάφωρα τα φυσικά δικαιώματα του καθώς γίνεται θύμα εκμετάλλευσης και εμπορευματοποίησης. Ακραία έκφραση αυτής της πραγματικότητας αποτελεί η εμπορεία σωματικών οργάνων, σεξουαλικής εκμετάλλευσης και παιδικής στράτευσης. Ακόμα κι όταν ένα παιδί δεν αντιμετωπίζει ιδιαίτερα δυσμενείς κοινωνικές συνθήκες, το άγχος και η εντατικοποίηση μέσα από ένα άτεγκτο και σκληρό βαθμοθηρικό εκπαιδευτικό σύστημα τορπιλίζει το αναφαίρετο δικαίωμα του παιδιού στην ανεμελιά και το παιδικό παιχνίδι. Οι πολλαπλές υποχρεώσεις του παιδιού, το διαρκές κυνήγι της διάκρισης και του πρωταθλητισμού σ' όλους του τομείς το εξουθενώνει σωματικά και ψυχικά και του στερεί τη δυνατότητα να αναπτύξει πολύπλευρα την προσωπικότητά του.

Επίλογος
Όλες αυτές οι παραβιάσεις ακυρώνουν τις προϋποθέσεις και τις βάσεις μιας θετικής προοπτικής για την ανάπτυξη του παιδιού και τη δημιουργική του κοινωνικοποίηση. Όλες αυτές οι καταστάσεις αποτελούν πλήγμα για τη δημοκρατία, την κοινωνική συνοχή και την εδραίωση κοινωνικών προϋποθέσεων για πρόοδο και ισοτιμία.

Επιμέλεια: Πατέρα Αγγελική

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Πολλές είναι οι αιτίες που απειλούν το θεσμό της οικογένειας, όπως οι αλλαγές που έχουν υποστεί οι συντροφικές σχέσεις και οι θεσμοί που τις επικυρώνουν. Η επίδραση της τηλεόρασης στη διαμόρφωση των οικογενειακών σχέσεων είναι καταλυτική. Τέλος, η κατάρρευση των ιδεολογικών συστημάτων έχει λειτουργήσει και αυτή αρνητικά στη λειτουργία του θεσμού της οικογένειας.

Β1. α.

1. Λάθος
2. Λάθος
3. Σωστή

4. Σωστή
5. Λάθος

β. Ο συγγραφέας του κειμένου επισημαίνει τις ψυχολογικές επιπτώσεις φαινομένων, όπως η παγκοσμιοποίηση και η επέλαση της πληροφορικής. Και τα δύο συνέτειναν και συντείνουν στην ψυχική φθορά του σύγχρονου ανθρώπου. Η παγκοσμιοποίηση και η τεχνολογική ανάπτυξη βλάπτουν τον ψυχικό κόσμο των ατόμων, καθώς οδηγούν σε σταδιακή τυποποίηση των εκφάνσεων της ζωής και συντρίβουν έννοιες, όπως η προσωπικότητα, η ατομική βούληση και η ελευθερία επιλογής. Το άτομο νιώθει να χάνει την ταυτότητά του μέσα σε αυτήν την παγκόσμια ομοιομορφία που έχει επιβληθεί. Το αποτέλεσμα είναι ένας απρόσωπος τρόπος ζωής, όπου οι προσωπικές σχέσεις υποκαθίστανται από εικονικές και η συρρίκνωση της ανθρώπινης επικοινωνίας οδηγεί στη μοναξιά.

Β2.

α. Η χρήση του α' ενικού προσώπου από τον συγγραφέα γίνεται στα σημεία εκείνα όπου ο ίδιος εκφράζει τις σκέψεις, τις υποθέσεις και τα αισθήματά του. Το α' ενικό πρόσωπο είναι δηλωτικό του προσωπικού οράματος του συγγραφέα και προσδίδει τόνο εξομολογητικό στο κείμενο.

β. Η χρήση της γλώσσας στη φράση «ο θάνατος της οικογένειας» είναι συνυποδηλωτική, δηλαδή μεταφορική. Η επιλογή του συγγραφέα δεν είναι τυχαία, αφού με αυτόν τον τρόπο απευθύνεται στο συναίσθημα του αναγνώστη του. Σκοπός του είναι να δώσει έμφαση και να διεγείρει συναισθήματα.

γ. Η τέταρτη παράγραφος λειτουργεί ως μεταβατική. Είναι σύντομη και έχει ρόλο συνδετικό μέσα στο κείμενο.

δ.

1. <u>Αυθεντία</u>
   (3η παράγραφος: αυτούσια παράθεση των λεγομένων του Μαρξ)
2. <u>Αποτελέσματα ερευνών</u>
   (3η παράγραφος: «Και όλα αυτά τα ποσοστά… την τελευταία τριακονταετία», 6η παράγραφος: «Πρόσφατες όμως κοινωνιολογικές μελέτες καταλήγουν ότι…)

3. <u>Παραδείγματα</u>
   (5η παράγραφος : «Ας ξεκινήσουμε, για παράδειγμα, … εκτεταμένης οικογένειας», 7η παράγραφος: «…μόνοι πατέρες, χήρες μητέρες… ανύπαντρες μητέρες» και «…εγκληματικότητα, βία, αλκοολισμός, αδυναμία κοινωνικής προσαρμογής»)
4. <u>Γεγονότα</u>
   (6η παράγραφος : «…χαμηλού μέσου όρου ζωής… σε μεγάλη ηλικία» και «…η βιομηχανική επανάσταση ,…από την περιφέρεια στις πόλεις», 7η παράγραφος: «… μαζική εισροή των γυναικών στην παραγωγή …και στην οικογένεια».

ε. Η συγγραφέας ακολουθεί παραγωγική συλλογιστική πορεία. Αρχικά προτάσσει τη θέση της ότι η Ευτυχισμένη Οικογένεια ενδεχομένως να μην αποτελεί χαμένη υπόθεση και στη συνέχεια τεκμηριώνει την άποψή της χρησιμοποιώντας δύο ειδικά παραδείγματα (μεταφορικά μέσα και τηλέφωνο).

στ.

- **«φυσιολογικές»:**
  ειρωνεία, δηλώνει την απόρριψη τέτοιων χαρακτηρισμών από τη συγγραφέα.
- **«οτιδήποτε στέρεο λιώνει στον αέρα»:**
  αυτούσια παράθεση των λόγων του Μάρξ.

Γ. Από την αρχή της αφήγησης γίνεται σαφές πως ο νεαρός ήρωας έχει στερηθεί την προσοχή και το ενδιαφέρον του πατέρα του, αφού εκείνος είναι διαρκώς απασχολημένος με τα διαβάσματά του. Η απόφασή του, επομένως, να αυτοκτονήσει πηγάζει κυρίως από την ανάγκη του να διεκδικήσει την προσοχή του πατέρα του, έστω κι αν η επιλογή αυτή αποτελεί μια σπασμωδική κίνηση ενός πληγωμένου παιδιού. Όταν, άλλωστε, ο ήρωας – αφηγητής αναφέρεται στη συνήθεια του πατέρα του να ελέγχει το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου για να δει πόσα ζωύφια είχαν καρφωθεί στο αμάξωμα, δηλώνει πως θα επιθυμούσε κι ο ίδιος να προσελκύσει με ανάλογο τρόπο το ενδιαφέρον του: «Μου άρεσε η ιδέα να με παρατηρεί ο πατέρας μου με την ίδια αλλόκοτη μαγεία, γιατί όχι και πόνο, που παρατηρούσε τα έντομα». Όσο κι αν η σκέψη του νεαρού πως με το θάνατό του θα κατόρθωνε να στρέψει επιτέλους την προσοχή του πατέρα του σ' αυτόν, μοιάζει παιδιάστικη, δεν παύει να φανερώνει με τον πλέον εμφατικό τρόπο την απελπισία στην οποία έχει περιέλθει. Θα μπορούσε, βέβαια, να αντιτείνει κάποιος πως η σχέση του παιδιού με τον πατέρα του δεν ενέχει στοιχεία βίας, κακοποίησης ή εγκατάλειψης, ώστε να δικαιολογείται μια τόσο ακραία επιλογή από τη μεριά του νεαρού ήρωα. Θα πρέπει, εντούτοις, να ληφθεί υπόψη πως η αδιαφορία ενός συναισθηματικά απρόσιτου πατέρα προκαλεί σ' ένα παιδί πόνο ανάλογο με αυτόν της φυσικής εγκατάλειψης. Είναι μια οδυνηρή μορφή παραμέλησης, που εύλογα πληγώνει τον δωδεκάχρονο ήρωα

Δ.

<u>Τίτλος άρθρου:</u> Τι και γιατί αλλάζει στην οικογένεια του σήμερα;

<u>Πρόλογος</u>

Στη σύγχρονη εποχή ο θεσμός της οικογένειας, άλλοτε θεμέλιος λίθος της κοινωνίας, υφίσταται πολύπλευρες και σύνθετες αλλαγές. Άλλες απειλούν να τη διαλύσουν και άλλες επιχειρούν την ανανέωσή της. Η προσαρμογή της σύγχρονης μορφής οικογένειας στα νέα δεδομένα γίνεται με αργούς ρυθμούς, μέσα από συγκρούσεις αλλά και πολλές κατακτήσεις.

<u>Κύριο μέρος</u>

- Η οικογένεια, ως πυρήνας της κοινωνικής ζωής, θα ήταν αδύνατον να παραμείνει ανεπηρέαστη από τις μεγάλες κοινωνικές ανακατατάξεις των τελευταίων χρόνων. Πιο συγκεκριμένα:
- Η σημαντικότερη αλλαγή επήλθε με την εξάπλωση του φεμινισμού και την είσοδο των γυναικών στην αγορά εργασίας. Η χειραφέτηση και η οικονομική ανεξαρτησία των γυναικών, η συμμετοχή τους στην παραγωγή και η διεύρυνση των δικαιωμάτων τους, άλλαξε κατά πολύ τους παραδεδομένους ρόλους και των δύο φύλων μέσα στην οικογένεια.
- Τις ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις των τελευταίων δεκαετιών ακολούθησε μια μεγάλη κρίση όλων των παραδοσιακών αξιών και δομών. Ανάμεσά τους και ο θεσμός της οικογένειας, που υπέστη ισχυρά χτυπήματα στη συνοχή και τον τρόπο λειτουργίας του. Η τεχνολογία και τα επιτεύγματά της περιόρισαν το διάλογο και την επικοινωνία ανάμεσα στα μέλη της.
- Η παγκοσμιοποίηση, ίσως η μεγαλύτερη κοινωνική μεταβολή του αιώνα, δεν άφησε ανέγγιχτη την οικογενειακή ζωή. Τα ξενόφερτα πρότυπα ζωής και ο μοντερνισμός προβάλλουν και καλλιεργούν τον ατομικισμό μέσα στην κοινωνία και όχι τους οικογενειακούς δεσμούς.

- Η λειτουργία της οικογένειας έχει επηρεαστεί και από το μοντέρνο τρόπο ζωής, με τους ταχύτατους και αγχωτικούς ρυθμούς του. Οι απαιτήσεις, η ζωή στις μεγαλουπόλεις και η καθημερινή υπερένταση έκαναν τις ανθρώπινες σχέσεις δυσαρμονικές. Η αποξένωση των σημερινών κοινωνιών είναι ένας ακόμη παράγοντας αλλαγής του τοπίου μέσα στην οικογένεια.

Επίλογος

Το μέλλον του θεσμού της οικογένειας δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια. Είναι αμφίβολο αν οι κλυδωνισμοί που υφίσταται θα οδηγήσουν σε κατάργηση του θεσμού ή στην ανάδειξη μιας ανανεωμένης μορφής του. Το σίγουρο είναι, πως, ανεξάρτητα από την τύχη που επιφυλάσσει το μέλλον στην οικογένεια, η αξία και η συμβολή της στον ανθρώπινο πολιτισμό θα παραμείνει ανεκτίμητη.

Επιμέλεια: Πατέρα Αγγελική

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Ο συντάκτης του Κειμένου Α στις τελευταίες παραγράφους πραγματεύεται τους παράγοντες που οδηγούν τον άνθρωπο στην ευτυχία. Αρχικά ως αναγκαία προϋπόθεση για την ευδαιμονία είναι η γνώση και η αυτογνωσία. Παράλληλα τονίζεται ότι ο άνθρωπος οφείλει να έχει ενστερνιστεί ένα σύνολο αξιών θεμελιωμένων στην ελευθερία, στον σεβασμό του άλλου και στον αυτοσεβασμό, καθώς επικρατούν πολλές αντιφάσεις και σύγχυση. Τέλος ο συγγραφέας κρίνει ότι αποτελεί αδήριτη ανάγκη να διαθέτει ο άνθρωπος όραμα, πολυπρισματική κρίση, δημιουργικότητα και δυνατότητα ενδοσκόπησης.

(Λέξεις 77)

Β1. Ο συντάκτης του Κειμένου Α υποστηρίζει πως ο άνθρωπος πρέπει να συλλογίζεται απελευθερωμένος από προκαταλήψεις κι αυτοπεριοριστικές πεποιθήσεις, άρα ελεύθερα. Μόνο τότε συλλογίζεται ορθά. Βέβαια αναγκαία προϋπόθεση σύμφωνα με τον συγγραφέα για να σκεφτόμαστε σωστά και να διευρύνουμε τις εναλλακτικές μας είναι η γνώση και η αυτογνωσία. Με την πρώτη ο άνθρωπος παύει να είναι μονοδιάστατος, έχει περισσότερες επιλογές και συνεπώς μπορεί να τις αξιολογεί με φρόνηση και σωφροσύνη.

Εκτός μάλιστα από τη γενική γνώση ο συγγραφέας θεωρεί απαραίτητο παράγοντα ευδαιμονίας και την αυτογνωσία, την κατανόηση του εαυτού και όλων των παραμέτρων που τον αποτελούν. Η γνώση λοιπόν και η αυτεπίγνωση αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες ελεύθερων επιλογών που οδηγούν στην ευτυχία.
Ο συγγραφέας για να πείσει τον αναγνώστη, αξιοποιεί την αυθεντία. Συγκεκριμένα κάνει αναφορά στον Ρήγα Φεραίο και στη ρήση του «συλλογάται καλά, όποιος συλλογάται ελεύθερα» για να δηλώσει ότι η ελευθερία των επιλογών οδηγεί στην απόκτηση της ευτυχίας. Επιτυχημένα λοιπόν τίθεται στο σημείο αυτό η επίκληση στην αυθεντία, η οποία ισχυροποιεί την άποψη του συντάκτη και τον καθιστά αξιόπιστο, αφού εμφανίζεται να κατέχει την αντίστοιχη βιβλιογραφία κι αναδεικνύεται η ευρυμάθειά του και η επιστημονική του κατάρτιση.

Β2. Ο συντάκτης του κειμένου Α στην πρώτη παράγραφο επιλέγει τη χρήση επαναλήψεων και α΄ πληθυντικού προσώπου. Αρχικά με τη χρήση επαναλήψεων, όπως «η ζωή μας είναι μία» – «να το παίξουμε μόνο μία φορά», «εμείς επιλέγουμε – εμείς φτιάχνουμε – εμείς είμαστε – εμείς θα το χειροκροτήσουμε» εξασφαλίζεται έμφαση εγείροντας συναισθήματα υπευθυνότητας, αφού μόνο μία φορά ζούμε κι εμείς είμαστε υπεύθυνοι για τα αποτελέσματα των πράξεών μας. Παράλληλα η χρήση του α΄ πληθυντικού προσώπου με ενδεικτικές φράσεις «εμείς επιλέγουμε – εμείς φτιάχνουμε» δημιουργεί κλίμα οικειότητας με τον δέκτη και προσδίδει αμεσότητα στον λόγο, αφού ο συντάκτης εντάσσει και τον εαυτό του στο θέμα. Θα μπορούσαμε μάλιστα να πούμε ότι το ύφος χρωματίζεται έμμεσα με διδακτικό τόνο.

Β3. Ο τίτλος του κειμένου είναι περιεκτικός κι αποδίδει εύστοχα το περιεχόμενό του. Ο συντάκτης με ευσύνοπτο τρόπο και με μια υποθετική πρόταση δίνει τη δυνατότητα στον αναγνώστη να εικάσει τι θα γινόταν αν υπήρχαν δύο ζωές. Άρα εξαρχής του κεντρίζει το ενδιαφέρον να διαβάσει το κείμενο. Δεδομένου όμως ότι η υποθετική πρόταση δηλώνει το μη πραγματικό ο αναγνώστης γνωρίζει εκ των προτέρων πως ο συγγραφέας θα αναιρέσει την υπόθεση αυτή και θα κατευθύνει τον συλλογισμό του σε άλλο θέμα.
Τίτλος: Ευτυχία: Συγκυριακή ή ατομική υπόθεση;

Β4. Στο κείμενο διακρίνεται η ποιητική λειτουργία της γλώσσας. Δύο χωρία που επιβεβαιώνουν τη λειτουργία αυτή είναι:

«οι επιλογές μας είναι που καθορίζουν το θέατρο της ζωής μας»
«ικανότητα να βλέπουμε τα πράγματα από το μπαλκόνι»
Η χρήση συνυποδηλωτικής έκφρασης προσδίδει στο κείμενο αμεσότητα, ζωντάνια, παραστατικότητα και ποικιλία στον λόγο. Το κείμενο γίνεται περισσότερο λυρικό-ποιητικό και το ύφος γλαφυρό. Ακόμη, οι ιδέες τις οποίες πραγματεύεται ο συγγραφέας γίνονται περισσότερο κατανοητές. Ιδιαιτέρως σ' ένα κείμενο, 'όπως το δοθέν, που θίγει ένα πολύ αόριστο και πολυσχιδές θέμα, αυτό της ευτυχίας και της ολοκλήρωσης του ανθρώπου, η χρήση του μεταφορικού λόγου συμβάλλει στην ουσιαστικότερη προσέγγιση και πρόσληψη του κειμένου από τον αναγνώστη.

Β5. Ο Θανάσης Βέγγος συμβουλεύει τον γιο του να αποφύγει τις πολλές και συναναστροφές και τις άσκοπες παρέες η ευτυχία για αυτόν βρίσκεται στη σταθερότητα των διαπροσωπικών σχέσεων .Το κείμενο είναι συμβουλευτικό και αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση του β ρηματικού προσώπου .Ο συμβουλευτικός τόνος ενισχύεται με τη συναισθηματική διέγερση του δέκτη μέσα από το ασύνδετο σχήμα και το συναισθηματικά φορτισμένο λεξιλόγιο.

Γ. Ο Τάκης Παπατσώνης στο ποίημά του αναφέρεται στις προϋποθέσεις κατάκτησης της ευτυχίας. Συγκεκριμένα στις τρεις πρώτες στροφές χρησιμοποιώντας δύο υποθετικές (αν μόνο...αν μόνο) και μία χρονικοϋποθετική πρόταση (όταν μια σου στιγμή...) και με έντονο το στοιχείο της επανάληψης (τούτο μόνο θ' αρκούσε – ετούτο θα ΄ταν κιόλας η ευτυχία) το ποιητικό υποκείμενο προσπαθεί να ορίσει τι είναι ευτυχία. Στην τρίτη στροφή μάλιστα στον προβληματισμό του αυτό κάνει συμμέτοχο και τον αναγνώστη χρησιμοποιώντας κλητική προσφώνηση (άνθρωπε) και β΄ ενικό πρόσωπο (που ΄χεις ξεφύγει – αισθανθείς). Μέσα από συνεχείς μεταφορές και εικόνες όπου μπορεί ν' αναζητηθεί η ευτυχία το ποιητικό υποκείμενο καταλήγει ότι η ευτυχία βρίσκεται παντού κι αρκεί να της επιτρέψουμε το πέρασμα (ας έρθει) για να τη βιώσουμε.
Δυστυχώς στη σημερινή εποχή ο άνθρωπος όσο ποτέ άλλοτε πρέπει ν' αποφύγει πολλών ειδών «Σειρήνες» που τον αποπροσανατολίζουν από την κατάκτηση της ευδαιμονίας.Έτσι επιβάλλεται να βρει τρόπους ν' απαλλαγεί από τον υλικό ευδαιμονισμό που τον κατατρύχει και να κατανοήσει πως η ευτυχία βρίσκεται στα απλά, καθημερινά πράγματα που μας πλαισιώνουν. Παράλληλα πρέπει ν' απαλλαγεί από το αίσθημα της ματαιοδοξίας και της υπέρμετρης φιλοδοξίας που δεν του επιτρέπει να ζήσει ευχάριστα όμορφες στιγμές με τους αγαπημένους του. Τέλος στους χαλεπούς αυτούς καιρούς που ζούμε ο σύγχρονος άνθρωπος έχει ν' αντιμετωπίσει έναν συνάνθρωπο

ανταγωνιστή, που σαν θηρίο προσπαθεί να τον κατασπαράξει και να τον υποτιμήσει. Αυτοί λοιπόν οι τοξικοί, κακεντρεχείς και χειριστικοί άνθρωποι πρέπει να εξοβελίζονται δια παντός από τη ζωή μας.

Δ.

- Επικοινωνιακό πλαίσιο: άρθρο
- Τίτλος: Αναζητώντας την ευτυχία…
- Γλώσσα: αναφορική λειτουργία, χρήση κυρίως γ΄ προσώπου με εναλλαγή α΄ πληθυντικού.
- Ύφος: σοβαρό, επίσημο

Πρόλογος: γενική αναφορά στην έννοια της ευτυχίας και τη συνεχή απομάκρυνσή της από αυτή.

Κυρίως θέμα:
Α. Προϋποθέσεις κατάκτησης ευτυχίας:

1) Υγεία : Δίνει τη δυνατότητα απόλαυσης κάθε αγαθού, επηρεάζει τον ψυχισμό και αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την ανύψωση του ατόμου.
2) Πνευματική καλλιέργεια: Προσφέρει πλατιά-σφαιρική γνώση, βοηθά τον άνθρωπο να αξιοποιήσει τις διανοητικές του δυνατότητες. Εξευγενίζει τον εσωτερικό του κόσμο και τον οδηγεί στην ψυχική ωριμότητα και τελείωση.
3) Οικονομική ευχέρεια: Εξασφαλίζει στο άτομο ένα υψηλό βιοτικό επίπεδο με δυνατότητες επιλογών στη μόρφωση και την ψυχαγωγία.
4) Ορθή επιλογή επαγγέλματος: Δίνει τη δυνατότητα για προσωπική έκφραση, κοινωνική αναγνώριση και αυτοπραγμάτωση.
5) Αυτογνωσία: Ο άνθρωπος βελτιώνει τις ατέλειες του, κατευνάζει τον εγωισμό του, συνειδητοποιεί, τις κλίσεις του, αναλαμβάνει έργο που ανταποκρίνεται στις δυνατότητες του, αποφεύγοντας έτσι αποτυχίες και απογοητεύσεις.
6) Αυτοπεποίθηση: Ενισχύει τη θέληση για ανάληψη και πραγμάτωση υψηλών στόχων. Όποιος πιστεύει στον εαυτό του αντιμετωπίζει με σθένος τις δυσκολίες, αγωνίζεται με θάρρος, επιμονή και δεν επιτρέπει στους αστάθμητους παράγοντες της τύχης να γίνονται ρυθμιστές της ζωής του.
7) Σύναψη υγιών διαπροσωπικών σχέσεων: καλύπτονται οι επικοινωνιακές ανάγκες, αποφεύγεται η μοναξιά και ολοκληρώνεται το άτομο ως κοινωνικό ον.

Δημιουργείται αίσθηση ασφάλειας και πρόσφορο έδαφος για άνθηση των γραμμάτων και των τεχνών, για οικονομική ανάπτυξη και άνοδο γενικότερα του βιοτικού επιπέδου.
9) Η κατοχύρωση της Ελευθερίας-Δημοκρατίας: Προωθείται ο διάλογος, διασφαλίζονται η δικαιοσύνη και η αξιοκρατία, κατοχυρώνονται η εύρυθμη λειτουργία των κοινωνικών θεσμών, η ευσυνείδητη πειθαρχία στους νόμους που θεμελιώνουν τον αμοιβαίο σεβασμό και δημιουργούν τις προϋποθέσεις για την ατομική και κοινωνική ευδοκίμηση.
10) Η θεμελίωση των ανθρώπινων δικαιωμάτων : Εξασφαλίζει την ελευθερία του ατόμου να σκέφτεται, να εκφράζεται, να αποφασίζει, να ενεργεί χωρίς εξωτερικούς καταναγκασμούς και να απολαμβάνει όλα εκείνα τα αγαθά που ταιριάζουν στην ανθρώπινη υπόσταση και την εξυψώνουν οδηγώντας την στην ευδαιμονία.

Β. Μορφές αλλοτρίωσης :

1) Οι συνθήκες ζωής στα σύγχρονα αστικά κέντρα: Η κακοποίηση της αισθητικής, η καταστροφή της φύσης, ο συνωστισμός, η ανωνυμία, η μαζοποίηση διαβρώνουν τις ανθρώπινες σχέσεις, επιτείνουν το άγχος και ευνοούν την εκδήλωση ψυχικών διαταραχών.
2) Το υλιστικό και καταναλωτικό πλαίσιο ζωής: Η θεοποίηση του κέρδους και το αέναο κυνήγι των υλικών αγαθών καλλιεργούν τον εξουθενωτικό ανταγωνισμό, περιορίζουν τις κοινωνικές αρετές για ομαλή συμβίωση και αποπροσανατολίζουν τις ανθρώπινες προσπάθειες για πνευματική ανάταση, πολιτιστική δημιουργία και ηθική ολοκλήρωση.
3) Η μαζοποίηση: Αναιρεί την ατομικότητα, τη μοναδικότητα, τα ιδιαίτερα στοιχεία της προσωπικότητας και οδηγεί στον εκφυλισμό της ανθρώπινης αξιοπρέπειας, σε απώλεια αυτοτέλειας, αυτοκυριαρχίας και στην πνευματική υποδούλωση.
4) Η σχέση του σύγχρονου ανθρώπου με την εργασία: Τα συστήματα αυτοματισμού και η επιλογή επαγγέλματος με βάση τις απαιτήσεις της αγοράς εργασίας περιορίζουν την φαντασία, αποξενώνουν το δημιουργό από το δημιούργημα και του στερούν τη χαρά της δημιουργίας.
5) Η σχέση του ανθρώπου με τη φύση : Η απομάκρυνση από τη φύση, η εξαντλητική εκμετάλλευση της για εύκολο πλουτισμό με επακόλουθο την αλόγιστη οικολογική καταστροφή, η άγνοια των νόμων, των μηχανισμών και των επιταγών της έχουν υποβαθμίσει αισθητά την ποιότητα ζωής του σύγχρονου ανθρώπου και επιτείνουν το ψυχολογικό αδιέξοδο.

6) Η σχέση με την πολιτική : Τα οράματα για την κοινωνική δικαιοσύνη και ευημερία που νοηματοδοτούσαν τη ζωή του ανθρώπου έχουν εκλείψει και τη θέση τους έχει πάρει ο έντονος ατομικισμός, η παθητικότητα και η αποστασιοποίηση από τα πολιτικά δρώμενα.
7) Η σχέση με τον συνάνθρωπο: Οι διαπροσωπικές σχέσεις χαρακτηρίζονται από τυπικότητα που φτάνει μέχρι την αδιαφορία, αφού η αναλγησία, ο κυνισμός και ο αμοραλισμός παρεμποδίζουν το πλησίασμα των ψυχών.

Επίλογος:

Ανακεφαλαίωση και προτροπή

Επιμέλεια: Πατέρα Αγγελική

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Νοηματικά κέντρα:

Είναι αντιφατική, αποτελεί έγκλημα ,δεν λειτουργεί ανασταλτικά του εγκλήματος, είναι οριστική και αμετάκλητη ,είναι ρατσιστική και εξαρτάται από τα οικονομικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά του δράστη.

Β1. Ενισχύουν την άποψη ότι η θανατική ποινή είναι μια ακατάλληλη ποινή, αποτελούν επίκληση στην αυθεντία και η χρήση τους δίνει στο κείμενο κύρος και αξιοπιστία αλλά και αποδεικνύει την ευρυμάθεια του συγγραφέα .

Β2. Οι ερωτήσεις είναι ρητορικές δίνουν έμφαση, ζωντάνια , παραστατικότητα, ευαισθητοποιούν και προβληματίζουν τον αναγνώστη σε θέματα που αφορούν την ποινή και αποτελούν επίκληση στο συναίσθημα αφού προσελκύουν το ενδιαφέρον του αναγνώστη για την θεατρική παράσταση και την παρακολούθησή της.

Β3. Αναφέρομαι στις πληροφορίες που αντλώ από το κείμενο 1, αναφέρομαι στις πληροφορίες που αντλώ από το κείμενο 2. Βγάζω συμπέρασμα με τις ομοιότητες : η θανατική ποινή είναι μια ποινή που δεν έχει πάντα σχέση με το μέγεθος του εγκλήματος όσο με κοινωνικά και οικονομικά χαρακτηριστικά του δράστη και συνδέεται με προκαταλήψεις και στερεότυπα.

Γ. Η Αντόνια είναι ένας άνθρωπος με ανθρωπιά, κατανόηση και έλλειψη εκδικητικού πνεύματος. Συνειδητοποιεί ότι η θανατική εκτέλεση του φονιά του παιδιού της δεν προσθέτει τίποτα παραπάνω από ένα ακόμη νεκρό. Το μεγαλείο της ψυχής της αναδεικνύεται από τους εξής κειμενικούς δείκτες: τη συχνή χρήση του ευθύ λόγου που δίνει παραστατικότητα , θεατρικότητα και φωτίζει το χαρακτήρα της Αντόνια (κειμενικές αναφορές),τη χρήση του εσωτερικού μονολόγου που αποκαλύπτει τις μύχιες σκέψεις της(κειμενικές αναφορές),η πρωτοπρόσωπη αφήγηση που προσφέρει βιωματικό και εξομολογητικό τόνο ,καθώς και η χρήση σημείων στίξης που επιβεβαιώνουν τη συναισθηματική της φόρτιση(κειμενικές αναφορές).

Δ.

- ΑΡΘΡΟ
- ΤΙΤΛΟΣ
- ΠΡΟΛΟΓΟΣ: Αντικειμενικό, επίκαιρο, γενικό , ειδικό ,αναφορά στα ερωτήματα.
- ΚΥΡΙΩΣ ΜΕΡΟΣ
- ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ

Επιχειρήματα κατά της θανατικής ποινής:

- **Η θανατική ποινή**, όσο κι αν λειτουργεί εκφοβιστικά, **δεν αποτελεί σε όλες τις περιπτώσεις ικανό αποτρεπτικό παράγοντα για σημαίνοντα εγκλήματα**, καθώς αυτά είτε τελούνται από ανθρώπους που βρίσκονται σε κατάσταση ισχυρής συναισθηματικής φόρτισης (εν βρασμώ ψυχής), οπότε δεν λαμβάνουν καν υπόψη τους τις πιθανές συνέπειες των πράξεών τους, είτε από άτομα που τελούν το έγκλημα έχοντας ήδη αποδεχτεί το ενδεχόμενο του θανάτου τους. Άνθρωποι που επιχειρούν τρομοκρατικές ενέργειες ή πολιτικά εγκλήματα, είναι ήδη αποφασισμένοι να θυσιάσουν ακόμη και τη ζωή τους, ενώ δεν είναι απίθανο να θεωρούν τη θανάτωσή τους ως μέσο επικύρωσης και προσωπικής αναγνώρισης.

- **Η πολιτεία προκειμένου να επιβάλει τη θανατική ποινή αναγκάζει κάποιον πολίτη (υπάλληλο) να επωμιστεί το βάρος της εκτέλεσής της**. Στην περίπτωση αυτή ακόμη και η επίγνωση πως πρόκειται για μια νόμιμα επιβεβλημένη ποινή δεν απαλλάσσει τον εκτελούντα από τις τύψεις κι από το γενικότερο προσωπικό κόστος. Αν, μάλιστα, πρόκειται για μια επαναλαμβανόμενη δραστηριότητα τότε ο ίδιος και όσοι εμπλέκονται σ’ αυτή τη διαδικασία εξωθούνται σε μια απευαισθητοποίηση που τους φέρνει στα όρια της αποκτήνωσης.

- **Η θανατική ποινή είναι απολύτως αμετάκλητη**, γεγονός που δημιουργεί εύλογες αντιδράσεις, καθώς υπάρχει πάντοτε το ενδεχόμενο να επιβληθεί σε κάποιον πολίτη που δεν έχει διαπράξει το έγκλημα που του καταλογίζουν.

- **Με τη θανατική ποινή αναιρείται πλήρως η έννοια του σωφρονισμού**, καθώς δεν παρέχεται καμία δυνατότητα μετάνοιας και ηθικής αναμόρφωσης στο δράστη. Η ποινή, έτσι, λειτουργεί περισσότερο ως εκδίκηση.

- **Η πολιτεία, όχι μόνο δεν αποδέχεται τυχόν δική της ευθύνη για την εξώθηση ενός πολίτη της σ' ένα ακραίο έγκλημα**, αλλά συνάμα είναι σαν να παραδέχεται πως δεν είναι σε θέση ή ακόμη περισσότερο πως θεωρεί ότι δεν αξίζει καν να επιδιώξει μέσω μιας διαφορετικής ποινής (π.χ. ισόβια κάθειρξη) την αναμόρφωσή του. Χρησιμοποιεί τη θανατική ποινή για να απαλλάξει τη πολιτεία από τον πολίτη που διαπράττει ένα ειδεχθές έγκλημα.

- **Η θανατική ποινή συνιστά μέγιστη παραβίαση ενός θεμελιώδους ανθρώπινου δικαιώματος**. Αποτελεί, συνάμα, μια διάπραξη φόνου, που επιβάλλεται από την ίδια την πολιτεία, γεγονός που εγείρει το ερώτημα, αν η πολιτεία έχει τη δικαιοδοσία να αφαιρεί τη ζωή ενός πολίτη.

- Το ερώτημα αυτό, άλλωστε, μπορεί να σχετιστεί και με τη γενικότερη έννοια του εγκλήματος, υπό την έννοια πως η θανατική ποινή επιβάλλεται από μια πολιτεία (κυβέρνηση), η οποία ενδεχομένως με τις λανθασμένες πολιτικές της να επιφέρει ψυχική οδύνη ή ακόμη και να εξωθεί στην αυτοχειρία πολίτες της, χωρίς ποτέ να λογοδοτεί για τα εγκλήματα αυτά. **Δημιουργείται, έτσι, μια ανισότητα ανάμεσα στο προφανές έγκλημα που διαπράττει ένας πολίτης και στα πλείστα αφανή εγκλήματα που διαπράττει η πολιτεία** με λάθη ή παραλείψεις της.

- Μια πολιτεία που προχωρά στην καταπάτηση ενός εγγενούς και αναφαίρετου δικαιώματος των πολιτών της, **θέτει αυτομάτως υπό αίρεση την ίδια της την υπόσταση και αξία ως θεσμού που υπάρχει για να προστατεύει και να υπερασπίζεται τα θεμελιώδη δικαιώματα** των μελών της.

- Η επιβολή της θανατικής ποινής **βασίζεται κάθε φορά σε μια δικαστική απόφαση, η οποία όπως όλες οι ανθρώπινες αποφάσεις ενέχει το στοιχείο της υποκειμενικότητας**, και είναι άρα ευάλωτη σε παράγοντες όπως είναι ο κοινωνικός ή φυλετικός ρατσισμός.

- Η θανατική ποινή **μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο άσκησης πολιτικών πιέσεων** και επιβολής, λαμβάνοντας τη μορφή εκκαθάρισης αντίπαλης ή εν γένει διαφωνούσας πολιτικής παράταξης.

- Η επίγνωση ότι ένα είδος εγκλήματος επισύρει τη θανατική ποινή σε μια πολιτεία, όπως για παράδειγμα ο βιασμός, είναι πιθανό να εξωθήσει τον εγκληματία σε πράξεις μεγαλύτερης βιαιότητας (π.χ. διάπραξη φόνου), προκειμένου να καλύψει το διαπραχθέν έγκλημα.

- Η θανατική ποινή, πέρα από το ίδιο το γεγονός της θανάτωσης, συνιστά συνολικά μια εξαιρετικά σκληρή τιμωρία, καθώς **υποβάλλει τον τιμωρηθέντα σ' έναν εξουθενωτικό ψυχικό βασανισμό** από τη στιγμή που θα του γνωστοποιηθεί πως επίκειται η εκτέλεσή του.

- Η επιβολή της θανατικής ποινής μοιάζει ως η εύκολη λύση σε σχέση με όσα θα έπρεπε προληπτικά να εφαρμόζει μια πολιτεία προκειμένου να καλλιεργήσει επαρκώς και να διαφυλάξει τους πολίτες της από την καταφυγή σε βίαια εγκλήματα.

- ΕΠΙΛΟΓΟΣ
  Ανακεφαλαίωση
  Προτροπή

Επιμέλεια: Πατέρα Αγγελική

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Ο συγγραφέας αναφέρεται στον εθελοντισμό επισημαίνοντας πως οι αιτίες που ωθούν τους ανθρώπους στον ατομικό ή οργανωμένο εθελοντισμό είναι συχνά αδιευκρίνιστες. Οι εθελοντικές δραστηριότητες καλύπτουν τα κρατικά κενά σε ατομικά ή κοινωνικά προβλήματα που γεννούν οι ίδιες οι κοινωνίες. Σύμφωνα με έρευνες η προσφορά του εθελοντισμού είναι αμφίδρομη. Οι εθελοντές αποκομίζουν ικανοποίηση και ισορροπία στη ζωή τους, αισιοδοξία και κάλυψη των προσωπικών, κοινωνικών και εργασιακών κενών που μπορεί να νοιώθουν.

B1.

α. Λάθος (προκύπτει απ’ την εμφανή ανεπάρκεια των δομών …)
β. Σωστό (η ένταξη σε μια νέα … οικογενειακή τους ζωή)
γ. Λάθος (η διαφορά … μπορεί να προσφέρει)
δ. Σωστό (δεν αποσκοπεί … υποκατάστατό του)
ε. Λάθος (ο εθελοντισμός προωθεί τη δημιουργία … την εργασία)

B2.

- <u>Ερωτήματα</u>: προσδίδουν ζωντάνια, αμεσότητα και παραστατικότητα στο κείμενο. Ο αναγνώστης αφυπνίζεται και προβληματίζεται σχετικά με τον εθελοντισμό.
- <u>Γ’ πρόσωπο</u>: το κείμενο αποκτά τυπικό ύφος, αντικειμενικότητα και ουδετερότητα. Ο συγγραφέας αποστασιοποιείται και τα λεγόμενά του αποκτούν καθολική ισχύ

B3.

Ενδεικτικοί τίτλοι
- Τα οφέλη του εθελοντισμού
- Προσφορά: το μονοπάτι προς την προσωπική ικανοποίηση
- Ο εθελοντισμός και οι εκφάνσεις του
- Εθελοντισμός: μαθήματα ζωής και ανθρωπιάς

B4. Ο συγγραφέας ακολουθεί παθητική σύνταξη. Με την παθητική τονίζεται η πράξη, επιτυγχάνεται η αποστασιοποίηση, η ουδετερότητα και το τυπικό ύφος.

B5.

- <u>Τρόπος πειθούς</u>: επίκληση στη λογική και τεκμήρια (τα παραδείγματα του Προμηθέα και του Ηρακλή).
- <u>Τι επιτυγχάνει</u>: με απτά και ευρέως γνωστά παραδείγματα ο αναγνώστης έχει χειροπιαστές αποδείξεις που τον βοηθούν να κατανοήσει καλύτερα την έννοια και αξία του εθελοντισμού.

B6.

- Σύμφωνα με το συγγραφέα ο εθελοντισμός έχει ως στόχο την ατομική και κοινωνική ευημερία. Συνδράμει ανιδιοτελώς στην παροχή βοήθειας δρώντας συμπληρωματικά στις κρατικές δομές και αποτελεί φιλοσοφία και στάση ζωής.
- <u>Τρόπος πειθούς</u>: λογική με επιχειρήματα

Γ.

- <u>Κύριο θέμα</u>: η αδυναμία παροχής βοήθειας και η έλλειψη αλληλεγγύης στους σημερινούς χαλεπούς καιρούς.
- <u>Γλωσσικές επιλογές</u>: συγκινησιακός λόγος (γεμίζει φέρετρα), χρήση α' ενικού προσώπου, σχήματα λόγου (να ξεγλιστρά σα χέλι).

Δ.

Παραγωγή λόγου

<u>Επικοινωνιακό πλαίσιο</u>: άρθρο

<u>Προσφορά</u>

- Ξεφεύγουμε απ' τη χρησιμοθηρική αντίληψη ζωής και αναγνωρίζουμε την αξία της προσφοράς
- Καταπολέμηση του εγωκεντρισμού και του ατομικισμού
- Καλλιέργεια συλλογικότητας και αλληλεγγύης
- Κοινωνικοποίηση με την ένταξη σε εθελοντικές ομάδες
- Ανακούφιση σε ευπαθείς ομάδες και άτομα που χρήζουν ανάγκης
- Καταπολέμηση ρατσισμού και ξενοφοβίας με την επαφή με αλλοδαπούς αναξιοπαθούντες
- Καλλιέργεια σωστής και ολοκληρωμένης προσωπικότητας με ουσιαστικές αρχές και αξίες

<u>Τρόποι υιοθέτησης εθελοντισμού</u>

- Γαλούχηση από μικρή ηλικία με αρχές και αξίες
- Υγιή πρότυπα απ' τους γονείς και τη σχολική κοινότητα
- Πρωτοβουλίες και εθελοντικές δράσεις απ' το οικογενειακό και σχολικό περιβάλλον
- Ανθρωπιστική παιδεία
- Προβολή μέσω των ΜΜΕ αναγκών και εθελοντικών οργανώσεων και δράσεων

<u>Επιμέλεια</u>: Τσιάκαλου Μαρία

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Η συγγραφέας αναφέρεται στην αλληλεγγύη, επισημαίνοντας ό τι εν μέσω της σημερινής πανδημίας οι άνθρωποι συνειδητοποιούν πως ευθύνονται για ποικίλα προβλήματα του πλανήτη. Αυτά απορρέουν απ' την έλλειψη αλληλεγγύης ανθρώπων και κοινωνιών, η οποία αποτελεί συνέπεια εγωκεντρικών συμπεριφορών. Ο τωρινός φόβος εξαιτίας της ασθένειας ωθεί τους ανθρώπους να συνεργαστούν για την αντιμετώπιση των κοινών προβλημάτων, αποβάλλοντας τον εγωκεντρισμό και υιοθετώντας την αλληλεγγύη ως μοναδικό τρόπο αλληλοκατανόησης και αλληλοστήριξης των ανθρώπων.

Β1.

α. Σωστό (στο ατροφικό … κυνισμό)
β. Σωστό (η αλληλεγγύη … ποιοτικότερη ζωή)
γ. Λάθος (για την επίτευξη … στο πρόβλημά του)
δ. Λάθος (βλέπουμε για παράδειγμα … Μεγαλύτερο ρόλο στη ζωή μας)
ε. Σωστό (είναι φανερό … εαυτόν ξεχωριστό)

Β2.

- <u>Τρόποι πειθούς</u>: λογική με τεκμήρια (παραδείγματα όπως εστίες πολέμων, ανέχεια, κ.λπ.) και συναίσθημα με συγκινησιακά φορτισμένο λόγο, όπως «προβάλλουν απειλητικές», «θίγουν συθέμελα».
- <u>Πώς βοηθούν</u>: τα τεκμήρια αποτελούν χειροπιαστές αποδείξεις που πείθουν τον αναγνώστη με την αλήθεια τους και ο συγκινησιακός λόγος τον αφυπνίζει και τον προβληματίζει σχετικά με τα προβλήματα που ο άνθρωπος έχει προκαλέσει

Β3. Αμεριμνησία, στηρίζονται, αλληλοβοήθειας, αδύναμο, δυσκολία, έρμαια, εθελοτυφλίας, ωμότητα

Β4.

- <u>Γλωσσικές επιλογές</u>: συγκινησιακός λόγος (φονικής αρρώστιας), σημεία στίξης («δαμόκλειο σπάθη»), μεταφορές (να γκρεμίσουμε τα τείχη).
- <u>Χρήση α' προσώπου</u> : προσδίδει ζωντάνια, αμεσότητα, οικειότητα και δείχνει τη συμμετοχή του συγγραφέα στο πρόβλημα.

- <u>Μήνυμα</u>: μόνο μέσα απ' την αποβολή του εγωκεντρισμού και με την καλλιέργεια της αλληλεγγύης μπορούν οι άνθρωποι να αντιμετωπίσουν τη φονική πανδημία και να βρουν λύσεις.

Β5. Αναπτύσσει τη θέση του με παραδείγματα. Τα παραδείγματα είναι πειστικά γιατί αποτελούν τεκμήρια, χειροπιαστές αποδείξεις και η πληθώρα που παραθέτει ο συγγραφέας κάνει τη θέση του πειστική.

Γ. Το κύριο θέμα του ποιήματος είναι ο ακούσιος εγκλωβισμός του ποιητή που αισθάνεται πως τα «τείχη» που κάποιοι άλλοι έχουν υψώσει γύρω του τον αποκλείουν απ' τη συνέχιση της καθημερινής φυσιολογικής του ζωής.

<u>Ρηματικά πρόσωπα: α' ενικό και γ' πληθυντικό</u>

- **Α' ενικό**: προσδίδει στο ποίημα εξομολογητικό τόνο. Βοηθά τον ποιητή να κάνει μια κατάθεση ψυχής και το ποίημα αποκτά βαθιά οικειότητα με τον αναγνώστη και αμεσότητα.
- **Γ' πληθυντικό**: μιλώντας αόριστα γι' αυτούς που τον εγκλώβισαν τους επιρρίπτει την ευθύνη χωρίς να τους κατονομάζει.

Δ. **Παραγωγή λόγου**

<u>Επικοινωνιακό πλαίσιο</u> : ομιλία

<u>Τα θετικά της καραντίνας</u>

- Βαθιά ενδοσκόπηση και γνωριμία με τον εσώτερο εαυτό μας.
- Ανακάλυψη και καλλιέργεια ιδιαίτερων δεξιοτήτων.
- Απόκτηση ελεύθερου χρόνου.
- Διάβασμα βιβλίων, παρακολούθηση ταινιών, διαδικτυακών παραστάσεων που δεν είχαμε το χρόνο ή την ευκαιρία να απολαύσουμε.
- Παραγωγικός και ουσιαστικός χρόνος με την οικογένεια και σύσφιξη σχέσεων.
- Άθληση.
- Καλλιέργεια διάφορων ενασχολήσεων, όπως κατασκευές, κηπουρική, κ.λπ.

<u>Επιμέλεια</u>: Τσιάκαλου Μαρία

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α.

- Το θέμα του κειμένου είναι αν στα χρόνια μας ο άνθρωπος είναι πιο διεφθαρμένος ή τιμιότερος.
- Η θέση του συγγραφέα είναι ότι ο κυνισμός και η ειρωνεία είναι τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά της ανηθικότητας της εποχής μας και ότι περιφρονούμε τους νόμους περισσότερο από ποτέ άλλοτε

Β1.

- Ηθική διαφθορά υπήρχε σε όλες τις εποχές και σε όλες τις κοινωνίες.
- Σήμερα το πρόβλημα της ηθικής διαφθοράς προβάλλει πιο έντονο γιατί υποτίθεται ότι ζούμε σε ανθρωπιστικές κοινωνίες.
- Δεν υπάρχει αίσθημα ντροπής αλλά κυνισμός αφού επικρατεί το δόγμα ότι ο σκοπός αγιάζει τα μέσα.
- Στη σύγχρονη εποχή η ένταση του φαινομένου είναι πιο έντονη, γεγονός απαράδεκτο αν σκεφτούμε ότι έχει βελτιωθεί το βιοτικό και μορφωτικό επίπεδο του ανθρώπου.
- Έχει χαθεί η έννοια της δικαιοσύνης, η οποία υπήρχε σε όλες τις εποχές και κοινωνίες, ερμηνευόμενη με διαφορετικό τρόπο.
- Σήμερα η ηθική έχει αντικατασταθεί από την ιδιοτέλεια και την ανελέητη κερδοσκοπία.
- Άρα, σήμερα η ηθική διαφθορά είναι περισσότερο κατακριτέα από ποτέ άλλοτε.

Β2.

- **έκλυση**: η έκλυση ηθών της εποχής μας οδηγεί στην απαξίωση των ανθρωπιστικών ιδεωδών.
- **κερδοσκοπία**: η κερδοσκοπία των τραπεζών ζημιώνει τους πολίτες που έχουν συνάψει δάνεια με αυτές.
- **αποτίμηση**: η αποτίμηση της οικονομικής κατάστασης της χώρας μας είναι τραγική γιατί τα χρέη είναι υπέρογκα.
- **παρεκτροπές**: οι παρεκτροπές ορισμένων βουλευτών κατά τη συνεδρίαση της Βουλής αποδεικνύουν ότι δεν έχουν δημοκρατική συνείδηση.
- **κυνισμός**: αντιμετώπισε την τραγωδία με πρωτοφανή κυνισμό, ούτε ένα δάκρυ δεν έτρεξε από τα μάτια του.

Β3.
Η συνοχή μεταξύ των περιόδων της δεύτερης παραγράφου επιτυγχάνεται με τη χρήση των παρακάτω διαρθρωτικών λέξεων:

- **Όμως** = αντίθεση
- **Βέβαια** = επιβεβαίωση
- **Αλλά** = αντίθεση
- **Έπειτα** = προσθήκη
- **Εάν** = υπόθεση

Β4.
Η επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας είναι πειστική, γιατί τεκμηριώνει την άποψή του με αυθεντία. Το μέσο πειθούς που χρησιμοποιείται είναι η άποψη του Θουκυδίδη, που θεωρείται άτομο κύρους. Έτσι, το επιχείρημά του αποκτά ισχύ και αξιοπιστίας.

Γ. Το ποιητικό υποκείμενο εκφράζει την ικανοποίησή του για την αυτόνομη και ασυμβίβαστη στάση ζωής που τήρησε. Η χαρά αυτή τον γεμίζει με πληρότητα και γαλήνη καθώς δεν ενδιαφέρεται για την άποψη των άλλων, των πολλών, των συμβιβασμένων, αλλά αρκείται στη συνέπεια που έδειξε σε μια αντικομφορμιστική στάση ζωής. Δεν υποτάχτηκε στα κοινωνικά στερεότυπα, δεν μαζοποιήθηκε, δεν εξετάζει αν έζησε ευτυχισμένος ή ευτυχισμένος εξαιτίας αυτής της στάσης. Αρκείται στη χαρά που του δίνει η αξιοπρεπής στάση ζωής και ο αυτοσεβασμός.
Σήμερα, η μαζοποίηση και η υποταγή στα κοινωνικές συμβάσεις χαρακτηρίζουν τους περισσότερους ανθρώπους, οι οποίοι κυριαρχούνται από τα καταναλωτικά – υλιστικά πρότυπα. Διέπονται από την αντίληψη ότι η ευτυχία απορρέει από τα υλικά αγαθά, δεν ενδιαφέρονται για την καλλιέργεια της προσωπικότητάς τους, γίνονται αναξιοπρεπείς όταν ασπάζονται το δόγμα ότι «ο σκοπός αγιάζει τα μέσα».

Δ. ΑΙΤΙΑ ΚΡΙΣΗΣ ΤΩΝ ΗΘΙΚΩΝ ΑΞΙΩΝ ΤΗΣ ΕΠΟΧΗΣ ΜΑΣ

- Τα οικονομικά συμφέροντα που έχουν οδηγήσει στη θυσία του ανθρωπισμού στο βωμό του κέρδους.
- Η αλαζονεία και η ματαιοδοξία του ανθρώπου, που θέλει να κερδίζει συνεχώς περισσότερα με οποιονδήποτε τρόπο.
- Η επικράτηση των υλιστικών προτύπων και η αδυναμία του ανθρώπου να αντισταθεί στον καταναλωτισμό και στις διαρκώς αυξανόμενες υλικές ανάγκες του.

- Η έλλειψη ανθρωποκεντρικής παιδείας και κριτικής σκέψης, με αποτέλεσμα ο άνθρωπος να μην μπορεί να ιεραρχήσει τις αξίες και τις ανάγκες του.
- Η δυσλειτουργία του δημοκρατικού πολιτεύματος, η ψηφοθηρία, η εξουσιομανία των πολιτικών.
- Τα ΜΜΕ αναπαράγουν διαρκώς τα κυρίαρχα καταναλωτικά πρότυπα και αποτελματώνουν την κριτική σκέψη λειτουργώντας ως προπαγανδιστικοί μηχανισμοί.
- Η λανθασμένη χρήση της τεχνολογίας, η οποία σε πολλές περιπτώσεις έχει υποκαταστήσει την ανθρώπινη δραστηριότητα.
- Η παθητικότητα και η αδιαφορία των περισσοτέρων ανθρώπων για το συνάνθρωπό τους.
- Τα ανθρώπινα δικαιώματα, αν και είναι θεσμικά κατοχυρωμένα, διαρκώς παραβιάζονται κατά καιρούς και κατά τόπους.
- Υποκρισία κρατών και κυβερνήσεων για τον ανθρωπιστικό και δημοκρατικό χαρακτήρα τους, ενώ στην πραγματικότητα συχνά χρησιμοποιούν αυταρχικές μεθόδους.
- Απαξίωση κάθε παραδοσιακού στοιχείου ως αναχρονιστικό, ακόμη και των ηθικών αναστολών.
- Απουσία πνευματικών ανθρώπων, οι οποίοι με το έργο τους και τις πράξεις τους μπορούν να αποτελέσουν πρότυπα προς μίμηση για την κοινή γνώμη.

ΠΩΣ ΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΘΑ ΣΥΜΒΑΛΛΕΙ ΣΤΟΝ ΕΠΑΝΑΚΑΘΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΞΙΩΝ ΜΑΣ

- Ο δάσκαλος οφείλει να μεταλαμπαδεύσει στα παιδιά τις αξίες του ανθρωπισμού και την αντίληψη ότι τα υλικά αγαθά δεν είναι αυτοσκοπός και χρειάζεται μέτρο σε όλες τις εκφάνσεις της ζωής.
- Το εκπαιδευτικό σύστημα πρέπει να αποκτήσει επιτέλους ανθρωποκεντρικό προσανατολισμό. Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις τους, να δίνεται έμφαση στην κριτική σκέψη, στη συνεργασία, στο διάλογο, στην καλλιτεχνική και αθλητική παιδεία, στα προγράμματα ανταλλαγής μαθητών, στη γνωριμία με άλλους λαούς και πολιτισμούς. Πρέπει να σταματήσει η μηχανιστική μάθηση, η βαθμοθηρία και ο ανταγωνισμός.
- Εθελοντικές δράσεις για ενίσχυση του αισθήματος της αλληλεγγύης και της ανιδιοτέλειας (βοήθεια σε αναξιοπαθούντες, οικολογικές

δράσεις, συνδρομή σε ευαίσθητες κοινωνικές ομάδες, όπως οι πρόσφυγες, οι χρονίως πάσχοντες, παιδιά που ζουν σε ιδρύματα κτλ).
- Κοινωνική αγωγή: σωστή οδηγική συμπεριφορά, τήρηση των κανόνων υγιεινής, προτεραιότητα σε ηλικιωμένους και ΑΜΕΑ, σεβασμός στη διαφορετική άποψη, ενεργή συμμετοχή στα κοινά μέσω μαθητικών συμβουλίων.

Επιμέλεια: Φλέγκας Κωνσταντίνος

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α.
- Οι δυσλειτουργίες διοικητικών τομέων του κράτους οφείλονται στην άγνοια και την ασυνεννοησία.
- Στην σημερινή εποχή στην άσκηση της εξουσίας πρέπει εκτός από τον σύγχρονο ηγέτη να συμμετέχουν επιχειρηματίες, επιστήμονες και η ενημερωμένη κοινή γνώμη, ώστε να διευρυνθεί η βάση άσκησης της εξουσίας.
- Η αυξανόμενη αποχή από τις εκλογές σχετίζεται με την αδιαφορία, την αμφισβήτηση και την απαξίωση των πολιτικών κομμάτων, τα οποία δεν μπορούν να επιλύσουν τα τρέχοντα προβλήματα.

Β1.
- Α → Σωστό
- Β → Σωστό
- Γ → Σωστό
- Δ → Λάθος
- Ε → Λάθος

Β2.
Ο κειμενογράφος υποστηρίζει τις απόψεις του με κοινά αποδεκτές αλήθειες, οι οποίες συνιστούν τεκμηριωμένο λόγο («οι δυτικές δημοκρατίες διαπιστώνουν πλέον την τυπική παρακμή τους και η κοινή γνώμη απομακρύνεται από τους εκλεγμένους αντιπροσώπους»). Αναπτύσσει τις απόψεις του με αίτιο – αποτέλεσμα (Στρατηγική και τακτική φαίνονται πιο σημαντικές από τον προσδιορισμό συγκεκριμένων στόχων. Έτσι, οι δυτικές

δημοκρατίες διαπιστώνουν πλέον την τυπική παρακμή τους και η κοινή γνώμη απομακρύνεται από τους εκλεγμένους αντιπροσώπους) και σύγκριση – αντίθεση (Η κρίση, όμως, του σύγχρονου δημοκρατικού συστήματος δεν μπορεί να αποτελέσει δικαιολογία για την απόρριψη της ίδιας της δημοκρατίας). Χρησιμοποιούνται οι διαρθρωτικές λέξεις «έτσι» και «όμως».

Β3.

α. «Η πλήρης κατανόηση και ο πλήρης έλεγχος της τεράστιας ποσότητας των πληροφοριών πριν από τη λήψη των αποφάσεων καθίστανται αναγκαία από την αυξανόμενη πολυπλοκότητα του κόσμου και τα προβλήματά του». Με τη χρήση της παθητικής σύνταξης το ύφος γίνεται απρόσωπο και δίνεται έμφαση στην πράξη.

β. Το καθήκον της εκπαίδευσης είναι να διαμορφώνει άρτιες προσωπικότητες με ανθρωποκεντρικό προσανατολισμό.
Το πρόβλημα εστιάζεται στην αδυναμία κατανόησης των δεδομένων.
Προτάσσεται η σκέψη και έπεται ο λόγος.
Ο παθητικοποιημένος πολίτης απεμπολεί την κριτική του σκέψη.
Ο χρόνος επιβραδύνει τη ροή του όταν βρίσκομαι στη φύση.

Β4.

Χρησιμοποιούνται δεοντολογική διατύπωση («πρέπει») και το επίρρημα «φυσικά» που ενδυναμώνει το επιχείρημά του. Επίσης, χρησιμοποιεί α πληθυντικό για να αποδώσει την κοινή ανάγκη όλων μας οι εξουσίες να αποκτήσουν νέα χαρακτηριστικά

Γ.

Εργασιακές σχέσεις:

- Απόλυτος διαχωρισμός μεταξύ ντόπιων –ξένων (Ευρωπαίων), έγχρωμων - λευκών στον εργασιακό χώρο.
- Οι ντόπιοι αντικείμενο εκμετάλλευσης από τους πάντες – Διάκριση ακόμα και στα εργατικά σωματεία και στο συνδικαλισμό.
- Ταξικός διαχωρισμός μεταξύ των λευκών (αφεντικά-υπάλληλοι).

Κοινωνικές σχέσεις:

- Ρατσιστικές αντιλήψεις Διονύση, Σταμάτη, Ευρωπαίων: Κοινωνικός αποκλεισμός των ντόπιων

- Ανθρωπιστική προσέγγιση Αριάγνης: απόρροια λαϊκής σοφίας – πηγαίας ανθρωπιάς.
- Στάση αλληλεγγύης υπέρ των αδυνάτων που απορρέει από ιδεολογική συνειδητοποίηση και τοποθέτηση (Ξένος – Μιχάλης).

Κειμενικοί δείκτες:

- Ο διάλογος αναδεικνύει ανάγλυφα τις παραβιάσεις εργασιακών δικαιωμάτων με ζωντάνια και παραστατικότητα.
- Τα ερωτήματα στο τέλος του αποσπάσματος δηλώνουν την απορία και τον προβληματισμό σχετικά με τις διακρίσεις ανθρώπων και την εκμετάλλευση ανθρώπου από άνθρωπο.

Δ.

Καλός πολίτης:

- Ενεργή συμμετοχή στα κοινά και άσκηση κριτικής στην εξουσία.
- Διάλογος με χρήση επιχειρημάτων και σεβασμό στη διαφορετική άποψη.
- Ενημέρωση και διασταύρωση των πληροφοριών μέσα από τις νέες τεχνολογίες.
- Κοινωνική ευθύνη και σεβασμός των ανθρωπίνων δικαιωμάτων.
- Εθελοντικές δράσεις, άρση προκαταλήψεων και στερεοτύπων

Καλός ηγέτης:

- Εντιμότητα, ηθική ακεραιότητα, αντίσταση σε πολιτικά και οικονομικά συμφέροντα.
- Απαρέγκλιτη τήρηση των ανθρωπίνων δικαιωμάτων.
- Διάλογος και σεβασμός των πολιτικών αντιπάλων
- Όχι στο φανατισμό και στις επιθέσεις στο ήθος του αντιπάλου, αντιπαράθεση με επιχειρήματα και όχι με τον λαϊκισμό.
- Εξυπηρέτηση λαϊκών συμφερόντων.
- Προστασία του περιβάλλοντος, της παράδοσης, των ελευθεριών κάθε ατόμου.

Επιμέλεια: Φλέγκας Κωνσταντίνος

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Ο συντάκτης του κειμένου εστιάζοντας στις αιτίες κακοποίησης του γυναικείου φύλου διερωτάται αν ο άντρας υπερέχει βιολογικά από τη γυναίκα και καταλήγει πως άλλες είναι οι βαθύτερες αιτίες του φαινομένου, όπως η υπεροχή του στα μέσα παραγωγής. Αυτή η ισχύουσα θέση του οδηγεί στην ανισότητα και τελικά στη βία και στον βιασμό εντός της οικίας. Ωστόσο παρατηρούνται και περιστατικά βίας στον χώρο εργασίας, όπου οι γυναίκες υπό τον φόβο της απόλυσης υφίστανται σεξουαλική παρενόχληση.**(Λέξεις 72)**

Β1. **α. Λάθος** (παράγραφος 3, «Ενώ στην εποχή του homo sapiens… τα δύο φύλλα ήταν ισότιμα…»)

β. Λάθος (παράγραφος 3, «οι μεγάλες αλλαγές έρχονται πριν από 10.000 χρόνια / «Και αυτή είναι η στιγμή που ο Φρίντριχ Ένγκελς περιγράφει ως «ιστορική ήττα» του γυναικείου φύλου.»)

γ. Λάθος (παράγραφος 8, «Βέβαια ο πιο αποτελεσματικός τρόπος είναι να στοχεύσει κανείς τη δομική καταπίεση ενάντια στις γυναίκες, καταρχάς με συγκεκριμένες πολιτικές και μέτρα που θα κάνουν καλύτερη τη ζωή τους.

δ. Σωστό (παράγραφος 2, «Αν, λοιπόν, η τάση αυτή δεν είναι εγγενής στον άντρα, είναι αναγκαστικά επίκτητη»

ε. Σωστό (παράγραφος 6, «Παράλληλα εκφράστηκε η άποψη… και στους χώρους εργασίας»

Β2. **α.** Ο τίτλος του Κειμένου 1 «Βία κατά των γυναικών: Ψάχνοντας τα «γιατί»!» κρίνεται αποτελεσματικός ως προς την πληροφοριακή ισχύ και την ενίσχυση του αναγνωστικού ενδιαφέροντος. Παρουσιάζει αφενός την κεντρική ιδέα του κειμένου με ακριβή και σαφή τρόπο προτάσσοντας το κύριο θέμα, τη βία κατά των γυναικών, και την αναζήτηση των αιτιών που την προκαλούν. Ελκύει, αφετέρου, την προσοχή του αναγνώστη με τη συντομία, την πληρότητα και την αμεσότητα του μηνύματος, καθώς αποδίδεται με ένα ονοματικό σύνολο και τη χρήση του θαυμαστικού που παρακινεί τον δέκτη προς ανάγνωση του κειμένου.

β. Τίτλος με συγκινησιακό σχόλιο:
«Έμφυλη βία: Ζωγραφίζοντας τον πόνο… ροζ!»

Β3. Το κείμενο 2 αποτελεί ένα πολυτροπικό είδος κειμένου που στόχο έχει να πληροφορήσει τον δέκτη για τα ποσοστά των γυναικών που υφίστανται κακοποίηση, για τη συμπεριφορά των αντρών απέναντι στις γυναίκες, για την αδυναμία των νέων νόμων για αλλαγή της κατάστασης και για τις συχνότερες αιτίες κακοποίησης. Συγκεκριμένα, συνδυάζοντας εικόνα και λόγο κεντρίζει την προσοχή μας, καθώς επιλέγονται έντονα χρώματα (το κόκκινο για ν' αποτυπωθεί σε κάθε σκίτσο η γυναίκα που υφίσταται βία και ένας πενταψήφιος αριθμός γυναικών που δολοφονήθηκαν μια συγκεκριμένη χρονιά. Μάλιστα η αναφορική λειτουργία της γλώσσας με παράθεση στατιστικών στοιχείων (87.000, μία στις δύο) ενισχύουν τον ενημερωτικό χαρακτήρα του κειμένου.

Το Κείμενο 2 σχετίζεται άμεσα με το Κείμενο 1, αφού αναφέρονται στο ίδιο ακριβώς θέμα, τη βία και την κακοποίηση του γυναικείου φύλου. Το μόνο διαφορετικό που προσθέτει το κείμενο 2 είναι οι δολοφονίες των γυναικών ως αποτέλεσμα της κακοποίησης.

Γ1. Στο ποίημα του Γ. Δουατζή στηλιτεύεται η κακοποίηση των γυναικών ως αντίποδα στο σεβασμό που το ποιητικό υποκείμενο αποδίδει στη γυναικεία φύση. Το κύριο θέμα αισθητοποιείται αρχικά μέσω των πολλαπλών αντιθέσεων στις πέντε πρώτες στροφές («κραυγή απόγνωσης – φωνή σε τραγούδια, ματωμένο στήθος – ζωογόνα ομορφιά, πληγή – Άνοιξη-ζωής πηγή, τρομαγμένα μάτια – γαλήνια θάλασσά σου, δεν είσαι εσύ – έργο κτήνους»). Χαρακτηριστική εξάλλου στο ποίημα είναι και η εναλλαγή α΄ (εγώ) και γ΄ (δεν είναι) ενικού ρηματικού προσώπου. Με το γ΄ πρόσωπο ο ποιητής αποστασιοποιείται από τα φαινόμενα κακοποίησης της γυναίκας δείχνοντας ότι ο ίδιος δεν τα εγκρίνει αντιτάσσοντας σε α΄ πρόσωπο την αξία και τη δύναμη της γυναίκας σε κάθε περίπτωση. Η χρήση α΄ προσώπου προσδίδει ζωντάνια, αμεσότητα και εμπεριέχει το στοιχείο της προσωπικής μαρτυρίας. Η αμεσότητα αυτή ενισχύεται από τη χρήση β΄ ενικού προσώπου στην έκτη και έβδομη στροφή, όπου το ποιητικό υποκείμενο απευθυνόμενο στην ίδια τη γυναίκα και αξιοποιώντας το ασύνδετο σχήμα («είσαι, θα είσαι... δύναμη κι ελπίδα») τονίζει πως είναι γι' αυτόν ένα πλάσμα ξεχωριστό και σημαντικό λόγω του πολυποίκιλου ρόλου της. Τέλος, μέσω της μεταφοράς («εγώ έμαθα να βυθίζομαι στην γαλήνια θάλασσά τους») το ποιητικό υποκείμενο δηλώνει ξεκάθαρα τον σεβασμό του απέναντι στο γυναικείο φύλο και την ηρεμία που αυτή του προσφέρει με αποτέλεσμα να μην μπορεί να την διανοηθεί πληγωμένη.

Το θέμα του ποιήματος είναι τόσο επίκαιρο αφού στη σημερινή εποχή που γίνονται συνεχείς αγώνες για την εφαρμογή των αρχών της ισοτιμίας και την κατάρρευση στερεοτύπων για τα πρότυπα φύλου ο καθένας μας οφείλει να κατακρίνει τέτοιες αποτρόπαιες πράξεις βίας κι εκμετάλλευσης του γυναικείου φύλου, να το προστατεύει και να αναγνωρίζει τους πολλαπλούς ρόλους και την αξεπέραστη αξία της γυναίκας.

Δ1.

Ενδεικτικός τίτλος: «Η αόρατη πληγή της βίας κατά των γυναικών»

Πρόλογος: Αφόρμηση από χαρακτηριστικά γεγονότα της επικαιρότητας και την Παγκόσμια Ημέρα κατά της βίας των γυναικών.

Κυρίως θέμα:

α. – Η οικονομική κρίση της τελευταίας δεκαετίας, η ανεργία, η φτώχεια

– Η ένταση, το άγχος με τα οποία βιώνουν τα μέλη των οικογενειών τη νέα οικονομική κατάσταση ως αποτέλεσμα της κρίσης οδηγεί συχνά σε πιο έντονα κι επικίνδυνα περιστατικά βίας αλλά και σε σωματική και σεξουαλική κακοποίηση καθώς και σε διάφορες μορφές παρενόχλησης σε χώρους εργασίας.

– Η εμπορευματοποίηση του σεξ και η μετατροπή των σωμάτων σε αντικείμενα, τα σεξιστικά στερεότυπα και τα ιδανικά της επιθετικής αρρενωπότητας.

– Η πορνογραφία δεν πουλιέται πια «στα κρυφά». Υπάρχει διαθέσιμη στο διαδίκτυο. Οι νέοι μεγαλώνουν με αυτές τις εικόνες ως τον πιο συνηθισμένο τρόπο να μάθουν για το σεξ, ενώ δυστυχώς εξακολουθεί να υπάρχει ελάχιστη σεξουαλική εκπαίδευση ή ανοιχτή συζήτηση για τη σεξουαλική διαπαιδαγώγηση στα σχολεία.

-ευθύνη της οικογένειας: τα περιστατικά ενδοοικογενειακής βίας δημιουργούν λανθασμένα πρότυπα στα παιδιά, όπως και η αναπαραγωγή στρεοτύπων συμπεριφοράς.

β. – Χρειάζεται να υπάρξει προσαρμογή της υπάρχουσας νομοθεσίας με συγκεκριμένες πολιτικές και μέτρα που θα κάνουν καλύτερη τη ζωή των γυναικών, όπως η ουσιαστική προστασία της μητρότητας, ίσες αμοιβές, αυξήσεις στους μισθούς, μείωση του ωραρίου, καλύτερες συνθήκες εργασίας.
– Πρέπει να διατεθούν πόροι για την επέκταση και τη λειτουργία περισσότερων συμβουλευτικών κέντρων και ξενώνων, καθώς και ειδικών μονάδων για περίθαλψη και προσωρινή παραμονή γυναικών που πέφτουν θύματα κακοποίησης.

– Οι κακοποιημένες γυναίκες πρέπει να αποκαλύπτουν το πρόβλημά τους. Η σιωπή που οφείλεται στον φόβο διαιωνίζει το πρόβλημα.

– Είναι απαραίτητη η σύσταση ειδικών μονάδων της αστυνομίας, στελεχωμένες με ψυχολόγους και κοινωνικούς λειτουργούς, που θα επεμβαίνουν άμεσα σε περιπτώσεις ενδοοικογενειακής βίας. Παράλληλα, και οι δράστες των επιθέσεων είναι απαραίτητο να παρακολουθούν ειδικά θεραπευτικά προγράμματα, γιατί και οι ίδιοι είναι ασθενείς.

– Καθοριστικός είναι ο ρόλος του σχολείου και της οικογένειας για τον περιορισμό και την αντιμετώπιση αυτού του νοσηρού φαινομένου. Η παροχή ολοκληρωμένης παιδείας και η ανάπτυξη κριτικής σκέψης είναι απαραίτητα εφόδια για την εξάλειψη στερεότυπων αντιλήψεων. Στα σχολεία θα μπορούσε να εισαχθεί και ειδικό μάθημα για την ισότητα και τις σχέσεις των δυο φύλων. Οι εκπαιδευτικοί και οι γονείς θα πρέπει να αποτελούν με τη στάση και τη συμπεριφορά τους υγιή πρότυπα για τα παιδιά και τους εφήβους.

Επίλογος: Τονίζεται η σημασία του προβλήματος και η ανάγκη για ενημέρωση της κοινής γνώμης αλλά και ενδυνάμωση των μέσων αντιμετώπισης.

Επιμέλεια: Φλέγκας Κωνσταντίνος