

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ, ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ & ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Σε όλα τα θέματα θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

1. Να διατυπώσετε την αρχή της επαλληλίας (υπέρθεσης) και να την εφαρμόσετε στη μελέτη της οριζόντιας βολής.

Απάντηση

“Όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, κάθε μία απ' αυτές εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το κινητό μετά από χρόνο t , είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα, είτε εκτελούνται διαδοχικά, σε χρόνο t κάθε μία”.

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας και της μετατόπισης, μετά από χρόνο t , γράφουμε το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων ή των μετατοπίσεων αντίστοιχα, που θα είχε το κινητό, αν εκτελούσε κάθε μία κίνηση ανεξάρτητα και επί χρόνο t .

■ Στον άξονα $x'x$: $\Sigma F_x = 0 \rightarrow$

ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

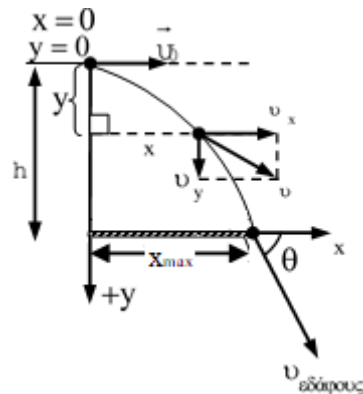
$$\begin{cases} v_x = v_0 = \text{σταθ.} \\ x = v_0 \cdot t \end{cases}$$

■ Στον άξονα $y'y$: $\Sigma F_y = mg \rightarrow$ ελεύθερη πτώση

$$\begin{cases} v_y = g \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

■ Ταχύτητα σημείου :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}, \text{ με διεύθυνση } \varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x}$$



2. Στην οριζόντια βολή σφαιριδίου από ύψος h με ταχύτητα μέτρου u_0 , αποδείξτε ότι:

α. το βεληνεκές δίνεται από τη σχέση $x_{\max} = u_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

β. η ταχύτητα με την οποία σώμα φτάνει στο έδαφος δίνεται από τη σχέση

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \text{ με διεύθυνση } \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}, \text{ όπου } \theta \text{ η γωνία της με τον ορίζοντα}$$

του τόπου.

γ. η τροχιά που διαγράφει το σφαιρίδιο είναι παραβολική.

Απάντηση

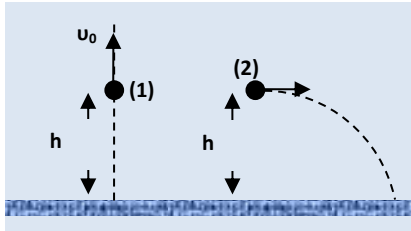
α. Χρόνος πτώσης : $y = h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Βεληνεκές : $x_{\max} = v_0 \cdot t_1 = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\beta. v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 \sqrt{\frac{2h}{g}}^2} = v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

με διεύθυνση $\epsilon\phi\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt_1}{v_0} \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$,

3. Από ύψος h ρίχνουμε σφαιρίδιο με ταχύτητα $\vec{v}_0$ και την ίδια στιγμή αφήνουμε σφαιρίδιο (2) να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος.



Να δείξετε ότι:

- α.** σε κάθε στιγμή της κίνησής τους οι θέσεις τους θα απέχουν το ίδιο από το έδαφος,
β. θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος,
γ. το σώμα (1) θα φτάσει στο έδαφος με

μεγαλύτερο μέτρο ταχύτητας από το σώμα (2).

Απάντηση

α. Το σφαιρίδιο (1) κάνει οριζόντια βολή και το σφαιρίδιο (2) ελεύθερη πτώση.

Επομένως στον άξονα $y'y$ και για τα δύο σώματα $y = \frac{1}{2}gt^2$. Επομένως στον ίδιο

χρόνο t θα έχουν διανύσει την ίδια κατακόρυφη απόσταση y και θα απέχουν και τα δύο $h - y$ από το έδαφος.

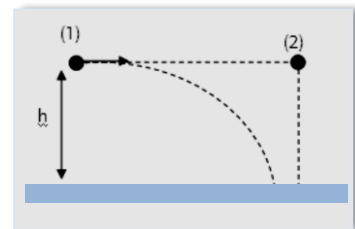
β. $y = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \Rightarrow$ (χρόνος πτώσης για

$y = h$), $t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ο ίδιος χρόνος αφού το h είναι

ίδιο.

γ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Σώμα 1: } v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt_{\pi\tau})^2} \\ \text{Σώμα 2: } v_2 = gt_{\pi\tau} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 > v_2$$



4. Από το ίδιο ύψος h βάλλουμε με ταχύτητα $\vec{v}_0$ κατακόρυφα προς τα πάνω σώμα (1) και ταυτόχρονα οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σώμα (2), της ίδιας μάζας με το σώμα 1.

A. Αν v_1 και v_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων με τις οποίες θα φτάσουν αντίστοιχα στο έδαφος τότε:

α. $v_1 > v_2$ **β.** $v_1 = v_2$ **γ.** $v_1 < v_2$

Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

B. Το έργο του βάρους από τη θέση της εκτόξευσης μέχρι να φτάσουν στο έδαφος:

- α. είναι μεγαλύτερο για το σώμα 1.
 β. είναι το ίδιο.
 γ. είναι μεγαλύτερο για το σώμα 2.
 Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

Απάντηση

A. ΑΔΜΕ:

$$K_{\alpha\rho\chi.} + U_{\alpha\rho\chi.} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

(Ως τελική θέση θεωρούμε τη θέση που φτάνουν στο ύψος του εδάφους)

Αφού έχουν το ίδιο μέτρο και το ίδιο ύψος h θα είναι: $v_1 = v_2 \rightarrow (\beta)$

B. $W_B = +mgh \rightarrow$ το ίδιο (β)

5. Ένα σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος $h = 320\text{m}$ από το έδαφος με ταχύτητα $u_0 = 60\text{m/s}$. Να βρείτε για το σώμα:
 α. τον ολικό χρόνο της κίνησής του.
 β. το βεληνεκές του.
 γ. την ταχύτητά του όταν χτυπάει στο έδαφος.
 δ. την επιτάχυνση του μέτρο και κατεύθυνση.
 ε. να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς του σώματος.
 στ. Σε ποια χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με την δυναμική ($K=U$); Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. $t_{\pi\tau\omega\sigma\eta\varsigma} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 8\text{sec}$

β. $x_{\max} = u_0 \cdot t_{\pi\tau} = 480\text{m}$

γ. $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 + (g \cdot t_{\pi\tau})^2} \stackrel{\text{SI}}{=} \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\text{m/s}$

με διεύθυνση (με τον ορίζοντα. $\epsilon\phi\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{gt_{\pi\tau}}{u_0} = \frac{4}{3}$

δ. $\alpha = g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω.

ε. $x = u_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{u_0}$

και

$$y = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{u_0^2} \stackrel{\text{SI}}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{x^2}{60^2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{720} \text{ (παραβολική τροχιά) στ.}$$

ΑΔΜΕ: $K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = 2U_{\tau\epsilon\lambda}$ (γιατί $K_{\tau\epsilon\lambda} = U_{\tau\epsilon\lambda}$) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 2mgh_1 \Leftrightarrow$$

$$v_0^2 + 2gh = 4gh_1 \Rightarrow h_1 = 250\text{m}.$$

Τότε $y = h - h_1 = 70\text{m}$ και $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{14}\text{sec}.$

6. Ένα μικρό σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος $h = 20\text{m}$ πάνω από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$. Να βρεθούν:
- ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος.
 - η οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος.
 - σε ποια χρονική στιγμή το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας θα είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της;
 - να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t = 1\text{sec}$.
 - Σε ποια χρονική στιγμή $K = 3U$;

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. $t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\text{sec}$

β. $x_{\max} = u_0 \cdot t_{\pi\tau} = 20\text{m}$

γ. Θέλουμε $u_x = u_y \Leftrightarrow u_0 = gt \Leftrightarrow t = \frac{u_0}{g} = 1\text{sec} < t_{\pi\tau}$, άρα γίνεται δεκτός

δ. $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \stackrel{(\text{από γ ερώτημα})}{=} \sqrt{2u_x^2} = u_0\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

στ. ΑΔΜΕ: $K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Leftrightarrow$

$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = 4U_{\text{τελ}}$ (γιατί $K_{\text{τελ}} = 3U_{\text{τελ}}$) $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} m u_0^2 + mgh = 8mgh_1 \Leftrightarrow$

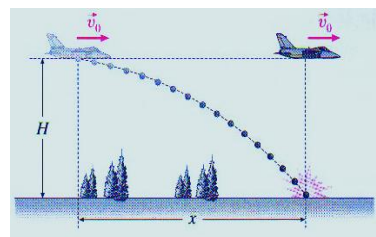
$u_0^2 + 2gh = 8gh_1 \Rightarrow h_1 = 25/4 \text{ m}.$

Τότε $y = h - h_1 = 55/4 \text{ m}$ και $y = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{11/2} \text{ sec}.$

7. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος $H = 320\text{m}$ από το έδαφος με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 100\text{m/s}$. Από το αεροπλάνο αφήνεται μια βόμβα. Να βρείτε :
- τη θέση του αεροπλάνου όταν η βόμβα χτυπήσει στο έδαφος.

β. την οριζόντια μετατόπιση της βόμβας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

γ. τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της βόμβας τη στιγμή που αφήθηκε και τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, εάν η μάζα της βόμβας είναι 5kg .



δ. σε ποιο ύψος από το έδαφος βρίσκεται η βόμβα την χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$.

ε. Να βρείτε τον λόγο K/U τη στιγμή $t_1 = 2\text{s}$. Θεωρήστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους.

στ. Εάν τη στιγμή που αφήνεται η βόμβα, σε σημείο του εδάφους που είναι στην ίδια κατακόρυφη με τη βόμβα αρχίζει ένα σώμα να κινείται με σταθερή επιτάχυνση, προς την ίδια κατεύθυνση (κατά μήκος του εδάφους), τότε βρείτε την επιτάχυνση του σώματος ώστε η βόμβα να πέσει 96m πίσω από το σώμα.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. Η βόμβα κάνει οριζόντια βολή, επομένως στον οριζόντιο άξονα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $v_x = v_0$. Το αεροπλάνο ταυτόχρονα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα v_0 . Επομένως, διανύουν την ίδια οριζόντια απόσταση x , με αποτέλεσμα όταν η βόμβα φτάσει στο έδαφος το αεροπλάνο να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη θέση (ακριβώς από πάνω), όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης.

β. $t_{\pi\tau\omega\sigma\eta\varsigma} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 8\text{sec}$, επομένως το βεληνεκές είναι $x_{\max} = v_0 \cdot t_{\pi\tau} = 800\text{m}$

γ. $\frac{dK}{dt} = \vec{\Sigma F} \cdot \vec{v}$, επειδή τη στιγμή που αφέθηκε $\vec{\Sigma F} \perp \vec{v}$ είναι $\frac{dK}{dt} = 0$ τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος $\frac{dK}{dt} = mgv_y = mggt = mg^2t = 5 \cdot 10^2 \cdot 8 = 4.000 \text{ J/s}$.

δ. Ύψος από το έδαφος: $H - y = H - \frac{1}{2}gt_{\pi\tau}^2 = 240\text{m}$

ε. Για $t = t_1$ είναι

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \sqrt{100^2 + 10^2 \cdot 2} = \sqrt{10.400} (\text{SI}).$$

Επίσης $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 20\text{m}$ και

$h_1 = h - y_1 = 320 - 20 = 300\text{m}$.

Αφού $K = \frac{1}{2}mv^2$ και $U = mgh_1$,

θα είναι $\frac{K}{U} = \frac{v^2}{2gh} = \frac{10.400}{2 \cdot 10 \cdot 300} = \frac{104}{60} = \frac{26}{15}$.

στ. Η απόσταση που θα διανύσει το σώμα θα είναι $\Delta x = x_{\max} + 96\text{m} = 896\text{m}$.

Τότε $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 896}{64} = 28\text{m/s}^2$.

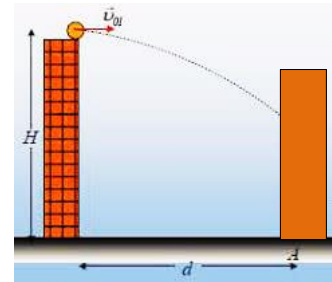
8. Ο δρόμος που χωρίζει δύο πολυκατοικίες έχει πλάτος $d = 25\text{m}$. Μια μπάλα ρίχνεται οριζόντια από την άκρη της ταράτσας με ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$.

α. Πόσο χρόνο θα κάνει η μπάλα για να φτάσει στην απέναντι πολυκατοικία;

β. Πόσο πιο χαμηλά από την ταράτσα που ρίχτηκε θα χτυπήσει η μπάλα στην απέναντι πολυκατοικία;

γ. Ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας με το οποίο η μπάλα θα συγκρουστεί με την απέναντι πολυκατοικία;

δ. Όταν το σώμα έχει διανύσει οριζόντια το $1/5$ της απόστασης d , βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Δίνεται $m = 0,2\text{kg}$. Θεωρήστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους.



Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. Όταν φτάσει στην απέναντι πολυκατοικία θα έχει οριζόντια διανύσει απόσταση

$$x = d = 25\text{m}$$

$$x = u_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{u_0} = 2,5\text{sec}$$

$$\beta. y = \frac{1}{2}gt^2 = 31,25\text{m}$$

$$\gamma. u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 + (g \cdot t)^2} \stackrel{\text{SI}}{=} \sqrt{725} = 5\sqrt{29} \text{ m/s}$$

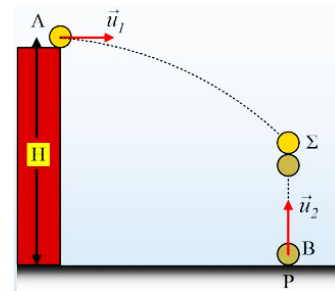
$$\delta. x = u_0 \cdot t \Leftrightarrow d/5 = u_0 \cdot t \Rightarrow t = 1/2 \text{ sec. Τότε } u_y = g \cdot t = 5\text{m/s.}$$

$$\frac{dK}{dt} = \vec{\Sigma F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot u_y = mg \cdot u_y = 10\text{J/s.}$$

$$\text{Επειδή } E = K + U = \text{σταθερή} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = - \frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = - 10\text{J/s.}$$

9. Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Κώστας κρατούν στα χέρια τους δύο μικρές μπάλες. Ο Γιάννης βρίσκεται στην ταράτσα ενός κτηρίου ύψους $H=30\text{m}$, ενώ ο Κώστας στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση d από τη βάση του κτηρίου. Κάποια στιγμή πετάνε ταυτόχρονα τις μπάλες, ο Γιάννης οριζόντια και ο Κώστας κατακόρυφα προς τα επάνω, με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα $u_0=20\text{m/s}$. Οι δύο μπάλες συγκρούονται στον αέρα. Εάν η κατακόρυφη απόσταση των θέσεων εκτόξευσης είναι 30m και η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα να βρείτε:

- τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης.
- τα μέτρα των ταχυτήτων τη στιγμή της σύγκρουσης.
- την οριζόντια απόσταση d .



- Εάν τη στιγμή της συνάντησης οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες των σωμάτων είναι K_1 και K_2 και ο λόγος τους είναι $K_1/K_2=2$, βρείτε τη σχέση των μαζών τους. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

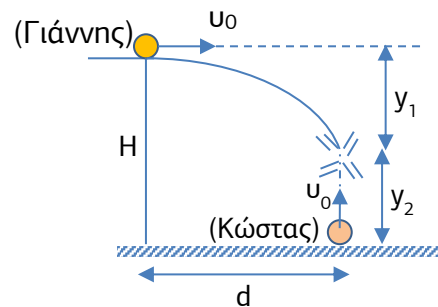
Απάντηση

- Όταν συγκρουστούν:

$$y_1 + y_2 = H \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}gt^2 + u_0t - \frac{1}{2}gt^2 = H \Leftrightarrow$$

$$u_0t = H \Leftrightarrow t = \frac{H}{u_0} = 1,5\text{sec}$$



$$\beta. u_1 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 + (g \cdot t)^2} \stackrel{\text{SI}}{=} \sqrt{625} = 25 \text{ m/s}$$

$$u_2 = u_0 - gt = 5 \text{ m/s}$$

$$\gamma. d = x = u_0 \cdot t = 30\text{m}$$

$$\delta. K_1/K_2=2 \Leftrightarrow K_1=2 \cdot K_2 \Leftrightarrow$$

$$1/2 m_1 u_1^2 = 2 \cdot 1/2 m_2 u_2^2 \Leftrightarrow$$

$$m_1 \cdot 25^2 = 2 \cdot m_2 \cdot 5^2 \Leftrightarrow m_1 \cdot 25 = 2 \cdot m_2 \Leftrightarrow m_1/m_2 = 2/25.$$

10. Να ορίσετε την ομαλή κυκλική κίνηση.

Να ορίσετε τα παρακάτω μεγέθη και να αναφέρετε τις μονάδες τους στο SI:

α. περίοδος T ,β. συχνότητα f ,γ. γραμμική ταχύτητα u ,δ. γωνιακή ταχύτητα ω ,ε. κεντρομόλος επιτάχυνση a_k ,στ. κεντρομόλος δύναμη F_k .

Ποια από τα παρακάτω μεγέθη παραμένουν σταθερά στην ομαλή κυκλική κίνηση;

Ποια από αυτά διατηρούν σταθερό το μέτρο τους;

Απάντηση

Βλέπε σχολικό βιβλίο.

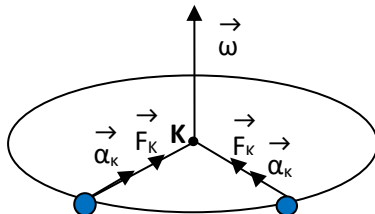
Στην ομαλή κυκλική κίνηση παραμένουν σταθερά τα μεγέθη:

α. περίοδος T ,β. συχνότητα f ,γ. γωνιακή ταχύτητα ω .Τα μεγέθη u , a_k , και F_k διατηρούν σταθερό μέτρο αλλά αλλάζει η διεύθυνσή τους.

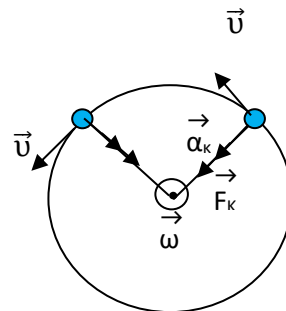
11. Σε καθεμιά από τις θέσεις (1) και (2) από τις οποίες διέρχεται το σφαιρίδιο που κινείται κυκλικά, σχεδιάστε τα μεγέθη: $\vec{\omega}$, $\vec{a}_k$, $\vec{F}_k$.

Απάντηση

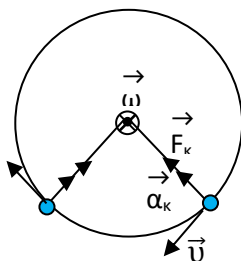
Α.



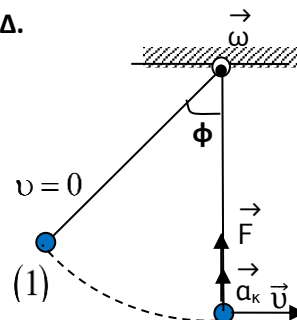
Β.



Γ.

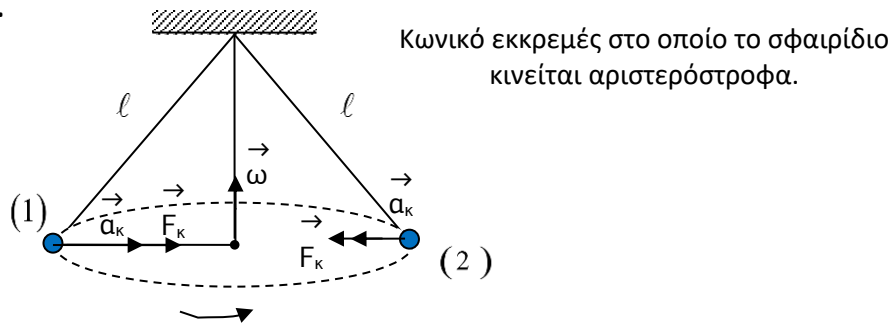


Δ.



Στη θέση (1)
 $u=0 \rightarrow a_k=0$ και
 $F_k=0$

Ε.



12. Η κεντρομόλος δύναμη:

Α. α. είναι δύναμη επαφής;

β. είναι δύναμη που δρα εξ' αποστάσεως;

γ. μπορεί να είναι επαφής, εξ' αποστάσεως ή συνδυασμός τους;

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την.

Β. Δεν παράγει έργο, γιατί;

Απάντηση

Α. Η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα που κινείται κυκλικά, πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας, με φορά προς το κέντρο της τροχιάς. Επομένως, σωστή είναι η (γ).

Β. $W_{F_K} = 0$, γιατί είναι διαρκώς κάθετη στη στοιχειώδη μετατόπιση.

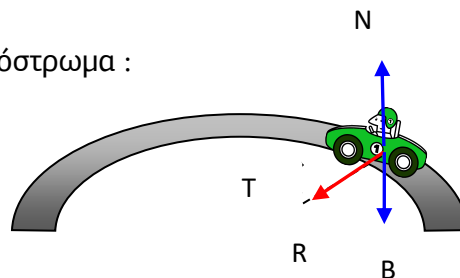
13. Πως δημιουργείται η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη κατά την κυκλική κίνηση ενός αυτοκινήτου

α. σε οριζόντιο οδόστρωμα ,

β. σε υπερυψωμένο λείο οδόστρωμα ;

Απάντηση

α. Στροφή σε οριζόντιο οδόστρωμα :



Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις :

- i) Το βάρος του $\vec{B}$
- ii) Η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και
- iii) Η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_{στ}$.

Στον κατακόρυφο άξονα το αυτοκίνητο ισορροπεί . Επομένως θα έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B = mg$$

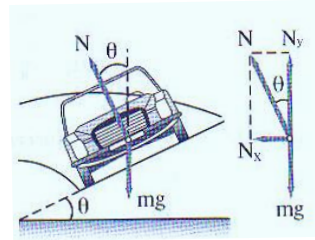
Η στατική τριβή που ασκείται μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος αποτελεί την αναγκαία κεντρομόλο δύναμη .

β. Στροφή σε λείο υπερυψωμένο οδόστρωμα :

Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις :

i) Το βάρος του $\vec{B}$

ii) Η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$



Στην περίπτωση αυτή το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης, για να εκτελέσει το αυτοκίνητο την οριζόντια στροφή, τον παίζει η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$.

14. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα αυτοκίνητο για να κινηθεί σε οριζόντια στροφή ακτίνας $R=50\text{m}$, αν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στα λάστιχα και το δρόμο είναι $\mu=0,8$. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

Στην περίπτωση αυτή όπως είδαμε και στη θεωρία, το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζει η στατική τριβή που ασκείται μεταξύ οδοστρώματος και λάστιχων του αυτοκινήτου και έχει ακτινική διεύθυνση. Άρα εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα

έχουμε :

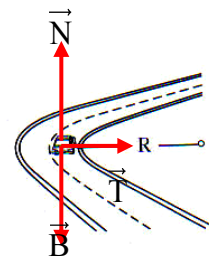
$$\Sigma F_R = ma_k \Rightarrow T = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B = mg \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1) και (2) στο νόμο της τριβής

και έχουμε :

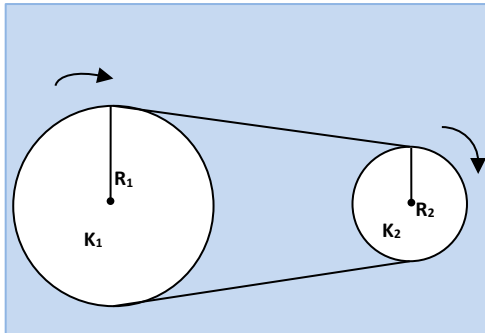
$$T = \mu N \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = \mu N = \mu mg \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\mu g R} = 20\text{m/s}$$



15. Οι τροχοί του σχήματος στρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που περνούν από τα κέντρα τους και οι περιφέρειές τους έχουν τυλιγμένο αβαρές μη εκτατό τεντωμένο νήμα που δεν ολισθαίνει σ' αυτές.

Αν $R_1 = 2R_2$ να βρείτε τους λόγους:

- α. $\frac{v_1}{v_2}$, όπου v_1 και v_2 τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σημείων των περιφερειών των δύο τροχών,
 β. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, όπου ω_1 και ω_2 τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των δύο τροχών,
 γ. $\frac{f_1}{f_2}$, όπου f_1 και f_2 οι συχνότητες περιστροφής των τροχών,



- δ. $\frac{\alpha_{\kappa_1}}{\alpha_{\kappa_2}}$, όπου α_{κ_1} και α_{κ_2} τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων των περιφερειών των δύο τροχών.
 ε. $\frac{N_1}{N_2}$, όπου N_1 και N_2 οι αριθμοί των περιστροφών που κάνουν οι δύο τροχοί στον ίδιο χρόνο.

Θεωρήστε ότι τα σημεία των περιφερειών

των τροχών κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση.

Απάντηση

- α. Εφόσον το νήμα είναι μη εκτατό όλα του τα σημεία έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Εφόσον δεν ολισθαίνει στις περιφέρειες των τροχών το μέτρο της ταχύτητας του νήματος ισούται με το μέτρο των γραμμικών ταχυτήτων στις περιφέρειες των τροχών.

$$\text{Επομένως: } v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1$$

$$\beta. \text{ Είναι } v_1 = v_2 \Leftrightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Leftrightarrow \omega_1 \cdot 2R_2 = \omega_2 R_2 \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma. \text{ Αφού } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi f_1}{2\pi f_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2}$$

$$\delta. \frac{\alpha_{\kappa_1}}{\alpha_{\kappa_2}} = \frac{\frac{v_1^2}{R_1}}{\frac{v_2^2}{R_2}} = \frac{v_1^2 \cdot R_2}{v_2^2 \cdot R_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \cdot \frac{R_2}{2R_1} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon. \text{ Αφού } \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{N_1}{\Delta t}}{\frac{N_2}{\Delta t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

16. Αν ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει διπλάσιο μήκος από τον ωροδείκτη του, τότε δείξτε ότι ο λόγος των μέτρων των κεντρομόλων επιταχύνσεων των άκρων των

αντίστοιχων δεικτών είναι: $\frac{\alpha_{\kappa_\lambda}}{\alpha_{\kappa_{\omega\rho}}} = 288$.

Απάντηση

Είναι:

$$a_k = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\frac{a_{k\lambda}}{a_{k\omega\rho}} = \frac{\omega_\lambda^2 \cdot R_\lambda}{\omega_{\omega\rho}^2 \cdot R_{\omega\rho}} = \left(\frac{\frac{2\pi}{T_\lambda}}{\frac{2\pi}{T_{\omega\rho}}} \right)^2 \cdot \frac{R_\lambda}{R_{\omega\rho}} =$$

$$\left(\frac{T_{\omega\rho}}{T_\lambda} \right)^2 \cdot \frac{R_\lambda}{R_{\omega\rho}} = \left(\frac{12h}{1h} \right)^2 \cdot \frac{2R_\lambda}{R_\lambda} =$$

$$= 144 \cdot 2 = 288$$

17. Ένα ρολόι δείχνει 12 ακριβώς. Σε πόση ώρα ο ωροδείκτης με τον λεπτοδείκτη θα σχηματίζουν γωνία 30° ;

α. $\frac{1}{11} h$

β. $\frac{1}{4} h$

γ. $\frac{1}{10} h$

Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

Απάντηση

Έστω θ_λ και $\theta_{\omega\rho}$ οι επίκεντρες γωνίες που έχουν διαγράψει ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης αντίστοιχα, σε χρόνο t .

Επειδή $\omega = \frac{\theta}{t} \Leftrightarrow \theta = \omega t$.

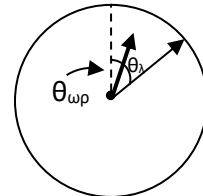
Θέλουμε: $\theta_\lambda - \theta_{\omega\rho} = \frac{\pi}{6} \quad \left(30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad} \right)$

$$\omega_\lambda \cdot t - \omega_{\omega\rho} \cdot t = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{\pi}{6 \cdot (\omega_\lambda - \omega_{\omega\rho})}, \text{ όπου } \omega_{\omega\rho} = \frac{2\pi}{T_{\omega\rho}} = \frac{2\pi}{12} \frac{\text{rad}}{h} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/h}$$

$$\omega_\lambda = \frac{2\pi}{T_\lambda} = \frac{2\pi}{1} \frac{\text{rad}}{h} = 2\pi \text{ rad/s}$$

Επομένως: $t = \frac{\pi}{6 \cdot \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{\pi}{6 \cdot \frac{11\pi}{6}} = \frac{1}{11} h \rightarrow (\alpha)$



18. Στην περιφέρεια κυκλικού δρόμου ακτίνας $R = \frac{160}{\pi} \text{ m}$ κινούνται δύο σώματα με σταθερά μέτρα γραμμικών ταχυτήτων $v_1 = 12 \text{ m/s}$ και $v_2 = 20 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Αν μετρήσουμε τον χρόνο από τη στιγμή που τα σώματα έχουν συναντηθεί, τότε θα ξανασυναντηθούν σε χρόνο:

α. 10 sec αν έχουν αντίθετες φορές κίνησης.

β. 40 sec αν έχουν την ίδια φορά κίνησης.

Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις παραπάνω προτάσεις αιτιολογώντας πλήρως τον χαρακτηρισμό τους.

Απάντηση

Εάν S_1 και S_2 είναι τα μήκη των τόξων που θα διαγράψουν τα σώματα 1 και 2 αντίστοιχα, σε χρόνο t τότε:

$$S_1 = u_1 t = 12t \text{ (SI)}$$

$$S_2 = u_2 t = 20t \text{ (SI)}$$

α. Αν έχουν αντίθετες φορές κίνησης:

$$S_1 + S_2 = 2\pi R \Leftrightarrow 32t = 2\pi \frac{160}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32t = 320 \Leftrightarrow t = 10 \text{ sec} \rightarrow \text{Σωστό}$$

β. Αν έχουν την ίδια φορά κίνησης:

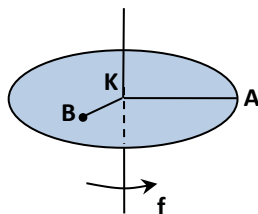
$$S_2 - S_1 = 2\pi R \Leftrightarrow 8t = 320 \Leftrightarrow t = 40 \text{ sec} \rightarrow \text{Σωστό}$$

19. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του K . Αν A είναι ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου και B ένα εσωτερικό του σημείο που απέχει από τον άξονα $\frac{R}{2}$ (δηλαδή βρίσκεται στο μέσο μιας ακτίνας), τότε για τα σημεία αυτά βρείτε τους λόγους:

α. $\frac{v_A}{v_B}$, όπου v_A και v_B είναι τα μέτρα των γραμμικών τους ταχυτήτων,

β. $\frac{a_{K_A}}{a_{K_B}}$, όπου a_{K_A} και a_{K_B} είναι τα μέτρα των κεντρομόλων τους επιταχύνσεων.

Απάντηση



Όλα τα σημεία του δίσκου, που είναι έξω από τον άξονα έχουν ακτίνες που διαγράφουν στον ίδιο χρόνο τις ίδιες επίκεντρες γωνίες,

επομένως $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, ίδια για όλα.

$$\alpha. \frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega R_A}{\omega R_B} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = 2$$

$$\beta. a_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R, \text{ επομένως } \frac{a_{\kappa_A}}{a_{\kappa_B}} = \frac{\omega^2 \cdot R_A}{\omega^2 \cdot R_B} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = 2.$$

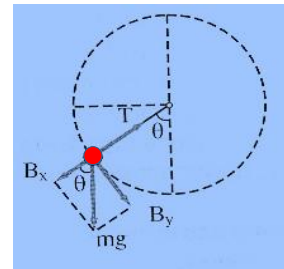
20. Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους $\ell=1\text{m}$ και κινείται σε κατακόρυφο κύκλο ακτίνας $R=\ell=1\text{m}$. Τη στιγμή που το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta=60^\circ$ με την κατακόρυφο, το νήμα έχει ταχύτητα $v=4\text{m/s}$. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος σ' αυτή τη θέση. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος του $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες:

$B_x = B \sin \theta$ στην ακτινική διεύθυνση και τη $B_y = B \cos \theta$

σε διεύθυνση κάθετη στην ακτίνα. (εφαπτομενική).

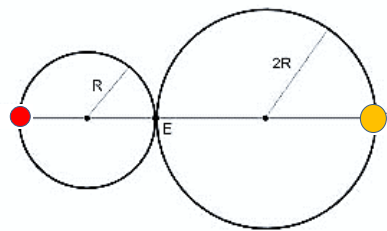


Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής σε ακτινική διεύθυνση, και έχουμε: (σαν θετική επιλέγουμε πάντα τη φορά προς το κέντρο):

$$\sum F_x = ma_{\kappa} \Rightarrow T - mg \sin(\theta) = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

$$T = m \left(g \sin(\theta) + \frac{v^2}{R} \right) = 42\text{N}.$$

21. Οι κυκλικές τροχιές δύο κινητών, τα οποία κινούνται ομαλά εφάπτονται. Οι γραμμικές ταχύτητες των κινητών είναι $v_1=9\text{cm/s}$ και $v_2=2\text{cm/s}$ και οι ακτίνες των τροχιών τους $R_1=8\text{cm}$ και $R_2=4\text{cm}$ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των κινητών.



Απάντηση

Προφανώς η συνάντηση των σωμάτων θα γίνει στη θέση του σημείου τομής των δύο κυκλικών τροχιών. Σε δύο διαδοχικές συναντήσεις θα έχει το κάθε σώμα διανύσει τόξο που θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του κάθε κύκλου.

Έστω ότι το σώμα (1) θα έχει κάνει N_1 πλήρεις στροφές, τότε το διανυθέν τόξο θα είναι $S_1 = N_1 2\pi R_1$

Στον ίδιο χρόνο το σώμα (2) θα έχει κάνει N_2 πλήρεις στροφές, τότε το διανυθέν τόξο θα είναι $S_2 = N_2 2\pi R_2$. Άρα

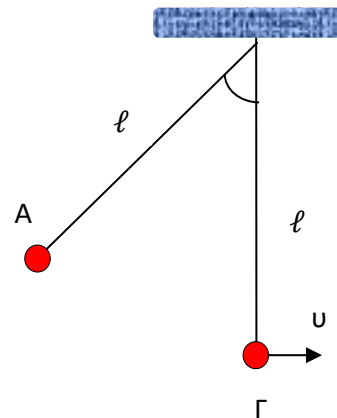
$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{S_1}{t} = \frac{N_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1}{t} \\ v_2 &= \frac{S_2}{t} = \frac{N_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2}{t} \end{aligned} \right\} \text{διαίρωντας κατά μέλη:}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1 \cdot R_1}{N_2 \cdot R_2} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{N_1 \cdot 8}{N_2 \cdot 4} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{9}{4}$$

Επειδή N_1 και N_2 ακέραιοι αριθμοί, για την 1^η συνάντηση $N_1=9$ (και $N_2=4$)

$$\text{Τότε } v_1 = \frac{N_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1}{t} \Rightarrow t = \frac{N_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1}{v_1} = \frac{9 \cdot 2\pi \cdot 8}{9} = 16\pi \text{ sec}$$

22. Σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων που είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς και μη ℓ εκτατού νήματος αφήνεται από την θέση Α, όπου το τεντωμένο νήμα σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο. Εάν το μήκος του νήματος είναι $\ell=10\text{m}$ τότε να βρείτε:



α. Το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου u_1 , την στιγμή που διέρχεται από την θέση Γ, όπου το νήμα είναι κατακόρυφο.

β. Αν την στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση Γ κόψουμε το νήμα, βρείτε την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει πλέον το σφαιρίδιο μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

γ. Βρείτε την τάση του νήματος στις θέσεις Α και Γ εάν $m=1\text{kg}$.

Θεωρήστε ότι στη θέση Γ το σφαιρίδιο απέχει από το έδαφος $H=3,2\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

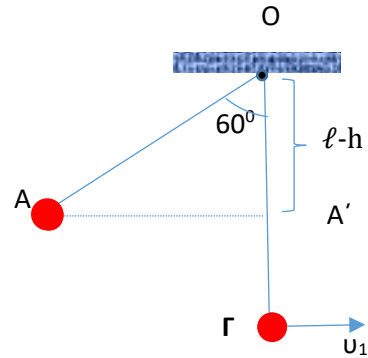
Απάντηση

α. Στο τρίγωνο OAA' :

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{OA'}{l} \Rightarrow OA' = l \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Rightarrow$$

$$OA' = 10_m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow OA' = 5m$$

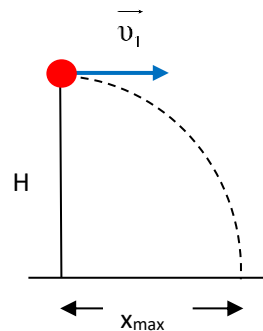
$$\text{Επομένως } h = l - OA' = 5m$$



Α.Δ.Μ.Ε. :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$(\text{θεωρούμε } U_\Gamma = 0) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_1 = 10m/s$$



β. Είναι

$$H = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}} = \sqrt{0,64} = 0,8s$$

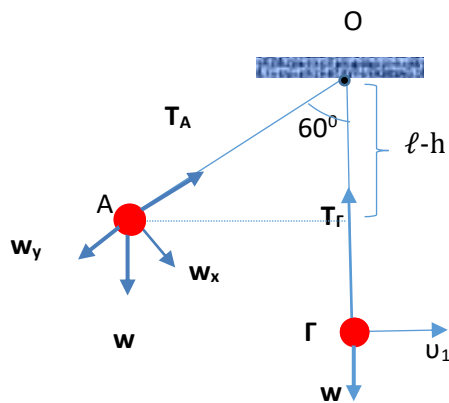
$$\text{Επομένως } x_{\max} = v_1 t \Rightarrow x_{\max} = 8m.$$

Σώμα μάζας 2kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα 10m/s.

γ. Στην θέση Γ είναι $w_y = w \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = mg/2 = 5N$.

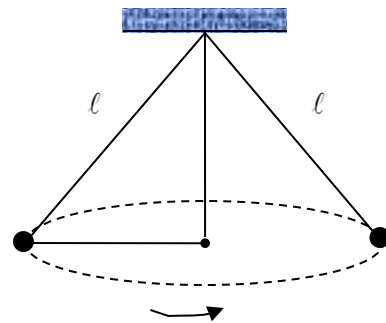
$$\text{Στην θέση Α } \Sigma F_{(R)} = F_K \Rightarrow$$

$$T_A - w_y = m \cdot v_0^2 / l \quad (\text{με } v_0 = 0) \Rightarrow T_A = w_y \Rightarrow T_A = w_y = 5N.$$



Στην θέση Γ που το νήμα είναι κατακόρυφο $\Sigma F_{(R)} = F_k \Rightarrow$
 $T_{\Gamma} - w = m \cdot u_1^2 / \ell \Rightarrow$
 $T_{\Gamma} = m \cdot u_1^2 / \ell + w \Rightarrow T_{\Gamma} = 20 \text{ N}.$

23. Κωνικό εκκρεμές είναι ένα σύστημα που αποτελείται από μια μικρή σφαίρα που είναι δεμένη στην άκρη νήματος, του οποίου η άλλη είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο και η σφαίρα διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά με σταθερή γωνία από την κατακόρυφο. Το νήμα του εκκρεμούς έχει μήκος $\ell = 5 \text{ m}$. Η σφαίρα του εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο κύκλο, με σταθερή γωνία $\theta = 60^\circ$ με την κατακόρυφο. Υπολογίστε την περίοδο του κωνικού εκκρεμούς.



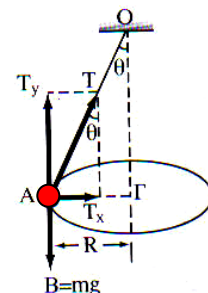
Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος του $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος .
 Αναλύουμε την τάση σε δύο συνιστώσες :

$T_x = T \sin \theta$ στην ακτινική διεύθυνση και τη $T_y = T \cos \theta$. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στη διεύθυνση της ακτίνας και τη συνθήκη ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση :

$$\Sigma F_R = m a_k \Rightarrow T_x = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T \cos \theta = mg \quad (2)$$



Διαιρούμε τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε :

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = m \frac{v^2}{Rmg} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{v^2}{Rg} .$$

Αντικαθιστώντας και τη σχέση :

$$T = \frac{2\pi R}{T} \text{ έχουμε } \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{4\pi R^2}{T^2 g} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R\sigma\upsilon\nu\theta}{g\eta\mu\theta}}.$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι : $R = \ell \cdot \eta\mu\theta$ και αντικαθιστώντας έχουμε :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{g}} = \pi \text{ sec.}$$

24.α. Τι ονομάζουμε σύστημα σωμάτων; Ποιες δυνάμεις λέγονται εσωτερικές και ποιες εξωτερικές για το σύστημα; Δώστε από ένα παράδειγμα.

β. Πότε το σύστημα λέγεται μονωμένο;

Απάντηση

Βλέπε σχολικό βιβλίο.

25. Να ορίσετε την ορμή ενός σώματος και την ορμή ενός συστήματος σωμάτων. Να αναφέρετε την μονάδα μέτρησης της ορμής στο S.I.

Απάντηση

Βλέπε σχολικό βιβλίο.

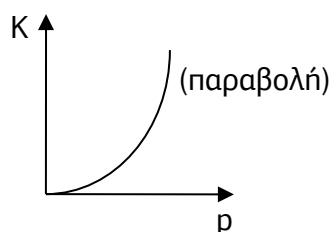
26.α. Δείξτε ότι το μέτρο της ορμής ενός σώματος και η κινητική του ενέργεια συνδέονται με τη σχέση $K = \frac{p^2}{2m}$.

β. Να παραστήσετε γραφικά την κινητική ενέργεια ενός σώματος σε συνάρτηση με το μέτρο της ορμής του.

Απάντηση

α. Είναι: $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} = \frac{p^2}{2m}$

β.



27.α. Αν ένα σύστημα σωμάτων δεν έχει ορμή τότε μπορεί να έχει κινητική ενέργεια;

β. Αν ένα σώμα δεν έχει ορμή τότε μπορεί να έχει κινητική ενέργεια; Αιτιολογήστε.

Απάντηση

α. Ναι γιατί $P_{ολ}=0$ μπορούμε να έχουμε και όταν δύο σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσα μέτρα ορμών (αντίθετες ορμές) τότε όμως το σύστημά τους έχει κινητική ενέργεια.

β. Αν για ένα σώμα $p = 0 \Leftrightarrow mv = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow K = 0$.
Επομένως, όχι δεν μπορεί.

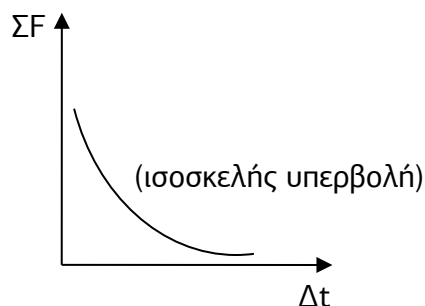
28.α. Δείξτε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του, δηλαδή $\vec{\Sigma F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ (γενικευμένη διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα).

β. Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβολή της ορμής ενός σώματος δεν αλλάζει τότε να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της (μέσης) συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα, σε συνάρτηση με το χρονικό διάστημα Δt αυτής της μεταβολής.

Απάντηση

α. $\vec{\Sigma F} = m \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \Delta(m \vec{v}) / \Delta t = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

β.



29.α. Διατυπώστε την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) και αποδείξτε την.

β. « Η ορμή στις κρούσεις σωμάτων διατηρείται, όπως και στις εκρήξεις-γρήγορες διασπάσεις ». Ατιολογήστε την πρόταση αυτή.

Απάντηση

α. «Αν ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο, δηλαδή, αν:

$$\Sigma F_{\text{εξωτερικών}} = 0, \text{ τότε η ορμή του διατηρείται.}$$

Απόδειξη: $\vec{\Sigma F} = \Delta \vec{p} / \Delta t \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{\Sigma F} \cdot \Delta t \quad (1)$

Αν $\Sigma F_{\text{εξωτερικών}} = 0$ τότε: $\Sigma F = \Sigma F_{\text{εξ}} + \Sigma F_{\text{εσωτ.}} = 0$ από την (1) $\Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \text{σταθερή}$.

β. Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο ($\Delta t \rightarrow 0$) όπως και η έκρηξη-γρήγορη διάσπαση, οι ωθήσεις $\vec{\Sigma F} \cdot \Delta t$ των εξωτερικών δυνάμεων, αν υπάρχουν, είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης, δηλαδή $\vec{\Sigma F} \cdot \Delta t \rightarrow 0$. Το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, για τη χρονική διάρκεια της κρούσης, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται, (από τη σχέση 1, $\Delta \vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \text{σταθερή}$).

Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά τη διάρκεια της κρούσης, διατηρείται.

30. Να ορίσετε το φαινόμενο της κρούσης. Υπάρχουν κρούσεις στις οποίες τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους. Δώστε ένα παράδειγμα.

Απάντηση

Κρούση ονομάζουμε κάθε φαινόμενο κατά το οποίο «τα συγκρουόμενα» σωματίδια, αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για μικρό χρονικό διάστημα. Στις κρούσεις τα σώματα δεν έρχονται πάντοτε σε επαφή. Για παράδειγμα, στον μικρόκοσμο συναντάμε κρούσεις όπου τα σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή, όπως δύο πρωτόνια, που το ένα κινείται προς το άλλο, πλησιάζοντας αλλάζει απότομα η κινητική τους κατάσταση (το φαινόμενο αυτό λέγεται σκέδαση).

31. Να ορίσετε:

- α. τις ελαστικές κρούσεις,
- β. τις ανελαστικές κρούσεις,
- γ. τις πλαστικές κρούσεις σωμάτων.

Απάντηση

α. **Ελαστική** είναι η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων. Στις ελαστικές κρούσεις διατηρείται η μηχανική ενέργεια, αλλά επειδή είναι φαινόμενο πολύ μικρής χρονικής διάρκειας, δεν μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του συστήματος με συνέπεια να διατηρείται η κινητική του ενέργεια.

β. **Ανελαστική** είναι η κρούση στην οποία ένα τουλάχιστον μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.

γ. **Πλαστική** είναι η ανελαστική κρούση που οδηγεί στη δημιουργία συσσωματώματος.

32. Στις εκρήξεις τί παθαίνει η κινητική ενέργεια του συστήματος και τί η ορμή του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση

Αυξάνεται η κινητική του ενέργεια. Ένα μέρος της εγκλωβισμένης ενέργειας του συστήματος (χημική ενέργεια στα εκρηκτικά), απελευθερώνεται με αποτέλεσμα την αύξηση της κινητικής ενέργειας. Η ορμή του παραμένει σταθερή γιατί $\Delta t \rightarrow 0$ (χρονικό διάστημα της έκρηξης), επομένως: $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{σταθερή}$.

33. Να ορίσετε τις:

- α. κεντρικές ή μετωπικές κρούσεις,
- β. έκκεντρες κρούσεις,
- γ. πλάγιες κρούσεις.

Απάντηση

α. Κεντρική (ή μετωπική) ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται (πριν και μετά την κρούση), βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, (η οποία περνά από τα κέντρα μάζας των σωμάτων).

β. Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των συγκρουόμενων σωμάτων, πριν την κρούση, έχουν παράλληλες διευθύνσεις.

γ. Πλάγια ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των συγκρουόμενων σωμάτων είναι τυχαίες.

34. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε τον χαρακτηρισμό:

α) Σε όλες τις κρούσεις η ενέργεια διατηρείται.	Σ	Λ
β) Σε κρούσεις δύο σφαιριδίων $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$	Σ	Λ
γ) Σε όλες τις κρούσεις $\Delta K_1 = -\Delta K_2$, όπου ΔK_1 και ΔK_2 , οι αντίστοιχες μεταβολές των κινητικών ενεργειών των σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης.	Σ	Λ
δ) Σε κρούση σφαιριδίου με ακλόνητη επιφάνεια ισχύει η Α.Δ.Ο.	Σ	Λ
ε) Αν δύο σφαιρίδια συγκρουστούν κεντρικά και πλαστικά και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιηθεί, τότε πριν την κρούση είχαν αντίθετες ταχύτητες.	Σ	Λ

Απάντηση – Αιτιολόγηση

α. Σωστό (ΑΔΕ).

β. Σωστό ($\Sigma \vec{F}_1 = -\Sigma \vec{F}_2 \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 / \Delta t = -\Delta \vec{p}_2 / \Delta t \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$).

γ. Λάθος

(μόνο στις ελαστικές, όπου: $K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2$ ή

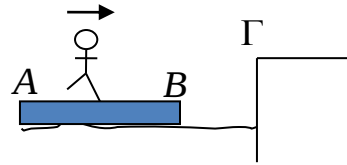
$$K_1 - K'_1 = K'_2 - K_2 \Rightarrow -\Delta K_1 = \Delta K_2,$$

δ. Λάθος

(Για παράδειγμα ακόμα και αν το μέτρο της ταχύτητας διατηρηθεί, ελαστική κρούση, αλλάζει η κατεύθυνσή της).

ε. Λάθος (είχαν αντίθετες ορμές ώστε $p_{\text{συστήματος}} = 0$. Μόνο αν είχαν ίσες μάζες θα ήταν και οι ταχύτητές τους αντίθετες).

35. Στο άκρο Α ομογενούς σανίδας ΑΒ μήκους $\ell = (AB) = 6\text{m}$ και μάζας $M = 120\text{kg}$, η οποία επιπλέει στην επιφάνεια νερού που ηρεμεί, στέκεται άνθρωπος βάρους $m_a = 60\text{kg}$. Το άκρο Α απέχει από την αποβάθρα Γ 8m , ενώ το άλλο άκρο Β της σανίδας απέχει από την αποβάθρα 2m . Αν ο άνθρωπος βαδίζει πάνω στη σανίδα με σταθερή ταχύτητα, μέχρι να φτάσει στο άκρο Β, πόσο θα απέχει τελικά αυτός από την αποβάθρα;



Απάντηση

Το σύστημα σανίδα-άνθρωπος είναι μονωμένο αφού $\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$, επομένως ισχύει η Α.Δ.Ο. :

$$\vec{P}_{\text{συστ, πριν}} = \vec{P}_{\text{συστ, μετά}} \Rightarrow 0 = m_a v_a - MV \Rightarrow V = \frac{m_a}{M} v_a = \frac{1}{2} v_a.$$

Έστω ότι σε χρόνο Δt το άκρο Α έχει μετακινηθεί κατά x προς τα αριστερά, τότε στον ίδιο χρόνο ο άνθρωπος θα έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $\ell - x$.

Επειδή ℓ

$$V = \frac{1}{2} v_a \Rightarrow \frac{x}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\ell - x}{\Delta t} \Rightarrow 2x = \ell - x \Rightarrow x = \frac{\ell}{3} = 2\text{m}.$$

Το άκρο Β επομένως μετακινήθηκε κατά 2m προς τα αριστερά και απέχει από την αποβάθρα $2\text{m} + 2\text{m} = 4\text{m}$.

36. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος (θεωρήστε λεία τα δάπεδα..

Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε περισσότερη θερμότητα;

α. $\begin{array}{cc} v_1 = 10\text{m/s} & v_2 = 0 \\ \text{●} \rightarrow & \text{●} \\ m_1 = 1\text{kg} & m_2 = 4\text{kg} \end{array}$

β. $\begin{array}{cc} v_1 = 10\text{m/s} & v_2 = 5\text{m/s} \\ \text{●} \rightarrow & \text{●} \rightarrow \\ m_1 = 1\text{kg} & m_2 = 4\text{kg} \end{array}$

γ. $\begin{array}{cc} v_1 = 10\text{m/s} & v_2 = 5\text{m/s} \\ \text{●} \rightarrow & \text{●} \leftarrow \\ m_1 = 1\text{kg} & m_2 = 4\text{kg} \end{array}$

Απάντηση

α. ΑΔΟ: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2\text{m/s}$

$$Q_{\text{κρούσης}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 40 J$$

$$\beta. \text{ ΑΔΟ: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 6 m/s$$

$$Q_{\text{κρούσης}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 10 J$$

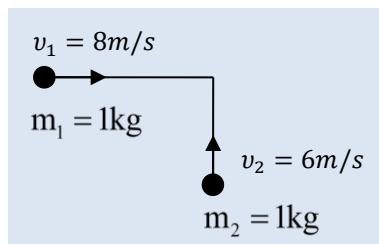
$$\gamma. \text{ ΑΔΟ: } m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 2 m/s$$

$$Q_{\text{κρούσης}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 90 J$$

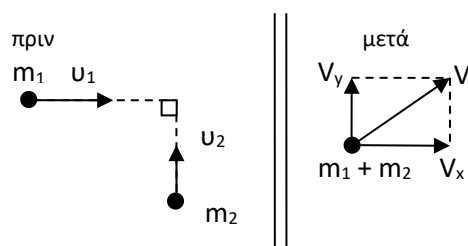
Περισσότερη θερμότητα έχουμε στην (γ).

37. Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις δύο σφαιρίδια με τις ταχύτητες που φαίνονται στο σχήμα.

Αν η κρούση είναι πλαστική να δείξετε ότι η θερμότητα που εκλύεται είναι: $Q = 25 J$.



Απάντηση



$$\text{ΑΔΟ στο } x'x \text{ άξονα: } m_1 u_1 + 0 = (m_1 + m_2) V_x \Rightarrow V_x = 4 m/s$$

$$\text{ΑΔΟ στο } y'y \text{ άξονα: } 0 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) V_y \Rightarrow V_y = 3 m/s$$

$$\text{Επομένως: } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 5 m/s$$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 25 J$$

38. Σφαιρίδιο συγκρούεται κάθετα με ακλόνητη επιφάνεια και ανακλάται με το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Τότε το μέτρο μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου είναι:

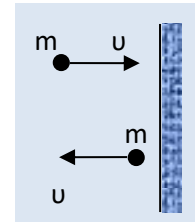
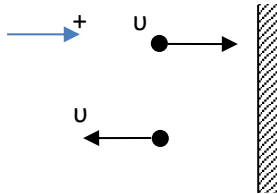
α. mu

β. $2mu$

γ. μηδέν

Ποια από τις παραπάνω επιλογές ισχύει για την μεταβολή του μέτρου της ορμής; Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

Απάντηση



Αλγεβρικά: $\Delta p = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} = -mu - mu = -2mu$, οπότε $|\Delta p| = 2mu \rightarrow$ σωστή η επιλογή (β).

Για την μεταβολή του μέτρου της ορμής ισχύει η επιλογή (γ)

γιατί $|\Delta p| = |p_{\text{τελ}}| - |p_{\text{αρχ}}| = mu - mu = 0$.

39. Από ύψος $h=20\text{m}$ αφήνουμε ένα σώμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ να πέσει ελεύθερα. Αν κατά τη πρόσκρουση με το έδαφος το σώμα χάσει το 75% της κινητικής ενέργειας που είχε μόλις πριν έρθει σε επαφή με το έδαφος, βρείτε:

α. το μέτρο της ταχύτητας v_2 που έχει αμέσως μετά την πρόσκρουση,

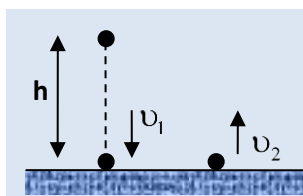
β. τη μέση δύναμη που δέχτηκε από το έδαφος αν ο χρόνος της πρόσκρουσης είναι $0,01\text{sec}$,

γ. το ύψος h' στο οποίο θα φτάσει μετά την πρώτη αναπήδηση και το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. ΑΔΜΕ:



$$K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow$$

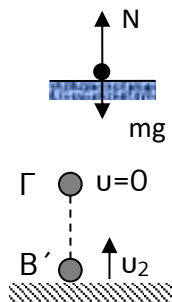
$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 20\text{m/s}.$$

Αφού το σώμα κατά την πρόσκρουση στο έδαφος χάνει το 75%, του απομένει το 25%.

$$\text{Δηλαδή: } K_2 = \frac{25}{100}K_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = 10\text{m/s}.$$

$$\beta. \Sigma F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_2 - P_1}{\Delta t} = \frac{-mv_2 - (+mv_1)}{\Delta t} = -\frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t} = -300N.$$

$$\text{Κατά μέτρο: } |\Sigma F| = N - mg \Rightarrow 300N = N - 1N \Rightarrow N = 301N.$$



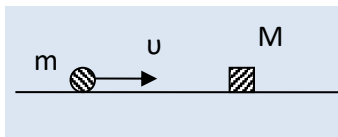
$$\gamma. \text{ ΑΔΜΕ: } K'_B + U'_B = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h' = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h' = 5m.$$

Επειδή επιβραδύνεται:

$$v = v_2 - gt \xrightarrow{v \rightarrow 0} t_{\text{ανόδου}} = \frac{v_2}{g} = 1s.$$

40. Σφαιρίδιο μάζας $m=1\text{kg}$ κινούμενο οριζόντια συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $v=20\text{m/s}$ με αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $M=4\text{kg}$.



Αν η κρούση είναι πλαστική βρείτε:

α. το % της κινητικής ενέργειας που χάθηκε κατά την κρούση.

β. το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που το σφαιρίδιο μεταβίβασε στο σώμα M κατά την κρούση,

γ. αν η διάρκεια της κρούσης είναι $0,1\text{sec}$ βρείτε τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στο κάθε σώμα κατά την κρούση,

δ. αν το συσσωμάτωμα εμφανίζει τριβή με το δάπεδο με συντελεστή $\mu=0,2$ βρείτε την απόσταση που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.

ε. βρείτε το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το συσσωμάτωμα να σταματήσει.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

$$\alpha. \text{ ΑΔΟ: } mv = (m+M)V \Rightarrow V = 4\text{m/s}$$

$$E_{\text{απολειπόν}} = Q = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = 160\text{J}$$

$$\frac{E_{\text{απολειπόν}}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{160\text{J}}{200\text{J}} = 0,8 = 80\%$$

$$\beta. \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{4 \cdot 4^2}{1 \cdot 20^2} = \frac{4}{25}$$

$$\gamma. F_{(\sigma\tau o\ m)} = \frac{\Delta P_{(m)}}{\Delta t} = \frac{mV - mv}{\Delta t} = m \frac{(V - v)}{\Delta t} = -160\text{N}$$

$$F_{(\sigma\tau o\ M)} = \frac{\Delta P_{(M)}}{\Delta t} = \frac{mV - 0}{\Delta t} = +160\text{N}$$

Οι δύο δυνάμεις είναι δράση -αντίδραση.

$$\delta. \Theta\text{ΜΚΕ} : K_{\tau\epsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = \Sigma W \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = W_w + W_N + W_T$$

$$-\frac{1}{2}(m+M)V^2 = -\mu(m+M)g \cdot x$$

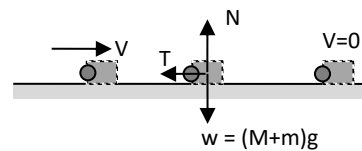
$$x = \frac{V^2}{2\mu g} = 4\text{m}$$

$$\epsilon. \Sigma F = (m+M)\alpha \Leftrightarrow T = (m+M)\alpha \Leftrightarrow$$

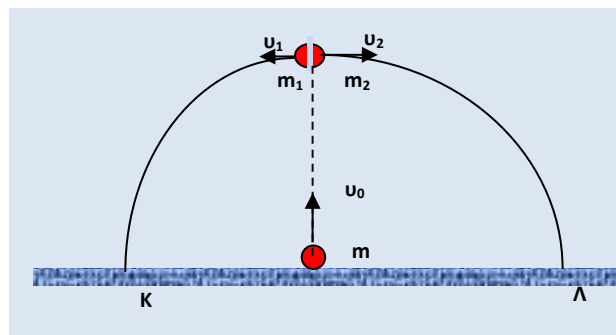
$$\mu(m+M)g = (m+M)\alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \mu g = 2\text{m/s}^2 \text{ είναι η επιβράδυνση.}$$

$$\text{Είναι: } V = V_0 - \alpha t \Rightarrow t = \frac{V_0}{\alpha} = 2\text{s}.$$



41. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 40\text{m/s}$. Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος διασπάται σε δύο κομμάτια. Το ένα έχει μάζα $m_1 = \frac{3m}{4}$ και αποκτά οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20\text{m/s}$.



α. Αποδείξτε ότι το δεύτερο κομμάτι θα κινηθεί σε κατεύθυνση αντίθετη της $\vec{v}_1$.

β. Αν Κ και Λ είναι οι θέσεις που τα δύο κομμάτια φτάνουν στο έδαφος, βρείτε την απόσταση ΚΛ.

γ. βρείτε τον χρόνο που απαιτείται ώστε από τη στιγμή της εκτόξευσης να θραύσματα να φτάσουν στο έδαφος.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

α. Στη θέση του ανώτατου ύψους το σώμα στιγμιαία ακινητοποιείται.

$$\text{Από ΑΔΟ: } \vec{P}_{\text{συστ,πριν}} = \vec{P}_{\text{συστ,μετά}} \Rightarrow 0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow \vec{P}_2 = -\vec{P}_1 \Rightarrow$$

$$m_2 \vec{v}_2 = -m_1 \vec{v}_1$$

Επομένως: $\vec{v}_2 \nearrow \vec{v}_1$

β. Για τα μέτρα:

$$m_2 v_2 = m_1 v_1 \Leftrightarrow \frac{m}{4} v_2 = \frac{3m}{4} \cdot 20 \frac{m}{s} \Leftrightarrow v_2 = 60 \frac{m}{s}$$

Τα δύο κομμάτια θα κάνουν οριζόντια βολή. Ο χρόνος πτώσης στο έδαφος για

το καθένα θα είναι: $t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$ όπου το μέγιστο ύψος μπορεί να βρεθεί από την

ΑΔΜΕ για την ανύψωση του σώματος:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\tau\epsilon\lambda} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + m g h_{\max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 80m$$

$$\text{Επομένως: } t_{\pi\tau\acute{o}\sigma\eta\varsigma} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} s = 4s$$

Το βεληνεκές για το καθένα θα είναι:

$$x_{1\max} = v_1 \cdot t_{\pi\tau} = 80m$$

$$x_{2\max} = v_2 \cdot t_{\pi\tau} = 240m$$

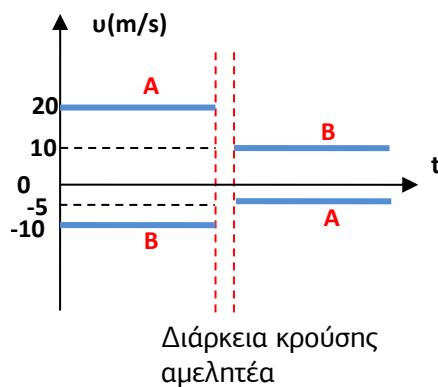
$$\text{Τελικά: } (ΚΛ) = x_{1\max} + x_{2\max} = 320m$$

γ. Η άνοδος του σώματος είναι κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με

$$\alpha = g, \text{ επομένως } v = v_0 - gt \Rightarrow t_{\alpha\nu\acute{o}\delta\omicron\upsilon} = \frac{v_0}{g} = 4s$$

$$\text{Επομένως: } t_{o\lambda} = t_{\alpha\nu\acute{o}\delta\omicron\upsilon} + t_{\pi\tau\acute{o}\sigma\eta\varsigma} = 8s.$$

42. Δύο σώματα Α και Β με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα συγκρούονται κεντρικά. Οι ταχύτητές τους πριν και μετά την κρούση, σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Ο λόγος των μαζών m_A και m_B είναι:



- α. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{5}{4}$ β. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$
 γ. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{4}{5}$ δ. $\frac{m_A}{m_B} = 2$
 Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

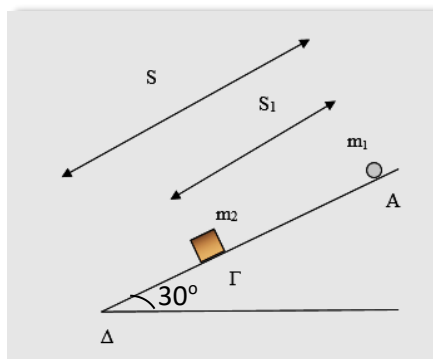
Απάντηση

$$\Delta\Delta O: m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Leftrightarrow$$

$$m_A \cdot 20 + m_B \cdot (-10) = m_A \cdot (-5) + m_B \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25m_A = 20m_B \Leftrightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{20}{25} \text{ ή } \frac{m_A}{m_B} = \frac{4}{5} \rightarrow \text{σωστή η επιλογή (γ).}$$

43. Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ αφήνεται από το σημείο Α λείου (για το m_1) κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο απέχει από τη βάση Δ του επιπέδου απόσταση $S=1,8\text{m}$.



Ύστερα από απόσταση $S_1=1,6\text{m}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2=3\text{kg}$ (θέση Γ). Αν το συσσωμάτωμα εμφανίζει τριβή με το δάπεδο τότε οριακά φτάνοντας στη θέση Δ σταματάει.

Βρείτε:

α. Τον συντελεστή τριβής συσσωματώματος - δαπέδου.

β. Την συνολική θερμότητα που αναπτύχθηκε. ($g=10\text{m/s}^2$ και $\eta_{30^\circ}=0,5$)

Απάντηση

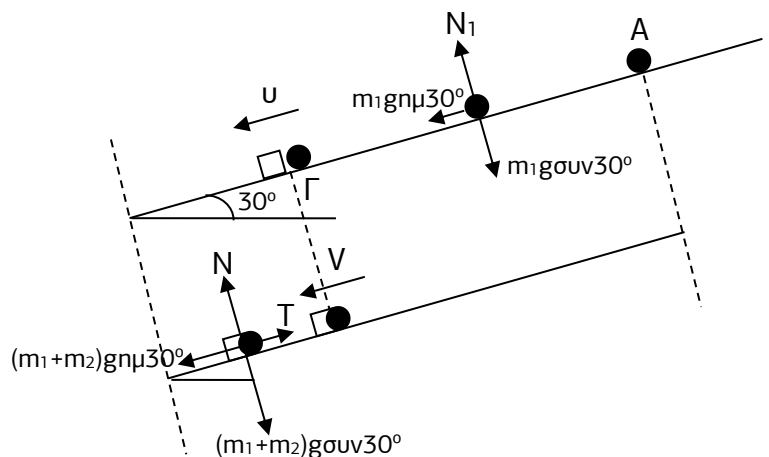
α. ΘΜΚΕ για το m_1 από Α→Γ:

$$K_\Gamma - K_A = \Sigma W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 - 0 = W_{B_1} + W_{N_1} \xrightarrow{W_{N_1} \rightarrow 0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = m_1 g \eta_{30^\circ} \cdot S_1 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2g\eta_{30^\circ} \cdot S_1} = 4\text{m/s}$$



ΑΔΟ:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 1 \text{ m/s}$$

ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα από $\Gamma \rightarrow \Delta$:

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = \Sigma W$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_{B_{ολ}} + W_N + W_T$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi(S - S_1) - T \cdot (S - S_1)$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi(S - S_1) - \mu(m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\phi \cdot (S - S_1)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 1^2 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,2 - \mu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,2 \cdot 10$$

$$-1 = 2 - 2\mu\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\mu\sqrt{3} = 3 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ή } \mu = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Όπου :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$N = (m_1 + m_2)g \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

Τριβή:

$$T = \mu N = \mu(m_1 + m_2)g \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\beta. Q_{ολ} = Q_{κρούσης} + Q_{τριβής}$$

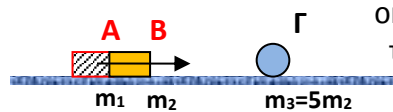
$$Q_{κρούσης} = \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \stackrel{(SI)}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^2 = 6J$$

$$Q_{τριβής} = |W_T| = T \cdot (S - S_1) = \mu(m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\phi \cdot (S - S_1) \stackrel{(SI)}{=} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,2 = 6J$$

$$\text{Επομένως: } Q_{ολ} = Q_{κρούσης} + Q_{τριβής} = 12J$$

44. Δύο σώματα Α και Β με αντίστοιχες μάζες m_1 και m_2 είναι διαρκώς σε επαφή και κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με κοινή ταχύτητα u .

Μετά την κεντρική κρούση με το σώμα Γ μάζας $m_3 = 5m_2$, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α σταματάει ενώ τα σώματα Β και Γ δημιουργούν συσσωμάτωμα το οποίο κινείται με ταχύτητα $\frac{v}{2}$.



Τότε ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ θα είναι:

α. 2 β. $\frac{1}{2}$ γ. $\frac{3}{2}$ δ. $\frac{2}{3}$

Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

Απάντηση

ΑΔΟ:

$$(m_1 + m_2)v = (m_2 + m_3)V \Leftrightarrow$$

$$(m_1 + m_2)v = 6m_2 \frac{v}{2} \Leftrightarrow$$

$$m_1 + m_2 = 3m_2 \Leftrightarrow m_1 = 2m_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 2 \rightarrow \text{σωστή είναι η επιλογή (α)}$$

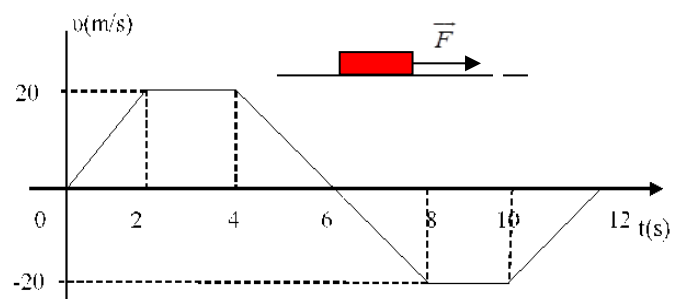
45. Στο ακίνητο σώμα μάζας 2kg του σχήματος, ασκείται η δύναμη F η οποία προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα που παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα

Να κάνετε το αντίστοιχο
διάγραμμα

α. της ορμής και

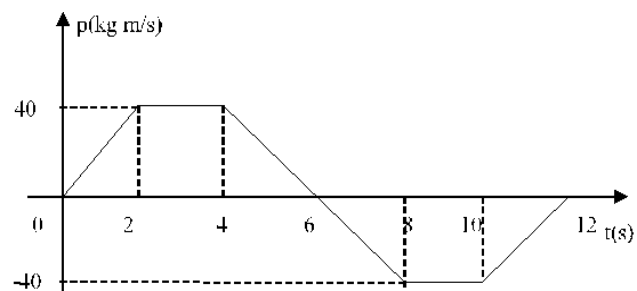
β. της δύναμης F.

Θεωρήστε λείο το οριζόντιο
επίπεδο στο οποίο κινείται το
σώμα.



Απάντηση

α. Η ορμή ισούται με $p = mv$ επομένως το διάγραμμα της ορμής είναι όπως στο
πακάτω σχήμα:



β. Γνωρίζουμε ότι $\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$,
άρα για

$$t \in [0, 2s): F = \frac{40-0}{2} = 20N,$$

$$t \in [2, 4s): F = 0N,$$

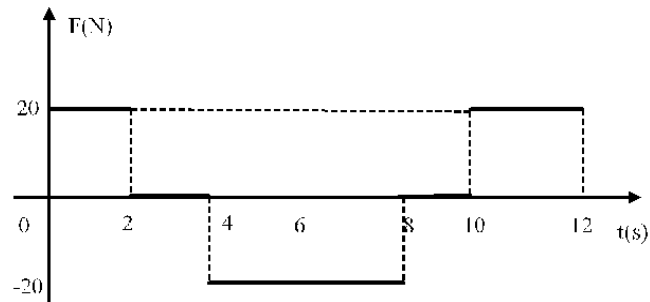
$$t \in [4, 6s): F = \frac{0-40}{2} = -20N,$$

$$t \in [6, 8s): F = \frac{-40-0}{2} = -20N,$$

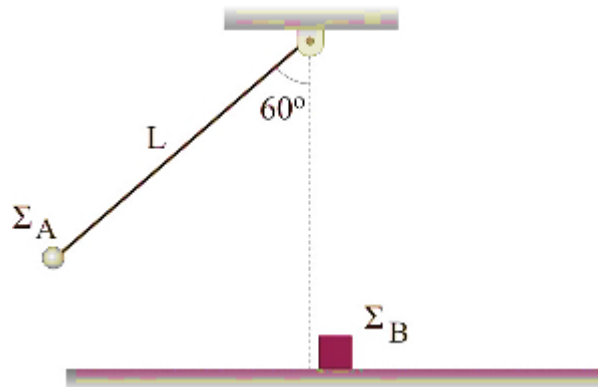
$$t \in [8, 10s): F = 0N,$$

$$t \in [10, 12\text{s}): F = \frac{0 - (-40)}{2} = 20\text{N}.$$

Βάσει των παραπάνω το διάγραμμα της μεταβολής της δύναμης με τον χρόνο είναι το παρακάτω:

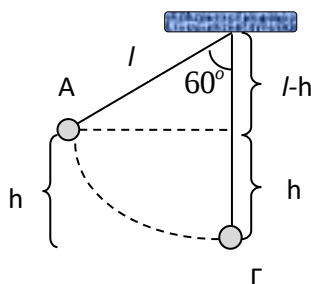


46. Το σφαιρίδιο του απλού εκκρεμούς που έχει μάζα $m_1 = 0,1\text{kg}$, αφήνεται από ύψος h όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα όπου το νήμα σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο (το νήμα είναι τεντωμένο, αβαρές και μη εκτατό). Όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 0,8\text{kg}$. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται. Το νήμα έχει μήκος $l = 0,4\text{m}$.



- Βρείτε την ταχύτητα που αποκτά από την κρούση το σώμα m_2 .
- Βρείτε την θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση
- Βρείτε το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας που το σφαιρίδιο μεταβίβασε στο δεύτερο σώμα
- Αν το δεύτερο σώμα εμφανίζει με το δάπεδο τριβή με συντελεστή $\mu = 0,1$, βρείτε σε πόση απόσταση από την αρχική του θέση θα σταματήσει.

Απάντηση



$$\alpha. \text{ Είναι } \sin 60^\circ = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{0,4-h}{0,4} \Rightarrow h = 0,2\text{m}$$

Α.Δ.Μ.Ε.:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} \Rightarrow v_1 = 2\text{m/s}$$

$$\beta. K_{\text{συστ πριν}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 2^2 = 0,2 J$$

Α.Δ.Ο. για την κρούση

$$\vec{P}_{\text{συστ, αρχ}} = \vec{P}_{\text{συστ, τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = 0 + m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

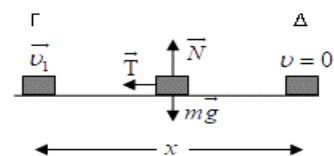
$$K_{\text{συστ μετά}} = 0 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} 0,8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0,025 J$$

$$\text{Θερμότητα: } E_{\text{απωλειών}} = K_{\text{αρχ συστ}} - K_{\text{τελ συστ}} = 0,2 - 0,025 = 0,175 J$$

$$\gamma. \frac{\Delta K_2}{K_{\text{αρχική}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2} = \frac{0,025}{0,2} = 0,125$$

ή 12,5%

δ. Θ.Μ.Κ.Ε. για το 2^ο σώμα από την θέση Γ στη θέση Δ



$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = W_{B_2} + W_N + W_T \Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = 0 - 0 - T \cdot x$$

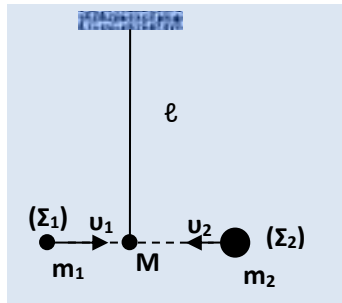
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = -\mu \cdot N \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot x \Rightarrow x = \frac{v_2^2}{2\mu g} \Rightarrow x = \frac{1}{32} m$$

47. Τα σφαιρίδια του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ και $M = m$ όπου $m = 0,1 \text{ kg}$. Μόλις πριν την κεντρική και πλαστική κρούση των τριών σωμάτων τα μέτρα των ταχυτήτων των Σ_1 και Σ_2 είναι αντίστοιχα $v_1 = 6 \text{ m/s}$ και $v_2 = 2 \text{ m/s}$,

ενώ το σώμα μάζας M είναι αρχικά ακίνητο και κρέμεται από το κατακόρυφο αβαρές και μη εκτατό νήμα του σχήματος μήκους $\ell = 0,5\text{m}$.

A. Εφόσον η κρούση των τριών σωμάτων θεωρηθεί «ακαριαία» βρείτε την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.

B.



α. Εάν επαναληφθεί η κεντρική και πλαστική κρούση, αντικαθιστώντας το σφαιρίδιο Σ_2 με ένα άλλο μάζας $m'_2 = m$ το οποίο έχει ταχύτητα $v'_2 = 3\text{m/s}$ αντίρροπη της $\vec{u}_1$ τότε βρείτε και πάλι την τάση του νήματος αμέσως μετά την «ακαριαία» κρούση.

β. Βρείτε το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας του νήματος με την κατακόρυφο.

γ. Βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος στη θέση της

μέγιστης εκτροπής.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

A. ΑΔΟ: $+m_1 u_1 - m_2 u_2 = (m_1 + m_2 + M)V \Leftrightarrow$

$$+m \cdot 6 - 3m \cdot 2 = 5m \cdot V \Leftrightarrow V = 0$$

Επομένως: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T = W_{ολ} = 5m \cdot g = 5\text{N}$

B. α. ΑΔΟ:

$$m_1 u_1 - m'_2 v'_2 = (m_1 + m'_2 + m_3)V \Leftrightarrow$$

$$m \cdot 6 - m \cdot 3 = 3m \cdot V \Leftrightarrow 3m = 3mV \Leftrightarrow V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Είναι: $\Sigma F_{(R)} = F_K \Rightarrow T - W_{ολ} = \frac{m_{ολ} \cdot V^2}{\ell} \Rightarrow$

$$T = (m_1 + m_2 + M)g + \frac{(m_1 + m_2 + M)V^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = 3 + \frac{3 \cdot 1^2}{0,5} = 9\text{N}$$

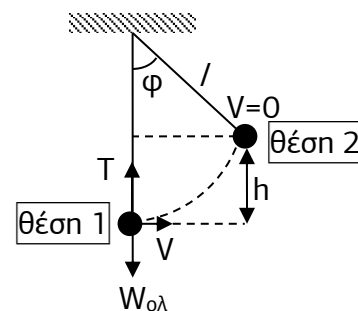
β.

ΑΔΜΕ: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$\frac{1}{2} m_{ολ} V^2 + 0 = 0 + m_{ολ} g h$$

$$h = \frac{V^2 \text{ (SI)}}{2g} = \frac{1^2}{2 \cdot 10} = 0,05\text{m}$$

συνφ = $\ell - h / \ell = 0,9$

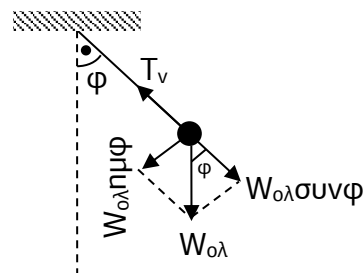


γ. Στη θέση (2) της μέγιστης εκτροπής:

$$\Sigma F_{(R)} = \frac{mv^2}{\ell} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_v - W_{ολ} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow T_v = W_{ολ} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\stackrel{(S.I.)}{\Rightarrow} T_v = 3 \cdot 0,9 = 2,7N$$



48. Σώμα μάζας 2kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα 10m/s.

Να βρείτε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του στη διάρκεια χρόνου:

α. T/4

β. T/6, όπου T η περίοδος της κίνησής του.

Απάντηση

α. Σε χρόνο T/4 θα διαγράψει το 1/4 του κύκλου

(τεταρτοκύκλιο)

$$\text{Είναι: } \Delta \vec{P}_{\text{σώματος}} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 + (-\vec{P}_1)$$

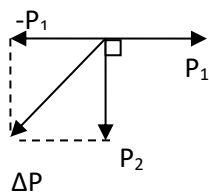
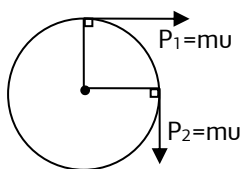
Επομένως:

$$\Delta P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{(mu)^2 + (mu)^2} =$$

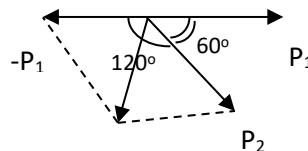
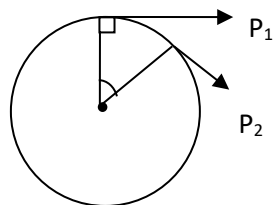
$$\sqrt{2(mu)^2} =$$

$$mu\sqrt{2} =$$

$$20\sqrt{2}m/s$$



β.



Σε χρόνο T/6 θα διαγράψει το 1/6 του κύκλου, δηλαδή η αντίστοιχη επίκεντρη

γωνία που θα διαγράψει η επιβατική ακτίνα θα είναι: $\frac{1}{6} 360^\circ = 60^\circ$

$$\Delta \vec{P}_{\text{σώματος}} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 + (-\vec{P}_1).$$

Επομένως:

$$\Delta P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos 120^\circ} = \sqrt{(mu)^2 + (mu)^2 + 2 \cdot mu \cdot mu \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{(mu)^2} = mu = 20m/s.$$

49. Το οριζόντιο έμβολο του σχήματος ισορροπεί σε ύψος h . Το βάρος του εμβόλου είναι w , το εμβαδόν της επιφάνειας του 300cm^2 , η πίεση του αερίου 2atm και η ατμοσφαιρική πίεση 1atm

A. Αν οι τριβές του εμβόλου με τα τοιχώματα θεωρηθούν αμελητέες και $1\text{atm} \approx 10^5\text{Pa}$, τότε το βάρος του εμβόλου θα είναι:

α. 30N β. 300N γ. 3000N

Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

B. Αν ο όγκος του αερίου είναι 6Lit τότε το ύψος h θα είναι:

α. $h = 6\text{cm}$ β. $h = 20\text{cm}$ γ. $h = 3\text{m}$

Επιλέξτε και αιτιολογήστε.

Απάντηση

A. Αφού το έμβολο ισορροπεί:

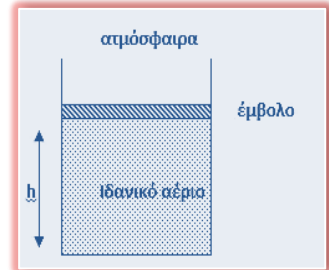
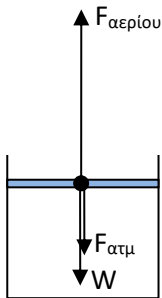
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_{\text{αερίου}} = F_{\text{ατμ}} + W \quad :A$$

$$P_{\text{αερίου}} = P_{\text{ατμ}} + \frac{W}{A} \Leftrightarrow$$

$$W = A \cdot (P_{\text{αερίου}} - P_{\text{ατμ}}) =$$

$$= 300 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot 1 \cdot 10^5 \text{Pa} = 3000\text{N} \rightarrow \text{επιλογή (γ)}$$



$$B. V = A \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{A} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{300 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 0,2\text{m} = 20\text{cm} \rightarrow \text{επιλογή (β)}$$

50. Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη της αριστερής στήλης με τα μεγέθη της δεξιάς στήλης:

Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής:	
1. της απόστασης $\frac{dx}{dt}$	α. $\Sigma F \cdot v$
2. της γωνίας στροφής $\frac{d\theta}{dt}$	β. ΣF
3. της ταχύτητας $\frac{dv}{dt}$	γ. ταχύτητα v
4. της γωνιακής ταχύτητας $\frac{d\omega}{dt}$	δ. επιτάχυνση a
5. της ορμής $\frac{dp}{dt}$	ε. $F \cdot v$

6. του έργου (ενέργειας) μιας δύναμης $\frac{dW_F}{dt}$	στ. γωνιακή ταχύτητα ω
7. της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$	ζ. γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Απάντηση

1. $\gamma \left(\frac{dx}{dt} = v \right)$

2. $\sigma\tau \left(\frac{d\theta}{dt} = \omega \right)$

3. $\delta \left(\frac{dv}{dt} = \alpha \right)$

4. $\zeta \left(\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \right)$

5. $\beta \left(\frac{dP}{dt} = \Sigma F \right)$

6. $\epsilon \left(\frac{dW_F}{dt} = F \cdot v \right)$

7. $\alpha \left(\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v \right)$

51. Να μετατρέψετε στο S.I. τα παρακάτω μεγέθη:

α. πίεση 4atm	
β. πίεση 380mm Hg	
γ. ταχύτητα 72 Km/h	
δ. επιτάχυνση 36.000 cm/min ²	
ε. συχνότητα 720 στροφές/ min	
στ. ορμή 400 g· cm/s	
ζ. γωνιακή ταχύτητα 600 rad/min	

Απάντηση

α. $P = 4atm = 4 \cdot 10^5 Pa$

β. $P = 380mmHg = 380 \frac{1}{760} atm = \frac{38}{76} 10^5 Pa = 0,5 \cdot 10^5 Pa = 5 \cdot 10^4 Pa$

γ. $v = 72 \frac{km}{h} = 72 \cdot \frac{1000m}{360s} = 20m/s$

$$\delta. a = 36000 \frac{cm}{min^2} = 36000 \frac{10^{-2}m}{(60s)^2} = 36000 \cdot \frac{10^{-2}m}{3600s^2} = 0,1m/s^2$$

$$\epsilon. f = 720 \frac{\sigma\tau\rho\phi\acute{\epsilon}\varsigma}{min} = 720 \frac{\sigma\tau\rho\phi\acute{\epsilon}\varsigma}{60s} = 12Hz$$

$$\sigma\tau. p = 400g \frac{cm}{s} = 400 \cdot 10^{-3}kg \cdot \frac{10^{-2}m}{s} = 4 \cdot 10^{-3}kg \frac{m}{s}$$

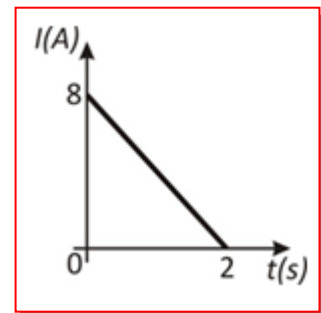
$$\zeta. \omega = 600 \frac{rad}{min} = 600 \frac{rad}{60s} = 10 \frac{rad}{s}$$

52. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα μεταλλικό αγωγό μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με το διπλανό διάγραμμα. Να υπολογίσετε:

α. το φορτίο που πέρασε από μια διατομή του αγωγού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ που μηδενίστηκε το ρεύμα.

β. τον αριθμό των ηλεκτρονίων που πέρασαν από τη διατομή του αγωγού στην παραπάνω χρονική διάρκεια. Δίνεται ότι $|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}C$.

Απάντηση



α. Το φορτίο που περνάει από μια διατομή ενός αγωγού στο χρονικό διάστημα που μας δίνεται δεν μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $I = q/t$ γιατί η ένταση του ρεύματος δεν είναι σταθερή. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα υπολογίζουμε το φορτίο από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $I = f(t)$.

$$q = (\text{εμβαδόν τριγώνου}) = \frac{2 \cdot 8}{2} Cb = 8C.$$

β. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που διέρχονται από μια διατομή δίνεται από την σχέση

$$N = \frac{q}{|e|} = \frac{8}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 5 \cdot 10^{19}.$$

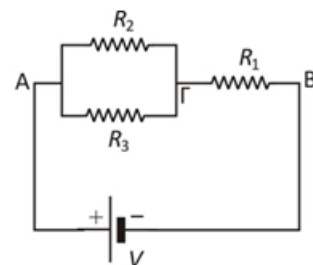
53. Για το διπλανό κύκλωμα δίνονται $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 6\Omega$ και $V = 36V$.

Να υπολογίσετε:

α. την ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας

β. την τάση που επικρατεί στα άκρα κάθε αντιστάτη, καθώς και την ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει

Απάντηση

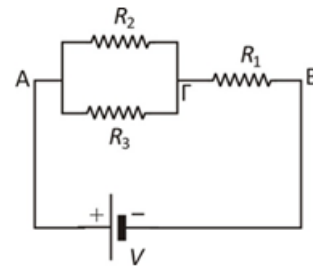


- α. Οι αντιστάσεις R_2 και R_3 είναι συνδεδεμένες παράλληλα, οπότε

$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{12 \cdot 6}{18} \Omega = 4\Omega.$$

Οι αντιστάσεις $R_{2,3}$ και R_1 είναι συνδεδεμένες σε σειρά, οπότε

$$R_{ολ} = R_{2,3} + R_1 = 12\Omega.$$



- β. Η συνολική ένταση του ρεύματος στον κλάδο AB ισούται με

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{36}{12} \text{ A} = 3\text{ A}.$$

Οι τάσεις στα άκρα των αντιστατών R_2 και R_3 είναι ίσες, οπότε

$$V_2 = V_3 \Rightarrow I_2 R_2 = I_3 R_3 \Rightarrow 12 I_2 = 6 I_3 \Rightarrow I_3 = 2 I_2.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A,

$$I = I_2 + I_3 = 3 I_2 \Rightarrow I_2 = 1\text{ A},$$

άρα $I_3 = 2\text{ A}$.

Τέλος οι τάσεις στα άκρα κάθε αντιστάτη δίνονται ως

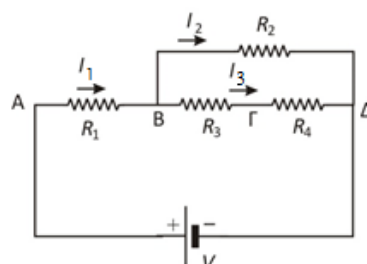
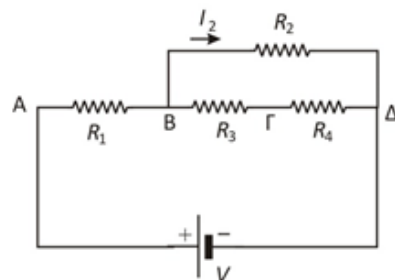
$$V_1 = I R_1 = 3 \cdot 8\text{ V} = 24\text{ V}, \quad V_2 = V_3 = V - V_1 = 12\text{ V}.$$

54. Οι τέσσερις αντιστάτες του διπλανού κυκλώματος έχουν αντιστάσεις $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 10\Omega$ και $R_4 = 2\Omega$. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 ισούται με $I_2 = 3\text{ A}$.

Να υπολογίσετε:

- την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_3 .
- τη διαφορά δυναμικού $V_A - V_\Gamma$.
- την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος.

Απάντηση



- α. Σύμφωνα με το σχήμα οι αντιστάσεις R_2 και $R_{3,4}$ είναι συνδεδεμένες παράλληλα και οι αντιστάσεις R_3 και R_4 σε σειρά. Άρα $I_3 = I_4$ και

$$V_2 = V_3 + V_4 \Rightarrow I_2 R_2 = I_3 (R_3 + R_4) \Rightarrow I_3 = \frac{R_2}{R_3 + R_4} I_2 \Rightarrow$$

$$I_3 = \frac{4}{10 + 2} 3\text{A} = 1\text{A}.$$

- β. Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Β, $I_1 = I_2 + I_3 = 4\text{A}$. Άρα
- $$V_A - V_\Gamma = (V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) = I_1 R_1 + I_3 R_3 = (4 \cdot 1 + 1 \cdot 10)\Omega = 14\Omega.$$

- γ. Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm στον κλάδο ΑΔ,

$$R_{\text{ολ}} = \frac{V}{I_1} = \frac{V_1 + V_2}{I_1} = \frac{I_1 R_1 + I_2 R_2}{I_1} = \frac{4 + 12}{4} \Omega = 4\Omega.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και από την σχέση

$$R_{\text{ολ}} = R_1 + \frac{R_2 R_{3,4}}{R_2 + R_{3,4}} = \left(1 + \frac{4 \cdot 12}{4 + 12}\right) \Omega = 4\Omega.$$

55. Για το διπλανό κύκλωμα δίνεται ότι $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 1\Omega$ και $V = 24\text{V}$.

Α. Αρχικά ο διακόπτης (δ. είναι ανοικτός και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 4Α.

Να υπολογίσετε:

- α. την αντίσταση R_4 ,
β. την ένδειξη του βολτόμετρου.

Β. Κλείνουμε το διακόπτη (δ..

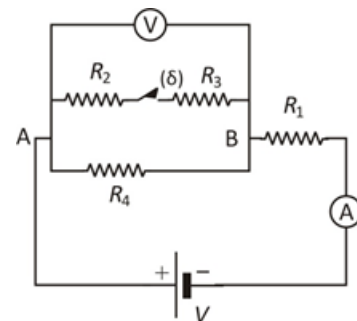
Να υπολογίσετε:

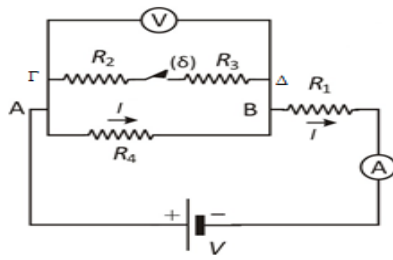
- α. την ένδειξη του αμπερομέτρου,
β. την ένδειξη του βολτόμετρου.

Δίνεται ότι το βολτόμετρο και το αμπερόμετρο είναι ιδανικά (δεν έχουν εσωτερικές αντιστάσεις).

Απάντηση

- Α. α. Αφού ο διακόπτης (δ. είναι ανοικτός ο κλάδος ΓΔ δεν διαρρέεται από ρεύμα. Άρα το ίδιο ρεύμα διαρρέει τις ωμικές αντιστάσεις R_4 και R_1 οι οποίες είναι συνδεδεμένες σε σειρά.





Άρα

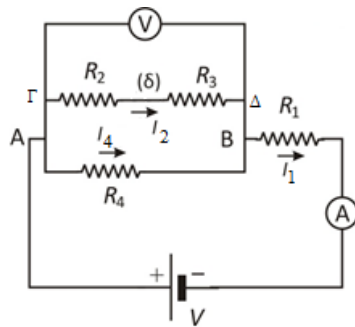
$$R_{ολ} = R_4 + R_1 \Rightarrow \frac{V}{I} = R_4 + R_1 \Rightarrow$$

$$R_4 = \frac{V}{I} - R_1 = \left(\frac{24}{4} - 2\right) \Omega = 4\Omega$$

β. Η ένδειξη του βολτομέτρου είναι η τάση στα άκρα της R_4 . Άρα

$$V_4 = IR_4 = 16V.$$

Β. Αφού ο διακόπτης δ είναι κλειστός ο κλάδος ΓΔ διαρρέεται από ρεύμα, οπότε οι αντιστάσεις R_2 και R_3 είναι σε σειρά και οι αντιστάσεις $R_{2,3}$ και R_4 παράλληλα.



Άρα

$$R_{2,3,4} = \frac{R_{2,3}R_4}{R_{2,3} + R_4} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} \Omega \Rightarrow$$

$$R_{2,3,4} = 2\Omega.$$

Συνεπώς,

$$R_{ολ} = R_1 + R_{2,3,4} = 4\Omega.$$

α. Η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι

$$I_1 = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{24}{4} A = 6A.$$

β. Η ένδειξη του βολτομέτρου είναι η τάση στα άκρα A και B. Άρα

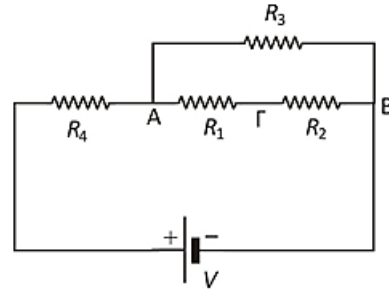
$$V_{AB} = I_1 R_{2,3,4} = 6 \cdot 2V = 12V.$$

56. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος δίνονται $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 1\Omega$ και $V = 25V$. Να υπολογίσετε:

α. την ισχύ που καταναλώνει κάθε αντιστάτης καθώς και την ισχύ της ισοδύναμης αντίστασης του κυκλώματος.

β. τη θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη R_4 σε χρόνο $t = 40s$.

Απάντηση



α. Οι αντιστάσεις $R_{1,2}$ και R_3 είναι παράλληλες και οι R_1 και R_2 σε σειρά, άρα

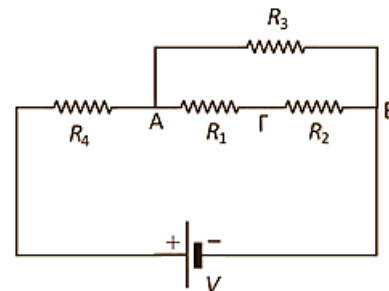
$$R_{1,2,3} = \frac{R_{1,2}R_3}{R_{1,2} + R_3} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} \Omega = 4\Omega.$$

Επίσης οι αντιστάτες $R_{1,2,3}$ και R_4 είναι σε σειρά, άρα

$$R_{ολ} = R_{1,2,3} + R_4 = 5\Omega.$$

Το συνολικό ρεύμα στο κύκλωμα ισούται με

$$I_4 = \frac{V}{R_{ολ}} = 5A.$$



Επιπλέον,

$$V = V_3 + V_4 = I_3 R_3 + I_4 R_4 \Rightarrow I_3 = \frac{V - I_4 R_4}{R_3} = \frac{25 - 5 \cdot 1}{20} A \Rightarrow I_3 = 1A.$$

Από τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A προκύπτει ότι

$$I_4 = I_1 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_4 - I_3 \Rightarrow I_1 = 4A.$$

Συνεπώς,

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 16 \cdot 2 \text{Watt} = 32 \text{Watt}, \quad P_2 = I_1^2 R_2 = 16 \cdot 3 \text{Watt} = 48 \text{Watt},$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 1 \cdot 20 \text{Watt} = 20 \text{Watt}, \quad P_4 = I_4^2 R_4 = 25 \cdot 1 \text{Watt} = 25 \text{Watt}.$$

Τέλος η ισχύς της ισοδύναμης αντίστασης του κυκλώματος ισούται με

$$P_{ολ} = I_4^2 R_{ολ} = 25 \cdot 5 \text{Watt} = 125 \text{Watt}$$

ή

$$P_{ολ} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 125 \text{Watt}.$$

β. Η θερμότητα που εκλύεται από την αντίσταση R_4 δίνεται από την σχέση,

$$Q = P_4 t = 25 \cdot 40 \text{J} = 1000 \text{J}.$$

57. Δύο θερμικές συσκευές (1) και (2) που αναγράφουν τα στοιχεία 100W, 20V και 200W, 40V αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένες παράλληλα και το σύστημα συνδέεται σε πηγή. Η τάση της πηγής ισούται με $V = 40V$ και στον κλάδο της πηγής συνδέουμε ιδανικό αμπερόμετρο.

α. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα.

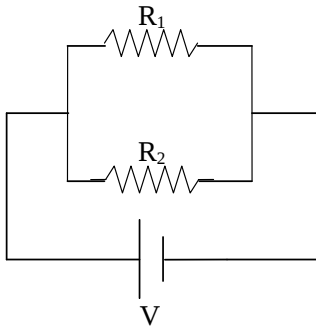
β. Να εξετάσετε ποια από τις δύο θερμικές συσκευές λειτουργεί κανονικά και ποια υπερλειτουργεί.

γ. Να βρείτε την ένδειξη του αμπερομέτρου.

δ. Να υπολογίσετε την αντίσταση R_x ενός αντιστάτη που πρέπει να συνδεθεί σε σειρά με τη συσκευή που υπερλειτουργεί, ώστε μετά τη σύνδεση η συσκευή αυτή να λειτουργεί κανονικά.

Απάντηση

α.



β. Αρχικά θα υπολογίσουμε την αντίσταση κάθε συσκευής και το κανονικό ρεύμα από τις ενδείξεις κανονικής λειτουργίας. Για την συσκευή (1) ισχύει ότι

$$P_{κ1} = \frac{V_{κ1}^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{V_{κ1}^2}{P_{κ1}} \Rightarrow R_1 = \frac{400}{100} \Omega = 4\Omega.$$

Επίσης

$$P_{κ1} = V_{κ1}I_{κ1} \Rightarrow I_{κ1} = \frac{P_{κ1}}{V_{κ1}} = \frac{100}{20} \text{ A} \Rightarrow I_{κ1} = 5\text{ A}.$$

Για την συσκευή (2) ισχύει ότι

$$P_{κ2} = \frac{V_{κ2}^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{V_{κ2}^2}{P_{κ2}} \Rightarrow R_2 = \frac{1600}{200} \Omega = 8\Omega.$$

Επίσης

$$P_{κ2} = V_{κ2}I_{κ2} \Rightarrow I_{κ2} = \frac{P_{κ2}}{V_{κ2}} = \frac{200}{40} \text{ A} \Rightarrow I_{κ2} = 5\text{ A}.$$

Άρα για να λειτουργούν κανονικά οι συσκευές πρέπει και οι δύο να διαρρέονται από ρεύμα έντασης 5A.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το πραγματικό ρεύμα που διαρρέει κάθε θερμική συσκευή. Συγκεκριμένα,

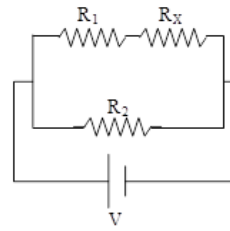
$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{40}{4} \text{ A} = 10\text{ A}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{40}{8} \text{ A} = 5\text{ A}.$$

Άρα η συσκευή (2) λειτουργεί κανονικά και η συσκευή (1) υπερλειτουργεί.

γ. Το συνολικό ρεύμα στο κύκλωμα ισούται με

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{40}{8/3} \text{ A} = 15\text{ A}$$

δ. Βάζουμε μια αντίσταση R_x σε σειρά με την R_1 . Τότε για να λειτουργεί κανονικά η



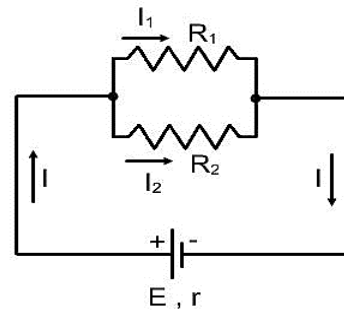
συσσκευή (1) θα πρέπει $I_1 = I_{κ1} = 5A$. Συνεπώς

$$V = V_1 + V_x = I_1(R_1 + R_x) \Rightarrow R_x = \frac{V - I_1 R_1}{I_1} = \frac{40 - 5 \cdot 4}{5} \Omega = 4\Omega.$$

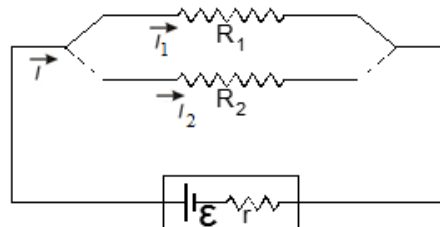
58. Δύο αντιστάτες με αντιστάσεις $R_1 = 12\Omega$ και $R_2 = 36\Omega$ συνδέονται παράλληλα και στα άκρα Α και Γ του συστήματος τους συνδέεται μια πηγή που έχει ΗΕΔ $\mathcal{E} = 20V$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$. Να υπολογίσετε:

- την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή.
- την ισχύ που παρέχει η πηγή σε ολόκληρο το κύκλωμα.
- την ισχύ που καταναλώνει ο αντιστάτης αντίστασης R_2 .

Απάντηση



Αρχικά σχεδιάζουμε το κύκλωμα:



α. Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Άρα η εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με

$$R_{εξ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 36}{12 + 36} \Omega = 9\Omega.$$

Συνεπώς το ρεύμα στο κύκλωμα ισούται με

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{εξ} + r} = \frac{20}{9 + 1} A = 2A.$$

β. Η ισχύς του ρεύματος που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα ισούται με

$$P = \mathcal{E}I = 20 \cdot 2W = 40W.$$

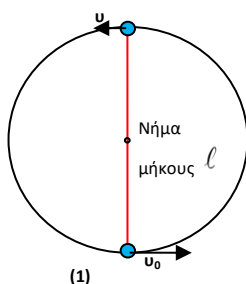
γ. Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης αντίστασης R_2 ο οποίος βρίσκεται σε τάση ίση με την πολική της πηγής, $V_2 = V_{\pi} = \mathcal{E} - Ir$, ισούται με

$$P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{(\mathcal{E} - Ir)^2}{R_2} = \frac{(20 - 2 \cdot 1)^2}{36} \text{ W} = 9 \text{ W}.$$

Επιμέλεια: Γκιώνη Βασιλική

ΘΕΜΑΤΑ ΑΥΞΗΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ (εισαγωγή στη Γ' Λυκείου)

1. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας u_0 που πρέπει να έχει το σφαιρίδιο του σχήματος στην κατώτατη θέση (1) της τροχιάς του ώστε να κάνει ανακύκλωση,



δίνεται από τη σχέση: $u_{0\min} = \sqrt{5g\ell}$.

Θεωρήστε ότι το σφαιρίδιο κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο.

Απάντηση

Πρέπει στην ανώτατη θέση της τροχιάς (θέση 2):

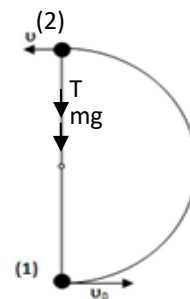
$$\Sigma F_{(R)} = F_k \Leftrightarrow T + mg = m \frac{v^2}{\ell}.$$

Οριακή ανακύκλωση σημαίνει ότι στην ανώτατη θέση $T = 0$.
Επομένως:

$$mg = m \frac{v_{\min}^2}{\ell} \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{g\ell}.$$

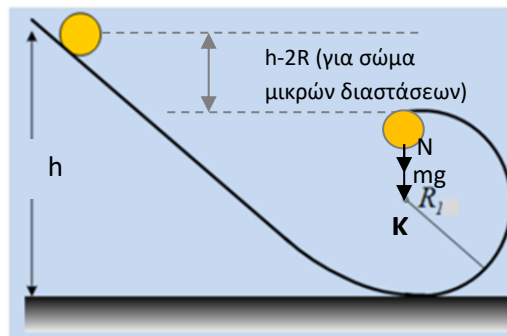
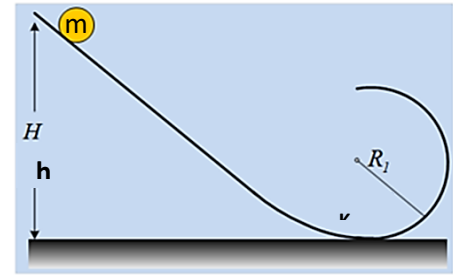
$$\text{ΘΜΚΕ: } K_2 - K_1 = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_T + W_{mg} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg2\ell \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 4g\ell}, \text{ για } v = v_{\min} = \sqrt{g\ell} \Rightarrow v_{0\min} = \sqrt{5g\ell}.$$



2. Σώμα μικρών διαστάσεων αφήνεται από το ύψος h να ολισθήσει στον λείο κατακόρυφο οδηγό του σχήματος. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του ύψους h από το οποίο πρέπει να αφηθεί το σώμα ώστε να κάνει ανακύκλωση είναι: $h = 2,5R$, όπου R η ακτίνα του κυκλικού μέρους διαδρομής.

Απάντηση



Στην ανώτατη θέση της τροχιάς (B):

$$\Sigma F_{(R)} = F_K \Leftrightarrow N + mg = \frac{mv^2}{R} \xrightarrow[N \approx 0]{\text{οριακά}} mg = \frac{mv_{\min}^2}{R} \Leftrightarrow v_{\min} = \sqrt{gR} \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΜΕ: } K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow$$

$$mg(h - 2R) = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow$$

$$h - 2R = \frac{v^2}{2g} \Leftrightarrow$$

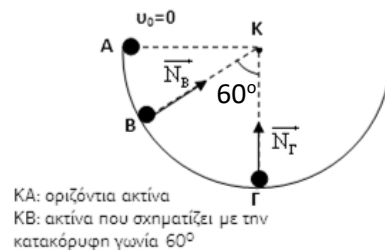
$$h = 2R + \frac{v^2}{2g} \xrightarrow[v_{\min} = \sqrt{gR}]{\text{για}} h_{\min} = 2R + \frac{R}{2} = 2,5R$$

3. Από τη θέση Α του λείου ημικυκλικού κατακόρυφου οδηγού του σχήματος, αφήνεται να ολισθήσει σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων.

Εξετάστε αν το μέτρο της κάθετης αντίδρασης επαφής από το δάπεδο στις θέσεις Β και Γ είναι

$$\text{αντίστοιχα: } N_B = \frac{3mg}{2} \quad N_\Gamma = 3mg$$

Απάντηση



ΑΔΜΕ :

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad (\text{Θεωρούμε } U_B = 0) \Leftrightarrow$$

$$0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \Leftrightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A} \Leftrightarrow$$

$$\text{όπου } h_A = R \cdot \sin 60^\circ = \frac{R}{2}$$

$$\text{Άρα: } v_B = \sqrt{gR} \quad (1)$$

Όμως:

$$\Sigma F_{(R)} = F_k \Leftrightarrow N_B - mg \sin 60^\circ = \frac{mv_B^2}{R} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$N_B = mg \sin 60^\circ + \frac{m \cdot gR}{R} = \frac{mg}{2} + mg = \frac{3mg}{2}$$

$$\text{ΑΔΜΕ: } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \quad (\text{Θεωρούμε } U_\Gamma = 0) \Leftrightarrow$$

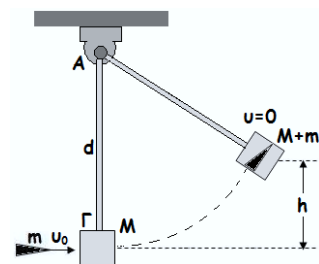
$$mgR = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 \Leftrightarrow v_\Gamma = \sqrt{2gR} \quad (2)$$

Όμως:

$$\Sigma F_{\Gamma(R)} = F_{k_\Gamma} \Leftrightarrow N_\Gamma - mg = \frac{mv_\Gamma^2}{R} \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$N_\Gamma = mg + \frac{m \cdot 2gR}{R} = 3mg$$

4. Ξύλινος κύβος μάζας $M=1950g$ είναι στερεωμένος στη μια άκρη Γ αβαρούς ράβδου της οποίας η άλλη άκρη A μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το A . Ο κύβος ισορροπεί όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη. Ένα βλήμα μάζας $m=50g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $u_0=80m/s$ και σφηνώνεται σχεδόν ακαριαία, στο κέντρο μάζας του κύβου, προκαλώντας την ανύψωσή του κατά h . Να βρείτε:



α. το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος βλήμα-κύβος, αμέσως μετά την κρούση.

β. την ανύψωση h του κύβου.

γ. το επί τοις % ποσοστό της απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήμα – κύβος κατά την κρούση.

δ. Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα την οποία θα έπρεπε να έχει το βλήμα ώστε το συσσωμάτωμα να κάνει οριακή ανακύκλωση.

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $d = 0,4\text{m}$.

Απάντηση

α. ΑΔΟ: $\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετά} \Rightarrow mu_0 = (m+M)V \Rightarrow V = 2\text{m/s}$.

β. ΑΔΜΕ:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M) \cdot V^2 + 0 = 0 + (m+M) \cdot g \cdot h \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{V^2}{2g} = 0,2\text{m}$$

γ. $K_{ολ,πριν} = \frac{1}{2}mu_0^2 = 160\text{J}$

$$K_{ολ,μετά} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = 4\text{J}$$

Άρα $E_{απωλειών} = 160\text{J} - 4\text{J} = 156\text{J} (= Q_{κρούσης})$

$$\frac{E_{απωλειών}}{K_{ολ,πριν}} = \frac{156\text{J}}{160\text{J}} = 0,975 = 97,5\%$$

δ. Για να κάνει οριακά ανακύκλωση το σύστημα, αρκεί η ράβδος στην πάνω κατακόρυφη θέση σχεδόν να σταματήσει δηλ. για το συσσωμάτωμα $V \approx 0$ ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα:

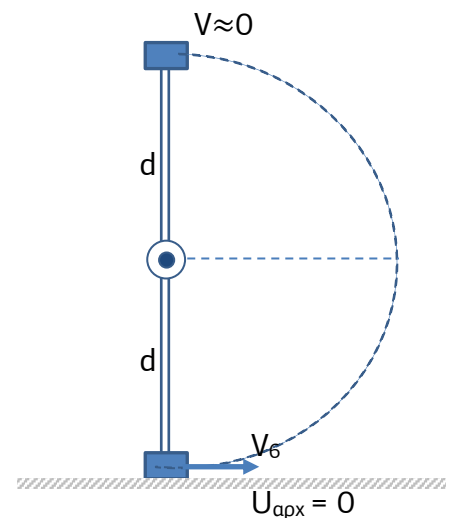
$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M) \cdot V_{\sigma}^2 + 0 = 0 + (m+M) \cdot g \cdot 2d \Leftrightarrow$$

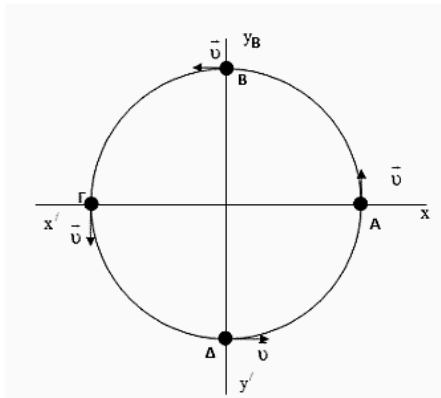
$$V_{\sigma} = \sqrt{4gd} = \sqrt{16} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΑΔΟ:

$$mu_0 = (m+M)V \Rightarrow u_0 = \frac{(m+M)V}{m} = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



5. Μικρό σώμα μάζας $0,1\text{kg}$ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε τροχιά ακτίνας



$R = \frac{16}{\pi}\text{m}$. Τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση

A και σε χρόνο 4 sec διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση B. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε τον χαρακτηρισμό:

α. η περίοδος της κίνησης είναι 16 sec .	Σ	Λ
β. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι 2m/s .	Σ	Λ
γ. η μεταβολή της ορμής ανάμεσα στις θέσεις A και Γ έχει μέτρο $0,4\text{kgm/s}$.	Σ	Λ
δ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής ανάμεσα στις θέσεις A και Δ είναι $0,2\sqrt{2}\text{kgm/s}$.	Σ	Λ
ε. το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης είναι $\frac{\pi}{4}\text{ N}$.	Σ	Λ

Απάντηση

α. Επειδή η κίνηση είναι ομαλή κυκλική το σώμα σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσα τόξα. Το τόξο AB είναι τεταρτοκύκλιο, επομένως:

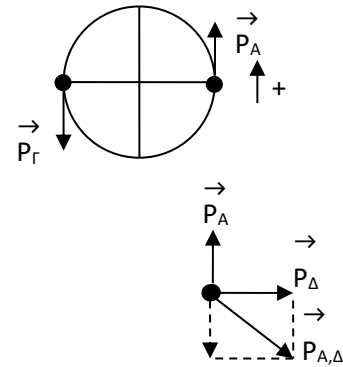
$$T = 4 \cdot t_{AB} = 4 \cdot 4\text{sec} = 16\text{sec} \rightarrow \text{Σωστό}$$

$$\beta. v = \frac{2\pi R^{(SI)}}{T} = \frac{2\pi \frac{16}{\pi}}{16} = 2\text{m/s} \rightarrow \text{Σωστό}$$

γ. Είναι $P_A = P_\Gamma = mv = 0,2 \text{ kgm/s}$ (μέτρα)

$$\Delta P_{A,\Gamma} = P_\Gamma - P_A = -mv - mv = -0,4 \text{ kgm/s},$$

άρα $|\Delta P_{A,\Gamma}| = -0,4 \text{ kgm/s} \rightarrow \text{Σωστό}$



δ. Για τα μέτρα $P_A = P_\Delta = mv$

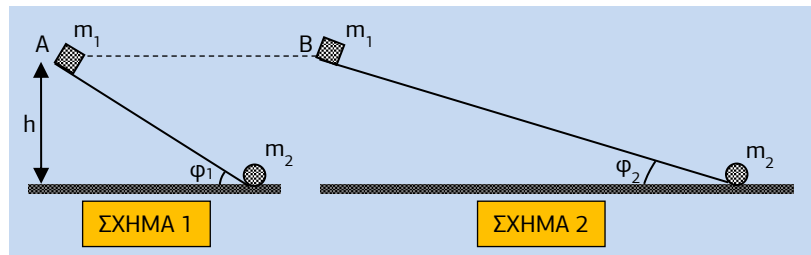
$$\Delta \vec{P}_{A,\Delta} = \vec{P}_\Delta - \vec{P}_A = \vec{P}_\Delta + (-\vec{P}_A)$$

Επομένως:

$$|\Delta \vec{P}_{A,\Delta}| = \sqrt{P_A^2 + P_\Delta^2} = \sqrt{2(mv)^2} = mv\sqrt{2} = 0,2 \text{ kgm/s} \rightarrow \text{Σωστό}$$

$$\epsilon. F_k = \frac{mv^2}{R} = \frac{0,1 \cdot 2^2}{\frac{1}{16}\pi} = \frac{0,1 \cdot 4\pi}{16} = \frac{\pi}{40} \text{ N} \rightarrow \text{Λάθος}$$

6. Από τα σημεία A και B των λείων κεκλιμένων επιπέδων του σχήματος αφήνουμε να μετακινηθούν δύο όμοια σώματα μάζας m_1 . Όταν τα σώματα φτάσουν στη βάση των αντίστοιχων



επιπέδων συγκρούονται πλαστικά με αρχικά ακίνητα όμοια σώματα μάζας m_2 . Αν μετά την κρούση τα σώματα m_1 ακινητοποιηθούν να βρείτε:

α. Το σώμα m_2 ποιου σχήματος θα αποκτήσει μετά την κρούση:

- μεγαλύτερη ορμή;
- Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

β. Σε ποια από τις δύο κρούσεις θα έχουμε περισσότερη θερμότητα;

Απάντηση

α. ΑΔΜΕ για καθένα από τα σώματα:

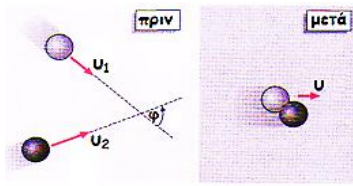
$$\cancel{K_A}^0 + U_A = K_{\text{βάση}} + \cancel{U_{\text{βάση}}}^0 \Leftrightarrow \cancel{m_1}gh = \frac{1}{2}\cancel{m_1}v_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \rightarrow \text{ίδια}$$

Κατά την πλαστική κρούση εφόσον έχουμε συσσωμάτωμα και το m_1 ακινητοποιείται, τότε ακινητοποιημένο είναι και το συσσωμάτωμα. Αυτό σημαίνει ότι $m_2 \gg m_1$.

- $P_{\text{συσσ}} = 0 \rightarrow$ το m_2 δεν έχει ορμή καμία περίπτωση.
- $K_{\text{συσσ}} = 0 \rightarrow$ το m_2 δεν έχει κινητική ενέργεια σε καμία περίπτωση.

$$\beta. Q_{\text{κρούσης}} = K_{\text{ολ. πριν}} - K_{\text{ολ. μετά}}^0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow \text{ίδια}$$

7. Δύο σώματα με ίσες μάζες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρων $u_1=1\text{m/s}$ και $u_2=2\text{m/s}$ που σχηματίζουν γωνία 60° μεταξύ τους.



Αν τα σώματα συγκρουστούν πλαστικά, βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος.

Απάντηση

Είναι:

$$u_{2x} = u_2 \sin 60^\circ = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και } u_{2y} = u_2 \cos 60^\circ = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΑΔΟ στον $x'x$ άξονα:

$$\vec{p}_{ολ,πρινx} = \vec{p}_{ολ,μετάx} \Rightarrow m u_1 + m u_{2x} = 2m V_x \Rightarrow V_x = 1 \text{ m/s}$$

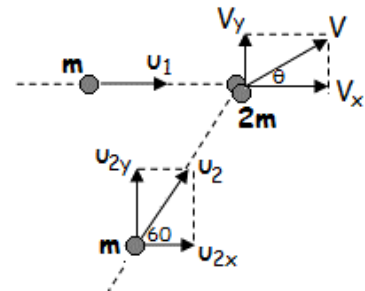
ΑΔΟ στον $y'y$ άξονα:

$$\vec{p}_{ολ,πρινy} = \vec{p}_{ολ,μετάy} \Rightarrow 0 + m u_{2y} = 2m V_y \Rightarrow V_y = \sqrt{3}/2 \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{7}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

με διεύθυνση:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

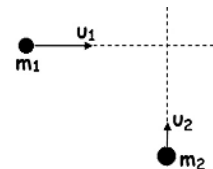


8. Δύο σφαίρες με μάζες $m_1=2\text{Kg}$ και $m_2=3\text{Kg}$ κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $u_1=4\text{m/s}$ και u_2 κάθετες μεταξύ τους. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά και η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι $V=2\text{m/s}$.

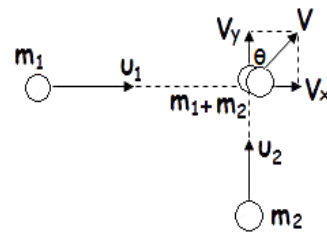
Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα u_2 .
- την απώλεια ενέργειας κατά την κρούση.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής της m_2 .

Απάντηση



α. Αναλύουμε την ταχύτητα V του συσσωματώματος σε δύο κάθετες συνιστώσες V_x , και V_y και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) στους άξονες $x'x$ και $y'y$.



Οπότε έχουμε:

$$p_{ολ,x}^{πριν} = p_{ολ,x}^{μετά} \Rightarrow m_1 u_1 + 0 = (m_1 + m_2) V_x \Rightarrow V_x = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow V_x = 1,6 \frac{m}{s}$$

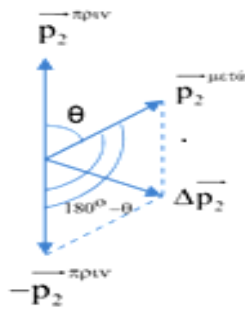
$$\text{Όμως } V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Rightarrow V_y = \sqrt{V^2 - V_x^2} \Rightarrow V_y = 1,2 \frac{m}{s}$$

$$\text{και } p_{ολ,y}^{πριν} = p_{ολ,y}^{μετά} \Rightarrow 0 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) V_y \Rightarrow u_2 = \frac{(m_1 + m_2) V_y}{m_2} \Rightarrow \boxed{u_2 = 2 \frac{m}{s}}$$

$$\beta. E_{απωλ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 16J + 6J - 10J \Rightarrow \boxed{E_{απωλ} = 12J}$$

$$\gamma. \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2,μετά} - \vec{p}_{2,πριν} = \vec{p}_{2,μετά} + (-\vec{p}_{2,πριν})$$

Η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{p}_{2,μετά}$ και $-\vec{p}_{2,πριν}$ είναι $\varphi = 180^\circ - \theta$.



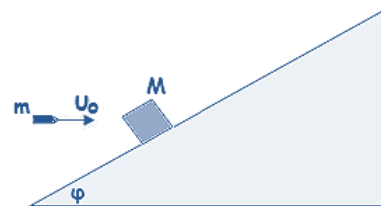
$$\text{Τότε: } \cos \varphi = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta = \frac{V_y}{V} = -\frac{1,2}{2} = -0,6$$

Επομένως:

$$\Delta p_2 = \sqrt{(p_2^{πριν})^2 + (p_2^{μετά})^2 + 2(p_2^{πριν})^2 \cdot (p_2^{μετά})^2 \cdot \cos \varphi} \quad (SI) \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = \sqrt{(m_2 V)^2 + (m_2 u_2)^2 - 2m_2 V m_2 u_2 0,6} \quad (SI) \Rightarrow \Delta p_2 = \sqrt{36 + 36 - 43,2} \Rightarrow \boxed{\Delta p_2 = \sqrt{28,8} \text{ kg } \frac{m}{s}}$$

9. Σώμα μάζας $M=4,8\text{Kg}$ στηρίζεται σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης $\varphi=30^\circ$. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{Kg}$ κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $u_0=200\text{m/s}$, σφηνώνεται στο σώμα. Αν υποθέσουμε ότι το σφήνωμα γίνεται ακαριαία, να βρείτε πόσο θα μετακινηθεί το συσσωμάτωμα αν:

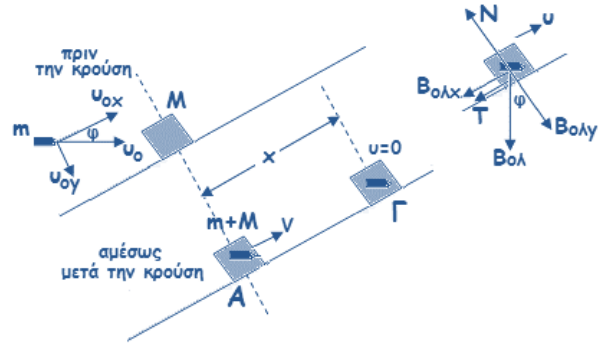


α. δεν υπάρχουν τριβές ανάμεσα στο συσσωμάτωμα και στο επίπεδο,

β. αν υπάρχουν τριβές με συντελεστή $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Απάντηση

Κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου
(διεύθυνση) $x'x$,



$$\text{ΑΔΟ: } \vec{p}_{ολ, \text{πριν}} = \vec{p}_{ολ, \text{μετά}} \Rightarrow m u_{0x} = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M} u_0 \sin \varphi \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

α. ΘΜΚΕ $A \rightarrow \Gamma$:

$$K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_B + W_N \Rightarrow -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -B_{ολx}x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -(m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi \Rightarrow x = \frac{V^2}{2g \eta \mu \varphi} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 4,8 \text{ m}}$$

β. επιπλέον έχουμε τριβή: $T = \mu N = \mu B_{ολy} = \mu(m_1 + m_2)g \sigma \eta \nu \varphi$

$$\text{ΘΜΚΕ } A \rightarrow \Gamma: -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -B_{ολx}x - Tx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -(m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi x - \mu(m_1 + m_2)g \sigma \eta \nu \varphi x \Rightarrow$$

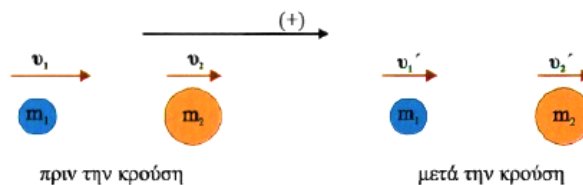
$$x = \frac{V^2}{2g \eta \mu \varphi + 2\mu g \sigma \eta \nu \varphi} \Rightarrow x = \frac{48}{15} \text{ m} \Rightarrow \boxed{x = 3,2 \text{ m}}$$

10. Ελαστική χαρακτηρίζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Σφαιρίδια μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$ αντίστοιχα,

κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες που έχουν μέτρα $u_1 = 10 \text{ m/s}$ και $u_2 = 5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Αν η κρούση των

σωμάτων θεωρηθεί κεντρική και ελαστική, βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.



Απάντηση

$$\text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{P}_{\text{συστ, πριν}} = \vec{P}_{\text{συστ, μετά}} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \quad (2).$$

Επειδή η κρούση θεωρείται ελαστική:

$$K_{\text{συστ, πριν}} = K_{\text{συστ, μετά}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (3)$$

ή

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \Rightarrow$$

$$m_1(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2) \quad (4).$$

Διαιρώντας κατά μέλη και τις δυο σχέσεις (4) και (2) (στο σημείο αυτό αναρωτηθείτε γιατί $v_1 - v'_1 \neq 0$ και $v_2 - v'_2 \neq 0$ έτσι ώστε η διαίρεση να είναι δυνατή) προκύπτει ότι: $\frac{(4)}{(2)} \rightarrow v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \quad (5).$

Η σχέση (1) με την βοήθεια της σχέσης (5) μας δίνει ότι:

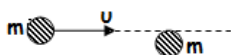
$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{aligned}$$

$$\text{Αντικαθιστώντας τις δοσμένες τιμές : } v'_1 = \frac{2-3}{2+3} 10 + \frac{2 \cdot 3}{2+3} 5 = \boxed{4 \text{ m/s}}$$

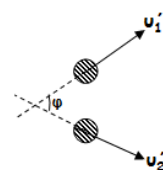
$$v'_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+3} 10 + \frac{3-2}{2+3} 5 = \boxed{9 \text{ m/s}}$$

11. Σφαίρα μάζας m συγκρούεται ελαστικά και όχι κεντρικά με ακίνητη όμοια σφαίρα σε λείο δάπεδο. Δείξτε ότι μετά την κρούση τα σώματα θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις.

Πριν την κρούση:



Μετά την κρούση:



Απάντηση

Α.Δ.Ο.:

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετά} \Rightarrow mv = \sqrt{(mv_1')^2 + (mv_2')^2 + 2mv_1'mv_2' \cdot \cos\varphi}$$

$$\Rightarrow m^2 v^2 = m^2 v_1'^2 + m^2 v_2'^2 + 2m^2 v_1' v_2' \cos\varphi \Rightarrow v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1' v_2' \cos\varphi \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική:

$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \Rightarrow v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} v^2 = v^2 + 2v_1' v_2' \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 90^\circ}$$

12. Αυτοκίνητο μάζας 10^3 Kg είναι σταματημένο σε παγωμένο δρόμο όπου οι τριβές είναι αμελητέες. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο ίδιας μάζας με το πρώτο συγκρούεται μετωπικά με αυτό έχοντας ταχύτητα 18 Km/h . Μετά τη σύγκρουση η συνολική κινητική ενέργεια των οχημάτων είναι το μισό της κινητικής ενέργειας που είχε το δεύτερο αυτοκίνητο πριν την κρούση. Τότε η κρούση είναι:

α. ελαστική;

β. ανελαστική χωρίς συσσωμάτωμα;

γ. ανελαστική με συσσωμάτωμα;

(Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε.)

Απάντηση

$$K_{ολ,μετά} = \frac{K_{πριν}}{2} < K_{ολ,πριν} \rightarrow \text{ανελαστική κρούση}$$

Έστω v_1 και v_2 οι ταχύτητες των οχημάτων μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow$$

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{2}v^2 \Leftrightarrow \boxed{2v_1^2 + 2v_2^2 = v^2} \quad (1)$$

ΑΔΟ:

$$mv = mv_1 + mv_2 \Leftrightarrow \boxed{v = v_1 + v_2} \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} 2v_1^2 + 2v_2^2 = (v_1 + v_2)^2 \Leftrightarrow$$

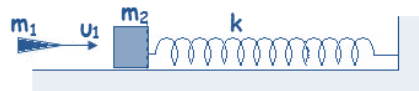
$$2v_1^2 + 2v_2^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(v_1 - v_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{v_1 = v_2 \rightarrow \text{συσσωμάτωμα}}$$

Σωστή είναι η επιλογή γ.

13. Το ιδανικό ελατήριο του σχήματος έχει το φυσικό του μήκος. Βλήμα μάζας $m_1 = 0,2 \text{ Kg}$ σφηνώνεται με ταχύτητα $v_1 = 100 \text{ m/s}$ στο σώμα μάζας $m_2 = 4,8 \text{ Kg}$, με αποτέλεσμα το



ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $\Delta \ell = 0,2\text{m}$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος μάζας m_2 και του εδάφους είναι $\mu=0,1$, να βρείτε:

- α. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση
β. τη σταθερά του ελατηρίου.

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Απάντηση

α. ΑΔΟ: $\vec{p}_{ολ,πριν\chi} = \vec{p}_{ολ,μετά\chi} \Rightarrow$

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{0,2 \cdot 100}{5} u_1 \Rightarrow V = 4 \text{ m/s.}$$

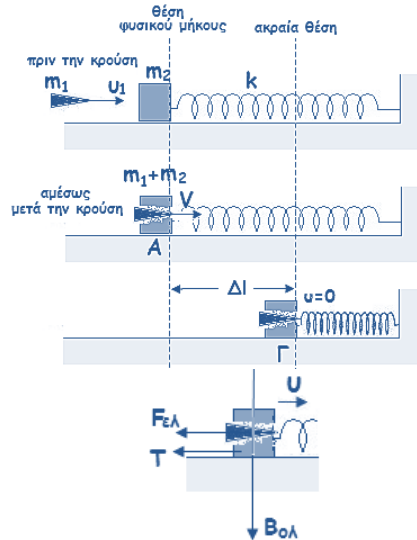
β. ΘΜΚΕ $A \rightarrow \Gamma$: $K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_{F_{τελ}} + W_T + \cancel{W_B} + \cancel{W_N} \Rightarrow$$

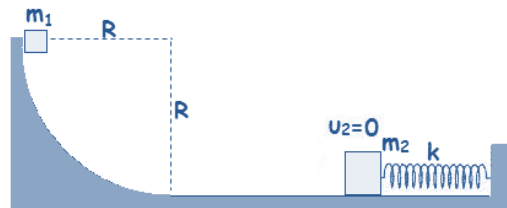
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - T\Delta\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}5 \cdot 4^2 = -\frac{1}{2}k0,2^2 - 5 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 = 0,02k + 1 \Rightarrow 0,02k = 39 \Rightarrow k = \frac{39}{0,02} \Rightarrow \boxed{k = 1950 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$



14. Αφήνουμε σώμα μάζας $m_1=3\text{kg}$ ελεύθερο από κορυφή τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R=3,2\text{m}$. Όταν φθάνει στη βάση του συνεχίζει οριζόντια και συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=1\text{kg}$ που δένεται στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.



- α. Πόσο θα κινηθεί το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία (απόσταση $x_{\max}$);

- β. Ποια η ταχύτητά του στη θέση $x = 0,6 \cdot x_{\max}$; Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Απάντηση

α. ΑΔΜΕ για την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο:

$$m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gR} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με αυτή την ταχύτητα θα συγκρουστεί με το Σ_2 , γιατί το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο.

ΑΔΟ: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot V \Rightarrow \boxed{V = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

ΘΜΚΕ για τη συσπείρωση:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_{F_{ελ}} + \cancel{W_{B_{οκ}}} + \cancel{W_N} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 0 - \frac{1}{2}Kx_{\text{max}}^2 \Rightarrow \boxed{x_{\text{max}} = 1,2\text{m}}$$

β. ΘΜΚΕ από τη θέση που έχει η κρούση (ΘΦΜ) μέχρι τη θέση $x = 0,6x_{\text{max}} = 0,72\text{m}$

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 0 - \frac{1}{2}\kappa x^2 \Rightarrow \boxed{v = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

15. Σώμα μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους $h = 2,4\text{m}$. Κατά την κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο χάνει το 25% της ενέργειάς του. Συνεχίζει στο λείο οριζόντιο επίπεδο και κολλά στο σώμα μάζας $m_2 = 2\text{kg}$ που δένεται σε ελατήριο σταθεράς $k = 75\text{N/m}$. Ποια η συσπείρωση του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία;

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Απάντηση

Αφού χάνει το 25% της ενέργειάς του, του απομένει το 75%, δηλαδή:

$$E_{\text{μηχ.βάση}} = 75\% \cdot E_{\text{μηχ.αρχική}} \Rightarrow$$

$$\cancel{m_1}gh = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cancel{m_1}v_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{8gh}{3}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

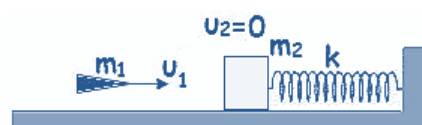
$$\text{ΑΔΟ: } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{8}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΜΚΕ (για τη συσπείρωση):

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 0 - \frac{1}{2}\kappa x_{\text{max}}^2 \Rightarrow \boxed{x_{\text{max}} = 0,4\text{m}}$$

16. Βλήμα μάζας $m_1 = 250\text{g}$ κινείται οριζόντια και προσκρούει με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 100\text{m/s}$ σε ακίνητο ξύλινο κύβο μάζας $m_2 = 12,25\text{kg}$. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο συμπιέζοντας ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Το ελατήριο είναι τοποθετημένο με τον άξονά του κατά τη διεύθυνση της κίνησης του βλήματος και το άλλο του άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχωμα. Επιπλέον το ελατήριο έχει το ελεύθερο άκρο του σ' επαφή



με τον κύβο και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Δεδομένου ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του συσσωματώματος και του επιπέδου είναι $\mu=0,2$, να βρείτε :

- α. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την μετωπική κρούση.
- β. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του βλήματος κατά την κρούση.
- γ. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Απάντηση

α. ΑΔΟ: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

β. $\Delta P_1 = P_1' - P_1 = m_1 V - m_1 v = m_1 (V - v) = -24,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Επομένως: $|\Delta P_1| = 24,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

γ. ΘΜΚΕ:

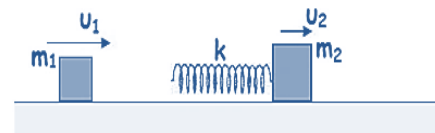
$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow$

$0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 0 - \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 - \mu (m_1 + m_2) g x_{\text{max}} \Rightarrow \boxed{x_{\text{max}} = 0,5 \text{ m}}$

17. Ένας κύβος μάζας $m_1 = 2 \text{ Kg}$ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \text{ m/s}$.

Μπροστά του, στην ίδια κατεύθυνση, κινείται ομαλά ένας άλλος κύβος μάζας $m_2 = 8 \text{ Kg}$ με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 5 \text{ m/s}$.

Στην πίσω πλευρά του δεύτερου κύβου είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο φυσικού μήκους $\ell_0 = 1 \text{ m}$ και σταθεράς $k = 1000 \text{ N/m}$.



Ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των δύο κύβων. Να βρείτε:

- α. την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν οι κύβοι.
- β. τις ταχύτητες με τις οποίες κινούνται μετά από τον αποχωρισμό τους.

Απάντηση

α. Στην ελάχιστη απόσταση τα σώματα θα έχουν ίσες ταχύτητες. Τότε σύμφωνα με την ΑΔΟ για το σύστημα: μάζα m_1 -μάζα m_2 -ελατήριο ισχύει ότι

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v + m_2 v \Rightarrow 60 = 10v \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

και από Α.Δ.Ε., $K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 5^2 = 360 + 1000\Delta l^2 \Rightarrow 40 = 1000\Delta l^2 \Rightarrow \boxed{\Delta l = 0,2\text{m}}.$$

β. Επειδή η κρούση είναι κεντρική – ελαστική,

$\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}$ (Α.Δ.Ο.) και $K_{ο\lambda_{\alpha\rho\chi}} = K_{ο\lambda_{\tau\epsilon\lambda}}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \left(\frac{2 - 8}{2 + 8} \cdot 10 + \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} \cdot 5 \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{v'_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

και

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \left(\frac{2 \cdot 2}{2 + 8} \cdot 10 + \frac{8 - 2}{2 + 8} \cdot 5 \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{v'_2 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

Επιμέλεια: Γκιώνη Βασιλική