ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 186

Α2. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α3. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4.

α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$

Στο $x_0=1$ εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ η f παρουσιάζει ακρότατο άρα από Θ. Fermat.

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2\alpha+9=0 \Leftrightarrow 2\alpha=-12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-6}$

Β2.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3\left(x^2-4x+3\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_2=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

$A_1=(0,1]$ $f(A_1)=\left[\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right)=(-3,1]$

$0\in f(A_1)$ με $f\nearrow$ $(0,1]$ οπότε υπάρχει $x_1\in A_1: f(x_1)=0$ μοναδικό λόγω μονοτονίας.

$A_2=[1,3]$ $f(A_2)=[f(3),f(1)]=[-3,1]$

$0\in f(A_2)$ με $f\searrow$ $[1,3]$ οπότε $x_2\in A_2: f(x_2)=0$ μοναδικό λόγω μονοτονίας.

$A_3=[3,+\infty)$ $f(A_3)=\left[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-3,+\infty)$

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-6x^2+9x-3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$0\in f(A_3)$ οπότε $x_3\in A_3: f(x_3)=0$ μοναδικό λόγω μονοτονίας.

Τελικά η f έχει τρεις πραγματικές θετικές ρίζες.

Β3.

$f''(x)=\left(3x^2-12x+9\right)'=6x-12=6(x-2)$

Η κυρτότητα και το σημείο καμπής της C_f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	0 ΣK	$\cup$	

Αφού $f''(x)<0$ για $x<2$, $f''(x)>0$ για $x>2$, $f''(2)=0$ και η f είναι συνεχής στο R, είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει καμπή στο σημείο Γ $(2,-1)$, καθώς $f(2)=\cdots=-1$.

Β4.

$g(x)=x+f(x),\ g'(x)=1+f'(x)$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi,f(\xi))$ είναι:

$\varepsilon_1: \psi-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow \psi=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$

Για x=0 $\psi=f'(\xi)(-\xi)+f(\xi)\Leftrightarrow y=-\xi f'(\xi)+f(\xi)$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi,g(\xi))$ είναι

$\psi-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow \psi=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$

Για x=0

$\varepsilon_2: \psi=g'(\xi)(-\xi)+g(\xi)\Leftrightarrow y=-\xi g'(\xi)+g(\xi)=-\xi(1+f'(\xi))+\xi+f(\xi)=$
$=-\xi f'(\xi)+f(\xi)$

Οπότε τέμνονται στο σημείο $\Delta(0,-\xi f'(\xi)+f(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} e^x\cdot \eta\mu x, & x<0 \\ \sqrt{x^2+x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Γ1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x\cdot \eta\mu x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Άρα f συνεχής στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\cdot \eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-} e^x\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=+\infty \quad \text{διότι} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• $\left|e^x\cdot\eta\mu x\right|\le\left|e^x\right|\Leftrightarrow-\left|e^x\right|\le e^x\cdot\eta\mu x\le\left|e^x\right|\Leftrightarrow-e^x\le e^x\cdot\eta\mu x\le e^x$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$

Από Κ.Π. και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=0$

Άρα y=0 οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\overset{x>0}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Άρα $y=x+\dfrac{1}{2}$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3.

Έστω $\varphi(x)=f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, τότε

• φ συνεχής στο $[-\pi,0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• $\varphi(-\pi)=e^{-\pi}\eta\mu(-\pi)-\left(-\pi+\dfrac{1}{2}\right)=\pi-\dfrac{1}{2}>0$

• $\varphi(0)=f(0)-\left(0+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}<0$

$\Rightarrow\varphi(-\pi)\cdot\varphi(0)<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-\pi,0)$ ώστε $\varphi(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi+\dfrac{1}{2}$

Άρα η C_f τέμνει την $\varepsilon: y=x+\dfrac{1}{2}$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (-π,0).

Γ4.

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+x},\ x\ge0$

Τότε $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$ άρα $y'(t)=\dfrac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$

$$\Leftrightarrow y'(t)=\frac{x'(t)(2x(t)+1)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}(1)$$

Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 ώστε $y'(t_0)=x'(t_0)>0$ για $t\geq 0$

$$(1)\overset{t=t_0}{\Rightarrow} y'(t_0)=\frac{x'(t_0)(2x(t_0)+1)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\Leftrightarrow 1=\frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2x(t_0)+1\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=x(t_0)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2(t_0)+x(t_0)=x^2(t_0)+x(t_0)+\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0=\frac{1}{4}$$ Αδύνατη

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε $y'(t_0)=x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $x\cdot f(x)-2F(x)\cdot lnx \quad (1)$ για κάθε $x>0$.

Είναι $x^{lnx}=(e^{lnx})^{lnx}=e^{ln^2x}$.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\frac{F'(x)\cdot x^{lnx}-F(x)\cdot(x^{lnx})'}{(x^{lnx})^2}=$

$=\frac{f(x)\cdot x^{lnx}-F(x)\cdot x^{lnx}\cdot\frac{2lnx}{x}}{(x^{lnx})^2}=\frac{x^{lnx}\cdot[f(x)-F(x)\cdot\frac{2lnx}{x}]}{(x^{lnx})^2}=\frac{x\cdot f(x)-2F(x)\cdot lnx}{x^{lnx}\cdot x}\overset{(1)}{=}0$, άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει $c\in R$, ώστε $g(x)=c$.

Δ2. i) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{lnx}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{lnx}=k$.

Για $x=1 \quad (1)\Rightarrow 1\cdot f(1)-2F(1)\cdot ln1\Leftrightarrow f(1)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$, αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{lnx}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1$, οπότε $k=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{lnx}=2\cdot 1=2$.

ii) $(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{lnx} = \frac{2F(x)}{x}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2F(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{lnx} = 2$, (2) οπότε, αφού F συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύει $(2) \Rightarrow \frac{2F(1)}{1} = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Είναι $g(x) = c$, οπότε $\frac{F(x)}{x^{lnx}} = c$ και για $x = 1$ προκύπτει $\frac{F(1)}{1^0} = c \Leftrightarrow c = 1$.

Επομένως, $\frac{F(x)}{x^{lnx}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{lnx}$, για κάθε $x > 0$.

Δ3.

Είναι $F'(x) = f(x) = \frac{2lnx \cdot F(x)}{x} = \frac{2lnx \cdot x^{lnx}}{x}$.

Είναι $F'(x) = 0 \underset{x>0}{=} lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $F'(x) > 0 \underset{x>0}{=} lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Όμοια $F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$F'(x)$		$-$ 0	$+$
$F(x)$		1 OE	

Αφού $F'(x) < 0$ για $0 < x < 1$, $F'(x) > 0$ για $x > 1$, $F'(1) = 0$ και η F είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 1$, το $F(1) = 1$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ και το σημείο $A(1,1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της C_F.

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ γράφεται ισοδύναμα

$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0$, η οποία έχει προφανή ρίζα $x = 1$.

Θα δείξουμε ότι δεν έχει άλλη ρίζα.

Για $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$.

Για $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x \overset{F\searrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0.$

Επομένως, η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει μοναδική ρίζα $x = 1$.

Δ4. Ισχύει $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{(\ln x)^2}$ και $F(x) \geq 1 > 0$ άρα $E = \int_1^e F(x)dx$

Ισχύει $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in R$ άρα $e^{(\ln x)^2} \geq (\ln x)^2 + 1 \Leftrightarrow F(x) \geq (\ln x)^2 + 1$

Το "=" ισχύει μόνο για x=1 άρα θα ισχύει

$$\int_1^e F(x)dx > \int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)dx \Leftrightarrow E > \int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)dx$$

Έχουμε

$$\int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)dx = \int_1^e (x)'\ln^2 x dx + \int_1^e 1dx = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2\frac{\ln x}{x}dx + \left[x\right]_1^e =$$

$$e - 2\int_1^e \ln x dx + e - 1 = 2e - 1 - 2\int_1^e (x)'\ln x dx = 2e - 1 - 2\left[x\ln x\right]_1^e + 2\int_1^e 1dx = 2e - 1 - 2e + 2\left[x\right]_1^e =$$

$$-1 + 2e - 2 = 2e - 3$$

Άρα $E > 2e - 3$

Επιμέλεια: Κατέχος Γιώργος

Καραγιάννης Κωνσταντίνος

Κουβούσης Παναγιώτης

Μακρίδης Κωνσταντίνος

Μπαμπέ Αφροδίτη

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος

Σάββας Νίκος