Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1.	Σωστό	2.	Σωστό	3.	Σωστό	4.	Σωστό
5.	Σωστό	6.	Σωστό	7.	Λάθος	8.	Λάθος
9.	Σωστό	10.	Σωστό	11.	Σωστό	12.	Λάθος
13.	Λάθος	14.	Σωστό	15.	Σωστό	16.	Σωστό
17.	Σωστό	18.	Σωστό	19.	Σωστό	20.	Σωστό
21.	Σωστό	22.	Σωστό	23.	Σωστό	24.	Σωστό
25.	Λάθος	26.	α) Λάθος β) Σωστό	27.	Λάθος	28.	Σωστό
29.	Σωστό	30.	Λάθος	31.	Σωστό	32.	Σωστό
33.	Λάθος	34.	Λάθος	35.	Σωστό	36.	Σωστό
37.	Σωστό	38.	Σωστό	39.	Σωστό	40.	Σωστό
41.	Λάθος	42.	Σωστό	43.	Λάθος	44.	Λάθος
45.	Σωστό	46.	Λάθος	47.	Λάθος	48.	Λάθος
49.	Σωστό	50.	Σωστό	51.	Λάθος	52.	Σωστό
53.	Λάθος	54.	Λάθος	55.	Λάθος	56.	Σωστό
57.	Σωστό						

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $10x+2y=13$ (1). Να γράψετε μια εξίσωση ώστε να μην έχει κοινή λύση με την εξίσωση (1).

Λύση

Έχουμε $\lambda_1=-5$ παίρνουμε $20x+4y=7$ οπότε $\lambda_2=-5 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(0,2) και Β(2,0).

Λύση

- Έχουμε (ε) $y=\lambda x+\beta$
- $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 2=\lambda\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=2$
- $B \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0=\lambda 2+\beta \Leftrightarrow 0=2\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda=-1$
- Άρα $y=-x+2$

3. Να δείξετε ότι και οι τρεις ευθείες (ε_1): $x+y=4$, (ε_2): $2x-y=5$, (ε_3): $3x+y=10$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

$$\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x=9 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array} \quad \kappa(3,1)$$

$\kappa \in (\varepsilon_3) \Leftrightarrow 3\cdot 3+1=10 \Leftrightarrow 10=10$

Άρα και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το $\kappa(3,1)$

4. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \lambda x+y=2 \\ \lambda x+\lambda y=\lambda-1 \end{array}\right\}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

- $D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)$
- $D_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda \end{vmatrix}=2\lambda-\lambda+1=\lambda+1$
- $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda-1-2\lambda=-\lambda-1$

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0 \ \text{ και } \ \lambda\neq 1$.

  Το σύστημα έχει μοναδική λύση

  $x=\dfrac{D_x}{D}\Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)} \qquad y=\dfrac{D_y}{D}\Leftrightarrow y=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}$

- Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \ \text{ ή } \ \lambda=1$

  για λ=0 $\left.\begin{array}{l} y=2 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$ Αδύνατο

  για λ=1 $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

  (x,y) = (2-κ,κ) $\kappa\in\mathbb{R}$

5. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}(x+2)(4-y)=-xy\\ x+y=19\end{matrix}\right\}$

Λύση

$$\left.\begin{matrix}(x+2)(4-y)=-xy\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}4x-xy+8-2y=-xy\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}4x-2y=-8\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2x-y=-4\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=5\\ y=14\end{matrix}$$

6. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}y=x^2+1\\ y-x=1\end{matrix}\right\}$

Λύση

$$\left.\begin{matrix}y=x^2+1\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=(y-1)^2+1\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y^2-3y+2=0\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=1 \text{ ή } y=2\\ x=y-1\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{για} \begin{matrix}y=1,\ x=0\ \ A(0,1)\\ y=2,\ x=1\ \ B(1,2)\end{matrix}$$

7. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}xy=6\\ x^2+y^2=13\end{matrix}\right\}$

Λύση

$$\left.\begin{matrix}xy=6\\ x^2+y^2=13\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{6}{x}\ \ x\neq 0\\ x^2+y^2=13\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{6}{x}\\ x^2+(\frac{6}{x})^2=13\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{6}{x}\\ x^4-13x^2+36=0\end{matrix}\right\}$$

- Παίρνω $x^2=\omega\geq 0$, οπότε έχουμε $\omega^2-13\omega+36=0\Rightarrow$ $\omega_1=9$ ή $\omega_2=4$

- Για $\omega=9$ έχουμε $x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$

  Για $x=3$ $\quad y=\frac{6}{3}=2\quad A(3,2)$

  Για $x=-3$ $\quad y=\frac{6}{-3}=-2\quad B(-3,-2)$

- Για $\omega=4$ έχουμε $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$ οπότε $\Gamma(2,3)$ $\Delta(-2,-3)$

8. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(13,5) και B(8,20) να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

Λύση

- Έχουμε $f(13)=5$ και $f(8)=20$.
- Επειδή $8<13$ και $f(8)=20>5=f(13)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

i. να βρείτε το πεδίο ορισμού της f,
ii. να δείξετε ότι $f(x)\le 1$,
iii. να δείξετε ότι το 1 είναι η μέγιστη τιμή της f,
iv. να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

Λύση

i. $x^2+1\neq 0$ ισχύει για $A_f=\mathbb{R}$.

ii. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ ισχύει.

iii. Έχουμε ότι $f(1)=\dfrac{2}{1+1}=1$ και $f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα το 1 είναι η μέγιστη τιμή της f.

iv. Έχουμε $x,\,-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}\Leftrightarrow f(-x)=\frac{-2x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

10. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=x^3+x-2$.

Λύση

$A_f=\mathbb{R}$ έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3$$
$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2 \quad (+)$$
$$x_1^3+x_1-2<x_2^3+x_2-2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

11. Έστω συνάρτηση : $f(x)=x^2-4$, $x\in\mathbb{R}$

i. να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$,
ii. να δείξετε ότι η f είναι άρτια,
iii. Με ποια μετατόπιση της $g(x)=x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

Λύση

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^2-4\Leftrightarrow f(x)+4=x^2 \\ x^2\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} f(x)+4\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge -4 \\ f(0)=-4\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\ge f(0) \quad x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

i. $f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$.

ii. Άρα, η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.

iii. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την $g(x)=x^2$ κατακόρυφα, 4 μονάδες προς τα κάτω.

12. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{x+5}$
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της,
ii. Να εξετάσετε αν η f είναι περιττή,
iii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

$$\left.\begin{matrix}5-x\geq 0\\ 5+x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\leq 5\\ x\geq -5\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in[-5,5] \qquad A=[-5,5]$$

i. έχουμε $-x,x\in[-5,5]$

$$f(-x)=\sqrt{5-(-x)}-\sqrt{-x+5}=\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=-\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$

$$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 5-x_1>5-x_2\Rightarrow\sqrt{5-x_1}>\sqrt{5-x_2}\ (1)$$

$$x_1<x_2\Rightarrow 5+x_1<5+x_2\Rightarrow\sqrt{5+x_1}<\sqrt{5+x_2}\Rightarrow-\sqrt{5+x_1}>-\sqrt{5+x_2}\,(2)$$

iii. Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη

$$\sqrt{5-x_1}-\sqrt{5+x_1}>\sqrt{5-x_2}-\sqrt{5+x_2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

13. Αν A είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο A τότε και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Λύση

- Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$.
- Επειδή οι f και g είναι γνησίως αύξουσες στο A τότε έχουμε $f(x_1)<f(x_2)$ και $g(x_1)<g(x_2)$.
- Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :
  $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$
- Άρα, οι $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+5x^2-5x-7$.
Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

Λύση
$P(1)=1+5-5-7=-6$.

Άρα, το υπόλοιπο είναι υ = -6.

15. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^6+5x^2+7$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

Λύση
$P(\rho)=\rho^6+5\rho^4+7\neq 0$. Άρα το ρ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Οπότε το $x-\rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

16. Δίνεται πολυώνυμο της μορφής $P(x)=\lambda x^3-(\mu+1)x-1$ το οποίο έχει παράγοντα $x-1$ και για $x=-2$ παίρνει την τιμή -15. Να βρείτε τα λ και μ.

Λύση
$$\left.\begin{matrix} P(1)=0 \\ P(-2)=-15 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda-(\mu+1)-1=0 \\ -8\lambda+2(\mu+1)-1=-15 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda-\mu=2 \\ -4\lambda+\mu=-8 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \mu=0 \\ \lambda=2 \end{matrix}\right\}$$

17. Να βρείτε τα Α και Β ώστε να ισχύει $\frac{1}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ με $x\neq 0$ και $x\neq -1$

Λύση
$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}=+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow 1=A(x+1)+B(x)\Leftrightarrow 1=(A+B)x+A\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x+A-1=0\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A-1=0 \end{matrix}\right|\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} B=-1 \\ A=1 \end{matrix}\right|$$

Άρα $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\quad x\neq 0\quad x\neq 1$

18. Αν ισχύει $P(x-2)=x^2+x+1$ να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση
$P(x)=(x+2)^2+(x+2)+1\Leftrightarrow P(x)=x^2+5x+7$

19. Με το σχήμα Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=4x^3-2x^4-x+4$ με το $x-2$.

Λύση

$P(x)=-2x^4+4x^3-x+4$

-2	4	0	-1	4	2
	-4	0	0	-2	
-2	0	0	-1	2	

Άρα π (x) = $-2x^3-1$ και υ=2

20. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -2 και διαιρούμενο με το $x-3$ δίνει υπόλοιπο -10.
Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-3)$.

Λύση

Έστω π(x) και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x-1) (x-3).

Επειδή το (x-1) (x-3) είναι δευτέρου βαθμού το υ (x) θα είναι της μορφής

υ(x) =αx +β α,β $\in \mathbb{R}$

P(x) = (x-1) (x-3) π(x) +αx+β

$$\left.\begin{array}{r} P(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha+\beta = -2 \\ P(3) = -10 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta = -10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha-\beta=2 \\ 3\alpha+\beta=-10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha-\beta=2 \\ 2\alpha=-8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\alpha=-4 \quad 4-\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2$ άρα $\upsilon(x)=-4x+2$

21. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $2x^3+(5-\lambda^3)x^2+\lambda-1=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το 1. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

Λύση

Για x=1 έχουμε $2+(5-\lambda^3)+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda^3-\lambda-6=0$

Οι διαιρέτες του -6 είναι $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα της (1) με Horner έχουμε:

1	0	-1	-6	2
	2	4	6	
1	2	3	0	

$(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+3)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda^2+2\lambda+3=0$

$\Delta=4-12=-8<0$

άρα λ=2

Για λ=2 η εξίσωση γίνεται : $2x^3-3x^2+1=0$ με το σχήμα Horner έχουμε

2	-3	0	1	1
	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

$(x-1)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $2x^2-x-1=0$

$\Delta=9 \quad x=\frac{1+3}{4}=1$ ή $x=\frac{1-3}{4}=\frac{-1}{2}$

άρα x=1 διπλή ρίζα και $x=\frac{-1}{2}$

22. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+2)^6-7(x+2)^3-8=0$

Λύση

$(x+2)^6-7(x+2)^3-8=0$.

Έστω $(x+2)^3=\omega$ οπότε έχουμε:

$\omega^2-7\omega-8=0 \Rightarrow \omega=8$ ή $\omega=-1$

Για ω=8 έχουμε $(x+2)^3=8 \Leftrightarrow x+2=2 \Leftrightarrow x=0$

Για ω=-1 έχουμε $(x+2)^3=-1 \Leftrightarrow x+2=-1 \Leftrightarrow x=-3$

23. Να λύσετε την ανίσωση: $2x^3-5x^2+4x-1>0$

Λύση

Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-5x^2+4x-1$

2	-5	4	-1	1
	2	-3	1	
2	-3	1	0	

$2x^3-5x^2+4x-1=(x-1)(2x^2-3x+1)$

Το $2x^2-3x+1$ έχει ρίζες το 1 και το $\frac{1}{2}$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1 $+\infty$
x-1	-	-	0 +
$2x^2$-3x+1	+	0 -	0 +
P(x)	-	+	+

Άρα $x\in(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

24. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $\frac{2x+7}{x+3}<1$ **ii.** $\frac{x-7}{x^2-3}<\frac{1}{x}$

Λύση

	-∞ -√3	**0**	**3/7**	**√3**	**+∞**
x	**-**	**-**	**+**	**+**	**+**
-7x+3	**+**	**+**	**+**	**-**	**-**
x^2-3	**+**	**-**	**-**	**-**	**+**
Γ	**-**	**+**	**-**	**+**	**-**

i. $\frac{2x+7}{x+3}<1\Leftrightarrow\frac{2x+7}{x+3}-1<0\Leftrightarrow\frac{2x+7-x-3}{x+3}<0\Leftrightarrow\frac{x+4}{x+3}<0$ με $x\neq-3$

$(x+4)(x+3)<0$ $x\in(-4,-3)$

ii. $\frac{x-7}{x^2-3}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{x-7}{x^2-3}-\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow\frac{\cancel{x^2}-7x-\cancel{x^2}+3}{x(x^2-3)}<0$ με $x^2-3\neq0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{3}$ $x\neq0$

$(-7x+3)x(x^2-3)<0$ $-7x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$ $x=0$ $x=\pm\sqrt{3}$

$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\frac{3}{7})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

25. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $\sqrt{x-3} \geq -2$ **ii.** $\sqrt{x+1} \geq 1$

Λύση

i. $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ έχουμε $\sqrt{x-3} \geq 0$

Άρα η ανίσωση $\sqrt{x-3} \geq -2$ ισχύει για κάθε $x \geq 3$.

ii. $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\sqrt{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ άρα $x \in [0,+\infty)$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $2^{x+1} - 4 \cdot 2^x + 8 = 0$ **ii.** $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{16}$ **iii.** $\frac{1}{2^x} = 16$

Λύση

i. $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

ii. $\frac{1}{2^x} = 16 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Leftrightarrow x = -4$

iii. $2^{x+1} - 4 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2 - 4 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 2^x = -8 \Leftrightarrow$

$2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $9^x - 3^x - 6 = 0$ **ii.** $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$

Λύση

i. $9^x - 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

Θέτουμε $3^x = w \rangle 0$ οπότε $w^2 - w - 6 = 0$

$w_1 = -2$ Απορρίπτεται ή $w_2 = 3$ οπότε $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

ii. $3^X - 4\sqrt{3^X} + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3^X})^2 - 4\sqrt{3^X} + 3 = 0$

Θέτουμε $\sqrt{3^x} = w > 0$ $w^2 - 4w + 3 = 0 \Leftrightarrow w = 1$ ή $w = 3$

Άρα:

$\sqrt{3^x} = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$
ή
$\sqrt{3^x} = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $3^{|3x-4|}-9=0$ **ii.** $7^{3x}+9\cdot 5^{2x}=5^{2x}+9\cdot 7^{3x}$

Λύση

i. $3^{|3x-4|}=9 \Leftrightarrow |3x-4|=2 \Leftrightarrow 3x-4=2$ **ή** $3x-4=-2 \Leftrightarrow x=2$ **ή** $x=\dfrac{2}{3}$

ii. $7^{3x}+9\cdot 5^{2x}=5^{2x}+9\cdot 7^{3x} \Leftrightarrow 8\cdot 5^{2x}=8\cdot 7^{3x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{5^2}{7^3}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $3^{x^2-7x+10}<1$ **ii.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-4}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}$

Λύση

i. $3^{x^2-7x+10}<1 \Leftrightarrow x^2-7x+10<0 \Leftrightarrow 2<x<5$

ii. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-4}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x-4>x+1 \Leftrightarrow x>5$

30. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\lambda-2}{\lambda-5}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Πρέπει $\lambda-5\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 5$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν

$$\frac{\lambda-2}{\lambda-5}>1 \Leftrightarrow \frac{\lambda-2-(\lambda-5)}{\lambda-5}>0 \Leftrightarrow \frac{3}{\lambda-5}>0 \Leftrightarrow \lambda>5$$

31. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων στις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\log\dfrac{5\cdot\alpha\beta}{6\gamma}$ **ii.** $\ln(5x^2\cdot\alpha)$, με α>0, β>0, γ>0

Λύση

i. $\log\dfrac{5\alpha\beta}{6\gamma}=\log 5+\log\alpha+\log\beta-\log 6-\log\gamma$

ii. $\ln(5x^2\alpha)=\ln 5+2\ln|x|+\ln\alpha$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(x-3)+\log(x+6)=\log 2+\log 5$ **ii.** $\ln(x^2-2x)=\ln x$

Λύση

i. Πρέπει $x-3>0$ και $x+6>0 \Rightarrow x>3$

$$\log(x-3)+\log(x+6)=\log 2+\log 5 \Leftrightarrow \log(x-3)(x+6)=\log 10 \Leftrightarrow$$
$$x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-7 \rightarrow \text{Απορρίπτεται}$$

Άρα: x = 4

ii. Πρέπει $x^2-2x>0$ και $x>0 \Leftrightarrow x(x-2)>0 \Rightarrow x>2$

$x>0$

$$\ln(x^2-2x)=\ln x \Leftrightarrow x^2-2x=x \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3) \Leftrightarrow x=0$$
ή $x=3$

Η $x=0$ απορρίπτεται.

Άρα $x=3$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $\ln(x-e)\leq 0$ **ii.** $\ln\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)<0$

Λύση

i. Πρέπει $x-e>0 \Leftrightarrow x>e$

$$\ln(x-e)\leq 0 \Leftrightarrow \ln(x-e)\leq \ln 1 \Leftrightarrow x-e\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 1+e$$

ii. Πρέπει $x^2+\frac{3}{2}x>0 \Leftrightarrow x(x+\frac{3}{2}>0 \Leftrightarrow xe(-\infty,\frac{-3}{2})\cup(0,+\infty)$

$$\ln(x^2+\frac{3}{2}x)<\ln 1 \Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}x<1 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2<0$$

Δ= $9+16=25$ $x=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{-3-5}{4}=-2$

Άρα $xe(-2,\frac{1}{2})$

34. Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln(x+3) \geq \ln(x+1) + \ln(x+8)$

Λύση

Πρέπει $x > -3, x > -1, x > -8 \Rightarrow x > -1$

Έχουμε $2\ln(x+3) \geq \ln(x+1) + \ln(x+8) \Leftrightarrow$

$$\ln(x+3)^2 \geq \ln(x+1)(x+8) \Leftrightarrow (x+3)^2 \geq (x+1)(x+8) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + 9x + 8 \Leftrightarrow 1 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Άρα $x e(-1, \frac{1}{3}]$

35. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(3^x + 2) = 2x\log 3$ **ii.** $\log(2^x + 2\cdot 3^x) + \log 81 = x\log 3 + \log 178$

Λύση

i. $\log(3^x + 2) = 2x\log 3 \Leftrightarrow \log(3^x + 2) = \log 3^{2x} \Leftrightarrow$

$3^x + 2 = 3^{2x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 2$ ή $3^x = -1$ → Αδύνατο

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x\ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

ii. $\log(2^x + 2\cdot 3^x) + \log 81 = x\log 3 + \log 178 \Leftrightarrow$

$$\log(2^x + 2\cdot 3^x)81 = \log(3^x \cdot 178) \Leftrightarrow (2^x + 2\cdot 3^x)81 = 3^x \cdot 178 \Leftrightarrow$$

$$81\cdot 2^x = 16\cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x = 4$$

36. Να λύσετε τα συστήματα: **i.** $\left.\begin{matrix} xy-8=0 \\ \log y - 2\log x = 0 \end{matrix}\right\}$ **ii.** $\left.\begin{matrix} y-2x=0 \\ \log x + \log 2 = 2\log y \end{matrix}\right\}$

Λύση

i.

$$\left.\begin{matrix} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \\ x > 0 y > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} xy = 8 \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^3 = 8 \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x > 0 y > o$$

ii.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ 2\log y=\log x+\log 2 \\ y>0x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x \\ \log y^2=\log 2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x \\ y^2=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=y \\ y=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y(y-1)=0 \\ y=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=0\,/\,y=1 \\ y=2x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=0,\ x=0 \ \rightarrow \text{Απορρίπτεται} \\ y=1,\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Άρα $(x,y)=(\frac{1}{2},1)$

37. Δίνεται:

$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$ όπου $0^\circ<\theta<90^\circ$. Υπολογίστε:

i) $\eta\mu\theta$ ii) $\varepsilon\varphi\theta$

Λύση

i) Είναι:

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta},$$

$$0<\theta<90^\circ \Leftrightarrow \eta\mu\theta=+\sqrt{1-0,6^2}=\sqrt{1-0,36}=\sqrt{0,64}=0,8.$$

ii) $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{0,8}{0,6}=\dfrac{4}{3}.$

38. Εάν $\varepsilon\varphi\theta=\frac{8}{15}$ και $180^\circ<\theta<270^\circ$, υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

Λύση

Έχουμε:

$$\eta\mu\theta=\pm\frac{\frac{8}{15}}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}}=\pm\frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}}=\pm\frac{8}{17},\ 180^\circ<\theta<270^\circ \Leftrightarrow \eta\mu\theta=-\frac{8}{17}$$

και

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\varepsilon\varphi\theta}=\frac{-\frac{8}{17}}{\frac{8}{15}}=-\frac{15}{17}.$$

39. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $A=\dfrac{\eta\mu(3\pi+\alpha)\sigma\varphi(7\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(3\pi+\alpha)\sigma\varphi(4\pi+\alpha)\eta\mu\alpha}.$

Λύση
Είναι:

$$A=\frac{\eta\mu(\pi+\alpha)\sigma\varphi(\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(\pi\alpha)\sigma\varphi\alpha\eta\mu\alpha}=\frac{-\eta\mu\alpha\sigma\varphi\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\varphi\alpha\eta\mu\alpha}=1.$$

40. Να εξετάσετε αν οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $4x^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$ μπορούν να είναι το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας θ.

Λύση
Είναι:

$$x_1+x_2=-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \text{ και } x_1x_2=-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

οπότε:

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } x_2=\frac{1}{2}$$

41. Να δείξετε ότι $A=\dfrac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{3}\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}\sigma\varphi\frac{7\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Λύση

$$A=\frac{\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{2\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{-\eta\mu\frac{\pi}{4}\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}}{2\left(-\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\sigma\varphi\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 3}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

42. Αν $\varepsilon\varphi x=1$ τότε $|\eta\mu x|=|\sigma\upsilon\nu x|$.

Λύση
Σωστό. Είναι:

$$\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow|\eta\mu x|=|\sigma\upsilon\nu x|.$$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

i. να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii. να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία.
iii. να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$

Λύση
i. Πρέπει: $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$, άρα $A=(0,+\infty)$

ii. Για κάθε $x_1,\ x_2 \in (0,+\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Rightarrow \ln\left(e^{x_1} - 1\right) < \ln\left(e^{x_2} - 1\right) \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

iii. $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) < \ln 1 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow \boxed{x < \ln 2}$

44. Σε τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 60°, 135°, 210°, -45°, 330°.

Λύση

Εφαρμογή πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: «ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1.	Λάθος	2.	Λάθος	3.	Σωστό	4.	Λάθος
5.	Λάθος	6.	Λάθος	7.	Σωστό	8.	Λάθος
9.	Λάθος	10.	Λάθος	11.	Λάθος	12.	Σωστό
13.	Σωστό	14.	Σωστό	15.	Σωστό	16.	Σωστό

Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: «ΕΥΘΕΙΑ»

17.	Λάθος	18.	Λάθος	19.	Σωστό	20.	Σωστό
21.	Σωστό	22.	Λάθος	23.	Λάθος	24.	Λάθος
25.	Σωστό	26.	Λάθος	27.	Λάθος	28.	Λάθος
29.	Σωστό	30.	Λάθος	31.	Σωστό		

Γ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ»

32.	Σωστό	33.	Σωστό	34.	Σωστό	35.	Λάθος
36.	Λάθος	37.	Σωστό	38.	Λάθος	39.	Λάθος
40.	Λάθος	41.	Σωστό	42.	Λάθος	43.	Σωστό
44.	Λάθος	45.	Λάθος	46.	Σωστό	47.	Σωστό
48.	Σωστό	49.	Σωστό	50.	Σωστό		

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: «ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ»

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι: $\vec{AM} = \dfrac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2}$.

Λύση

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma M}\,(+) \end{aligned}\right\}$$

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Gamma M}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2}$$

2. Αν ισχύει $\overrightarrow{K\Lambda} = 2\overrightarrow{\Lambda N}$, τότε να αποδείξετε ότι $3\overrightarrow{O\Lambda} = \overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{ON}$

Λύση

Ισχύει: $\overrightarrow{K\Lambda} = 2\overrightarrow{\Lambda N} \Rightarrow \overrightarrow{O\Lambda} - \overrightarrow{OK} = 2(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{O\Lambda}) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{O\Lambda} - \overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{O\Lambda} \Rightarrow 3\overrightarrow{O\Lambda} = 2\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$$

3. Αν ισχύει $7\overrightarrow{KA} - 4\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

$$7\overrightarrow{KA} - 4\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KA} - 4\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$4\left(\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}\right) + 3\left(\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{K\Gamma}\right) = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{\Gamma A} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{\Gamma A} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{\Gamma A}$$

Και επειδή έχουν κοινό άκρο, το Α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

4. Αν για τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ και $\vec{O\Gamma}$ ισχύει $\vec{OA}=5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, $\vec{OB}=4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Είναι $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(4\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

και $\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=(3\vec{\alpha}+6\vec{\beta})-(4\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

Άρα, $\vec{AB}=\vec{B\Gamma}$ και Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|(x+2)\vec{\alpha}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

Λύση

$\left|(x+2)\vec{\alpha}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|\Rightarrow\left|(x+2)\right|\left|\vec{\alpha}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|\Rightarrow\left|x+2\right|=5\Rightarrow$ αφού $\left|\vec{\alpha}\right|\neq\vec{0}$

$x+2=5\Rightarrow x=3$

$x+2=-5\Rightarrow x=-7$

6. Αν έχουμε $\vec{OA}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{OB}=3\vec{\alpha}+7\vec{\beta}-4\vec{\gamma}$ και $\vec{O\Gamma}=7\vec{\alpha}+15\vec{\beta}-14\vec{\gamma}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Είναι: $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta}-4\vec{\gamma})-(\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma})=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}-5\vec{\gamma}$ (1)

και
$\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=(7\vec{\alpha}+15\vec{\beta}-14\vec{\gamma})-(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta}-4\vec{\gamma})=4\vec{\alpha}+8\vec{\beta}-10\vec{\gamma}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow\vec{B\Gamma}=2\vec{AB}\Rightarrow\vec{B\Gamma}\parallel\vec{AB}$ άρα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

7. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3\lambda+\mu+1,\lambda-\mu+7)$ είναι μηδενικό.

Λύση

$\vec{\alpha}=(3\lambda+\mu+1,\ \lambda-\mu+7)$

Πρέπει : $3\lambda+\mu+1=0$ (1) και $\lambda-\mu+7=0$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 4\lambda+8=0\Rightarrow\lambda=-2$

Και $3\cdot(-2)+\mu+1=0\Rightarrow\mu=5$

Άρα, $(\lambda,\mu)=(-2,5)$

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-3,1)$ & $\vec{\beta}=(5,2)$.
Να βρείτε το διάνυσμα $-2\vec{\alpha}+\beta$

Λύση

Είναι: $-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-2(-3,1)+(5,2)=$

$$=(6,-2)+(5,2)=(6+5,-2+2)=(11,0)$$

9. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων: **α)** $(-\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{i}+(\eta\mu\theta)\vec{j}$ **β)** $\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{1}{2}\vec{j}$

Λύση

α) $\left|(-\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{\imath}+(\eta\mu\theta)j\right|=$

$$=\sqrt{(-\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(\eta\mu\theta)^2}=1$$

β) $\left|\sqrt{\frac{2}{4}}\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{j}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{3}{8}}$$

10. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων:
α) $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}$ **β)** $\vec{\alpha}=(8,-2)$

Λύση

α) $\vec{v}=(2,5)$ άρα $\lambda_{\vec{v}}=\frac{5}{2}$

β) $\vec{\alpha}=(8,-2)$ άρα $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

11. Αν ένα τρίγωνο έχει κορυφές $A(1,3)$, $B(0,2)$, $\Gamma(1,0)$, τότε να αποδείξετε ότι είναι: **α)** ισοσκελές **β)** ορθογώνιο

Λύση

Είναι Α (1,3), Β (0,2), Γ (1,0) και

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{B\Gamma}|=\sqrt{(X_\Gamma-X_B)^2+(y_\Gamma-y_B)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right| = \sqrt{(X_{\Gamma}\text{-}X_{A})^2 + (y_{\Gamma}\text{-}y_{A})^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

Άρα, το ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές αφού $\left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| \neq \left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|$

Ούτε ορθογώνιο διότι : $\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|^2 \neq \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2$

12. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε $A(1,4)$, $B(-1,9)$ και $\Delta(5,-3)$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

Λύση

Είναι Α (1,4), Β (-1,9), Δ (5,-3)

Έστω Γ(x,y).

Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο θα πρέπει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow (x_{AB}, y_{AB}) = (x_{\Delta\Gamma}, y_{\Delta\Gamma}) \Rightarrow$$
$$x_{AB} = x_{\Delta\Gamma} \Rightarrow x_B - x_A = x_\Gamma - x_\Delta \Rightarrow -1-1 = x-5 \Rightarrow x = 3$$

$$y_{AB} = y_{\Delta\Gamma} \Rightarrow y_B - y_A = y_\Gamma - y_\Delta \Rightarrow 9-4 = y+3 \Rightarrow y = 2$$

Άρα, Γ (3,2).

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3,1)$, $\vec{\beta} = (2,1)$ & $\vec{\gamma} = (1,4)$.
Να υπολογίσετε: $\left|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right|$

Λύση

Είναι $\vec{\alpha} = (-3,1)$, $\vec{\beta} = (2,1)$ και $\vec{\gamma} = (1,4)$

Έχουμε $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = (-3,1) - 2(2,1) + (1,4) = (-3-4+1, 1-2+4) = (-6,3)$

Άρα, $\left|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$. **α)** Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=(-1,2)$ & $\vec{\beta}=(2,-2)$. **β)** Να βρείτε τον $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

α)

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2) \\ \vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$3\vec{\alpha}=(4,-2)+(-7,8)\Rightarrow 3\vec{\alpha}=(-3,6)\Rightarrow \vec{\alpha}=\frac{1}{3}(-3,6)\Rightarrow \vec{\alpha}=(-1,2)$$

Για $\vec{\alpha}=(-1,2)$ έχουμε : $(-1,2)-3\vec{\beta}=(-7,8)\Rightarrow$

$$-3\vec{\beta}=(-7,8)-(-1,2)\Rightarrow -3\vec{\beta}=(-6,6)\Rightarrow \vec{\beta}=-\frac{1}{3}(-6,6)\Rightarrow \vec{\beta}=(2,-2)$$

β)

Είναι $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

Έχουμε $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(-1,2)+(2,-2)=(-\kappa,2\kappa)+(2,-2)=(-\kappa+2,2\kappa-2)$

Άρα, $\lambda_1=\dfrac{2\kappa-2}{-\kappa+2}$, όπου λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με $\kappa\neq 2$.

Επίσης, $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=2(-1,2)+3(2,-2)=(-2,4)+(6,-6)=(4,-2)$,

με $\lambda_2=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$, όπου λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

Πρέπει $\lambda_1\lambda_2=-1\Rightarrow \dfrac{2\kappa-2}{-\kappa+2}\cdot(-\dfrac{1}{2})=-1\Rightarrow$

$$\frac{2\kappa-2}{-2\kappa+4}=1\Rightarrow 2\kappa-2=-2\kappa+4\Rightarrow 4\kappa=6\Rightarrow \kappa=\frac{6}{4}\Rightarrow \kappa=\frac{3}{2}$$

15. Δίνονται τα σημεία Α(2,3) και Β(3,-4). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $y'y$ ώστε $\hat{AMB} = 90^o$.

Λύση

Έστω $M(0, y_M)$ το ζητούμενο σημείο του yy'.

Είναι: $\overrightarrow{MA} = (x_A - x_{M,}\ y_A - y_M) = (2-0, 3-y_M) = (2, 3-y_M)$

$$\lambda_{\overrightarrow{MA}} = \frac{3-y_M}{2}$$

Είναι : $\overrightarrow{MB} = (3-0, -4-y_M)$. Άρα, $\lambda_{\overrightarrow{MB}} = \dfrac{-4-y_M}{3}$.

Επειδή $AMB = 90^\circ$ θα ισχύει :

$$\lambda_{\overrightarrow{MA}} \cdot \lambda_{\overrightarrow{MB}} = -1 \Rightarrow \frac{3-y_M}{2} \cdot \frac{-4-y_M}{3} = -1 \Rightarrow \Rightarrow$$

$$(3-y_M)(4+y_M) = 6 \Rightarrow 12 + 3y_M - 4y_M - {y_M}^2 = 6 \Rightarrow$$

$${y_M}^2 + y_M - 6 = 0$$

$y_M = 2$ ή $y_M = -3$

Άρα, $M(0,2)$ ή $M(0,-3)$

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 6$. Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε: **α)** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και **β)** $\vec{\alpha}^2$.

Λύση

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\,(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \cancel{2} \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} = 6$

β) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 2^2 = 4$

17. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 1)$.

Λύση

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 6 - 2 = 4$

18. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{5}$, τότε να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

Λύση

Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\sqrt{5}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5 \Rightarrow$

$$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5 \Rightarrow 1+1+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{3}{2} \qquad (1)$$

Έχουμε $\vec{\kappa}\cdot\vec{v}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=$

$$=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}-2|\vec{\beta}|^2=$$

$$=1+\frac{3}{2}-2\cdot 1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

19. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Λύση

Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \cancel{\vec{\alpha}}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}}^2=$

$$=\cancel{\vec{\alpha}}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}}^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$$

20. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$ τότε να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha}})$.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4 \quad (1)$

Και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=\dfrac{(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|} \quad (2)$

$$(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\alpha}|^2\overset{(1)}{=}-4-2^2=0$$

Άρα (2) $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=0 \Rightarrow (\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=\frac{\Pi}{2}$

21. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ τότε να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

Λύση

Έχουμε $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=3 \Rightarrow$

$$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=3 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=3 \Rightarrow$$

$$1+4+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=3 \Rightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=-1 \qquad (1)$$

Άρα $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+4|\vec{\beta}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=$

$$=1+16+4=21$$

Επομένως $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{21}$

22. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$.

Λύση

Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ η σχέση είναι προφανής.

Έστω και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$

Είναι :

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\right)^2 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1 \Rightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta})=0^0 \Rightarrow \vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$$

Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: «ΕΥΘΕΙΑ»

23. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης -4.

Λύση

Είναι :

$(\varepsilon): y - y_A = \lambda(X - X_A)$ή

$(\varepsilon): y - 2 = -4(x+1)$ή

$(\varepsilon): y - 2 = -4x - 4 \Rightarrow (\varepsilon): 4x + y + 2 = 0$

24. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-3,2)$ και $B(4,1)$.

Λύση

$$\lambda_{AB} = \frac{y_{AB}}{x_{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{4+3} = \frac{-1}{7}$$

άρα η $AB: (\varepsilon): y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A)*$

$(AB) \to (\varepsilon): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B)$

$*$ή $(AB): 7y - 14 = -x - 3 \Rightarrow (AB): x + 7y - 11 = 0$

25. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-1,2)$, $B(1,6)$ και $\Gamma(2,8)$ είναι συνευθειακά.

Λύση

Βρίσκουμε την ευθεία (ΑΒ) $\lambda_{AB} = \frac{4}{2} = 2$

y-2 = 2 (x+1) $\Leftrightarrow$ y-2 =2x +2 $\Rightarrow$-2x+y-4=0

Άρα (ΑΒ) : -2x+y-4 =0

Έχουμε $-2x_\Gamma + y_\Gamma - 4 = -2 \cdot 2 + 8 - 4 = 0$

Άρα το Γ επαληθεύει την (ΑΒ) και Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

26. Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $y = 3x + 1$ και $y + x = 8$.

Λύση

Λύνουνε το σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x+1 \\ y + x = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x+1 \\ 3x + 1 + x = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y = 3x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{21}{4} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{25}{4}$$

$$4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

Το κοινό σημείο των είναι το Μ $\left(\frac{7}{4}, \frac{25}{4}\right)$

27. Δίνεται η ευθεία ε: $y+2x+3=0$ και το σημείο $A(-2,1)$.
Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

Λύση

Έχουμε λε =-2 και αν Α΄ το ζητούμενο συμμετρικό είναιQ

$$(AA')\perp(\varepsilon):\lambda_{AA'}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$$

$$\lambda_{AA'}\cdot(-2) = -1\Rightarrow\lambda_{AA'}=\frac{1}{2}$$

$$(AA'):y-y_A=\lambda_{AA'}(x-x_A) \text{ ή}$$

$$(AA'):y-1=\frac{1}{2}(x+2) \text{ ή}$$

$$(AA'):\ 2y-2=x+2 \text{ ή}$$

$$(AA'):\ -x+2y+4=0$$

Λύνουμε το σύστημα την (ε) και (Α Α΄)Q

$$\left.\begin{matrix} y+2x+3=0 \\ x-2y+4=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2y+4x+6=0 \\ 2y+x+4=0 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5x+10=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$y+2(-2)+3=0\Rightarrow y=1$$

Άρα $M(-2,1)$

Επομένως $M(-2,1)$.

Εδώ επειδή $A\in(\varepsilon)$ ισχύει $A\equiv M\equiv A'$

28. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$ και

α) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,4)$

β) Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,2)$.

γ) Σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα xx΄.

Λύση

α) Έχουμε $\lambda\vec{\alpha}=\frac{4}{2}=2$ $\quad$ *άρα* $\lambda\vec{\alpha}=2$ *και* $(\varepsilon)//\vec{\alpha}$ *άρα* $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\varepsilon=2$

(ε): y -4 = 2(x+1) ⇔ y-4=2x+2 ή (ε): 2x –y +6=0

β) $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{2}{3}$ και $(\varepsilon)\perp\vec{\beta}$ $\quad\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}\cdot\frac{2}{3}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=\frac{-3}{2}$

άρα η εξίσωση της (ε): $y-4=-\frac{3}{2}(x+1)\Rightarrow 2y-8=-3(x+1)\Rightarrow 2y-8=-3x-3$

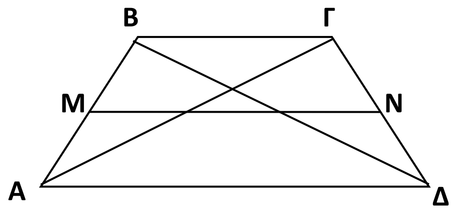
άρα η (ε) : 3x+2y-5=0

γ) Έχουμε λε = εφ45^0= 1 άρα (ε): y-4 = x+1 ή (ε): x-y +5 =0

29. Δίνονται τα σημεία $A(-1,-3)$, $B(0,2)$, $\Gamma(3,4)$ και $\Delta(8,3)$:

α) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές ισοσκελές τραπεζίου.
β) να βρείτε τις εξισώσεις των διαγώνιών του.
γ) να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του τραπεζίου.

Λύση



α) Είναι Α(-1,-3) , Β(0,2) , Γ(3,4) και Δ(8,3)

$\lambda_{B\Gamma} = \frac{2}{3}$ $\lambda_{A\Delta} = \frac{2}{3}$

Επειδή $\lambda_{B\Gamma}$ και $\lambda_{A\Delta}$ είναι ίσα τότε ΒΓ//ΑΔ.

Επίσης: $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$, $\left|\vec{\Gamma\Delta}\right| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

άρα ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

β) $\lambda_{A\Gamma} = \frac{7}{4}$

$(A\Gamma) : y-4 = \frac{7}{4}(x-3) \Rightarrow 4y-16 = 7x-21 \Rightarrow (A\Gamma): 7x-4y-5=0$

$(B\Delta) : y-2 = \frac{1}{8}(x-0) \Rightarrow (B\Delta): 8y-16 = x \Rightarrow$

$(B\Delta) : -x+8y-16=0$

γ) Έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2}$$

Έχουμε $\lambda_{B\Gamma} = \frac{2}{3}$(ερώτημα α)

Επειδή $x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$

Άρα $(MN)//(B\Gamma)$ είναι $\lambda_{MN} = \lambda_{B\Gamma} = \frac{2}{3}$

- (ΜΝ): $y-y_M = \lambda_{MN}(x-x_M) \Rightarrow$

$$y+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2x-3y-\frac{1}{2}=0$$

30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-1,2)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(1,-2)$. Να βρείτε την εξίσωση:
α) Του ύψους ΑΔ, **β)** Της διαμέσου ΑΜ. **γ)** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
Λύση

α) Έχουμε $A\Delta \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1$ με $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{5+2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

Άρα $\lambda_{A\Delta}\cdot\dfrac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = -\dfrac{2}{7}$.

Η εξίσωση της ΑΔ είναι η $y-2 = -\dfrac{2}{7}(x+1) \Leftrightarrow$

$7y-14 = -2x-2 \Leftrightarrow 2x+7y-12 = 0$.

β) Το μέσο Μ της ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\dfrac{3+1}{2},\dfrac{5-2}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

Άρα η διάμεσος ΑΜ έχει εξίσωση:

$$y-2 = \frac{\frac{3}{2}-2}{2+1}(x+1) \Leftrightarrow y-2 = \frac{-\frac{1}{2}}{3}(x+1) \Leftrightarrow 6y-12 = -x-1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x+6y-11 = 0$.

γ) Το εμβαδόν είναι :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\ \det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\ \right| = \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\ \right| = 11 \text{ τ.μ}$$

διότι: $\vec{AB} = \left(3+1, 5-2\right) = (4,3)$ και $\vec{A\Gamma} = \left(1+1, -2-2\right) = (2,-4)$.

31. Θεωρούμε δύο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξισώσεις (ε_1): $x+\mu y+1=0$, (ε_2): $2\mu x+2y+\lambda=0$, λ, $\mu\in\mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια ζεύγη τιμών των (λ,μ) οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\cdot\sqrt{2}$.

Λύση

Είναι $\lambda_1 = -\frac{1}{\mu}$, $\mu \neq 0$ και $\lambda_2 = -\mu$.

Επειδή $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ πρέπει $\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow -\frac{1}{\mu} = -\mu \Rightarrow \mu=\pm 1$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ(-1,0) της (ε_1).

Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = d(M,\varepsilon_2) = \dfrac{|2\mu(-1)+2\cdot 0+\lambda|}{\sqrt{(2\mu)^2+2^2}} = \dfrac{|-2\mu+\lambda|}{2\sqrt{\mu^2+1}} = 2\sqrt{2}$

- Για $\mu = 1 \Rightarrow \dfrac{|-2+\lambda|}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |-2+\lambda| = 8 \Rightarrow -2+\lambda = \pm 8 \Rightarrow \lambda=10$ ή $\lambda=-6$.
- Για $\mu = -1 \Rightarrow \dfrac{|2+\lambda|}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2+\lambda| = 8 \Rightarrow 2+\lambda = \pm 8 \Rightarrow \lambda=6$ ή $\lambda=-10$.

Άρα $(\mu, \lambda) = (1,10)$ ή $(1,-6)$ ή $(-1,6)$ ή $(-1,-10)$.

32. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $y^2-1+2xy+x^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες.

Λύση

$y^2-1+2xy+x^2=0 \Rightarrow (y+x)^2-1=0 \Rightarrow (y+x+1)\cdot(y+x-1)=0$

Άρα, $y+x+1=0$ ή $y+x-1=0$.

Έχουμε δύο ευθείες παράλληλες με ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

33. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\left(\lambda^2-9\right)x+\left(\lambda+3\right)y-\lambda+2=0$ παριστάνει ευθεία.

Λύση

Είναι $(\lambda^2-9)x+(\lambda+3)y-\lambda+2=0$

Αν $\lambda^2-9=0 \Rightarrow \lambda= \pm 3$ και $\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda= -3$

Άρα η εξίσωση εκφράζει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{-3\}$.

34. Δίνονται οι ευθείες $y=2x-3$ και $x+y-1=0$. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία $\left(\mu-13\right)x+\left(\mu-2\right)y+3=0$ διέρχεται από το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

Λύση

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} y=2x-3 \\ x+y-1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2x-3 \\ x+(2x-3)-1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{array}$$

Πρέπει το σημείο $A\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ να επαληθεύει την τρίτη ευθεία:

$(\mu-13)\cdot\frac{4}{3} + (\mu-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3=0 \Rightarrow \mu= \frac{41}{3}$.

35. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y-3=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y-1=0$.

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2.

Λύση

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία Α(0,3) και Β(0,1) των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Το μέσον του ΑΒ είναι Μ $\left(\frac{0+0}{2},\frac{3+1}{2}\right)$ ή Μ(0,2).

Έχουμε $\lambda_1=\lambda_2= -2$.

Άρα, η μεσοπαράλληλη θα είναι:

(μ): $y-y_M=\lambda(x-x_M)$ ή (μ): $y-2= -2(x-0)$ ή (μ): $y= -2x+2$.

36. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $(\lambda^2+1)x+(\lambda-1)y-3\lambda^2+\lambda-4=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρεθεί.

Λύση

Για λ=0:

(ε_1): x-y-4=0 και για λ=1 είναι (ε_2): 2x-6=0 δύο τυχαίες ευθείες.

Οι (ε_1),(ε_2) τέμνονται στο σημείο Μ(3,-1) το οποίο επαληθεύει την αρχική εξίσωση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, διότι:

$(\lambda^2+1)3+(\lambda-1)(-1)-3\lambda^2+\lambda-4=3\lambda^2+3-\lambda+1-3\lambda^2+\lambda-4=0$.

Άρα, όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Μ(3,-1).

37. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(3,-1)$ και η ευθεία ε: $y=-3x$. Να βρείτε σημείο Γ της (ε) ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

Λύση

Έστω Γ(x,-3x) σημείο της (ε).

Θα ισχύει $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{B\Gamma}| \Rightarrow \sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(-3x+1)^2} \Rightarrow$

$10=x^2-6x+9+9x^2-6x+1 \Rightarrow 10x^2-12x=0 \Rightarrow 2x(5x-6)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\frac{6}{5}$.

38. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $P(-1,2)$ απ' την ευθεία ε: $y=-2x+3$.

Λύση

Είναι (ε): 2x+y-3=0 και $d(P,\varepsilon)=\frac{|2(-1)+1\cdot2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

39. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1: x-y+1=0 και ε_2: -x+y-3=0 .

Λύση

Έστω Μ(0,1) τυχαίο σημείο της (ε_1).

Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)=\frac{|-1\cdot0+1\cdot1-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

40. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(-1,3)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(4,-1)$.

Λύση

Είναι $\overrightarrow{AB}=(2+1,1-3)=(3,-2)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(4+1,-1-3)=(5,-4)$ και

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-12+10=-2$.

Άρα, $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|-2|=1$ τ.μ.

Γ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ»

41. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου:

i. με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\sqrt{3}$.

ii. με κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται απ' το σημείο $A(1,2)$

Λύση

i. (C): $x^2+y^2=3$

ii. Είναι: $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}=\rho$

Άρα, (C): $x^2+y^2=5$.

42. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται απ' τα σημεία $A(1,3)$ και $B(3,5)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x-3x-1=0$.

Λύση

Έστω K(3y+1,y) σημείο της ευθείας x-3y-1=0.

Θα ισχύει $|\overrightarrow{KA}|=|\overrightarrow{KB}|$, για να είναι το K κέντρο του κύκλου.

Άρα, έχουμε:

$$\sqrt{(1-(3y+1))^2+(3-y)^2}=\sqrt{(3-(3y+1))^2+(5-y)^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 9y^2+9-6y+y^2=4-12y+9y^2+25-10y+y^2 \Rightarrow y=\frac{5}{4}$ και από την ευθεία $x-3\cdot\frac{5}{4}-1=0\Rightarrow x=\frac{19}{4}$.

Άρα, $K\left(\frac{19}{4},\frac{5}{4}\right)$.

Επίσης είναι: $\rho=|\overrightarrow{KA}|=\sqrt{\left(1-\frac{19}{4}\right)^2+\left(3-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{274}}{4}$

Άρα, (C): $\left(x-\frac{19}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{274}{16}=\frac{137}{8}$.

43. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2-2x+6y-3=0$ είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση

Είναι $x^2+y^2-2x+6y-3=0\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=3+1+9\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=13$.

Άρα, είναι κύκλος με κέντρο K(1,-3) και ακτίνα $\rho=\sqrt{13}$.

44. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$ Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: x+y+2=0$.

Λύση

Έστω $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής.

Έχουμε εφαπτομένη στο Μ: (μ): $xx_1+yy_1=4$ με $\lambda_\mu=-\frac{x_1}{y_1}$, $y_1\neq 0$.

Επειδή (μ)//(ε) θα είναι $\lambda_\mu=\lambda_\varepsilon \Rightarrow -\frac{x_1}{y_1}=-1 \Rightarrow x_1=y_1$ (1).

Επίσης Μ∈ (C) $\Rightarrow x_1^2+y_1^2=4 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1^2=2 \Rightarrow x_1=\pm\sqrt{2}$.

Άρα οι εφαπτομένες είναι:

(μ): $x\sqrt{2}+y\sqrt{2}=4$ και (μ'): $x(-\sqrt{2})+y(-\sqrt{2})=4$.

45. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι: $\begin{matrix} C_1:(x+3)^2+(y+2)^2=9 \\ C_2:(x-1)^2+(y+5)^2=4 \end{matrix}$ εφάπτονται εξωτερικά.

Λύση

Ο κύκλος (C_1) έχει κέντρο Κ(-3,-2) και ακτίνα $\rho_1=3$ και ο (C_2) έχει κέντρο Λ (1,-5) και ακτίνα $\rho_2=2$.

Είναι:

$|\overrightarrow{K\Lambda}|=\sqrt{(1+3)^2+(-5+2)^2}=5$ και $\rho_1+\rho_2=3+2=5$.

Επειδή $|\overrightarrow{K\Lambda}|=\rho_1+\rho_2$ οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

46. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x

i. Με εστία Ε(4,0) ,
ii. Με εστία Ε(-5,0) ,
iii. Με διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-3$
iv. Διέρχεται απ' το σημείο Μ(1,3)

Λύση

Είναι (C): $y^2=2px$

i. Έχουμε Ε $\left(\frac{p}{2},0\right)$ άρα $\frac{p}{2}=4 \Rightarrow p=8$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot 8x$ ή (C): $y^2=16x$.

ii. Είναι (δ): $x=-\frac{p}{2}$ άρα $-\frac{p}{2}=-3 \Rightarrow p=6$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot 6x$ ή (C): $y^2=12x$.

iii. Μ∈ (C)$\Rightarrow 3^2=2\cdot p\cdot 1 \Rightarrow p=\frac{9}{2}$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot\frac{9}{2}x$ ή (C): $y^2=9x$.

47. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2=8x$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: 4x-2y+3=0$.

Λύση

Είναι $y^2=2\cdot 4\cdot x$ (p=4).

Η εφαπτομένη (μ) στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι: $yy_1=4(x+x_1)$ με $\lambda_\mu=\frac{4}{y_1}$, $y_1\neq 0$.

Είναι (ε)//(μ) $\Rightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\mu \Rightarrow 2=\frac{4}{y_1} \Rightarrow y_1=2$.

Επίσης, Μ∈ (C)⇒ y_1^2=8x$_1$⇒2^2=8x$_1$⇒ x$_1$=$\frac{1}{2}$.

Άρα, (μ): y- 2=4$\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ή 2x-y+1=0.

48. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2=8x$ που διέρχεται απ' το σημείο $M(-4,1)$.

Λύση

Έστω A(x_1,y_1) το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη στο A είναι (μ): $yy_1=4(x+x_1)$.

Αλλά Μ∈ (μ) ⇒ $1\cdot y_1=4(-4+x_1)$ ή $y_1=4x_1-16$ (1)

Μ∈(C) ⇒ $y_1^2=8x_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} (4x_1-16)^2=8x_1 \Rightarrow 16(x_1-4)^2=8x_1 \Rightarrow 2(x_1-4)^2=x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1^2-17x_1+32=0 \Rightarrow x_1=\frac{17+\sqrt{33}}{4}$, $x_2=\frac{17-\sqrt{33}}{4}$

Για $x_1=\frac{17+\sqrt{33}}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_1=1+\sqrt{33}$

- Άρα (μ): $y(1+\sqrt{33})=4\left(x+\frac{17+\sqrt{33}}{4}\right)$

  Για $x_2=\frac{17-\sqrt{33}}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_2=1-\sqrt{33}$
- Άρα (μ'): $y(1-\sqrt{33})=4\left(x+\frac{17-\sqrt{33}}{4}\right)$.

49. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει:

i. εστίες $E'(-5,0)$ $E(5,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 16

ii. εστίες $E'(-5,0)$ $E(5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{6}$.

Λύση

Είναι (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

i. Είναι (ΕΕ')=2γ⇒10=2γ⇒γ=5 και 2α=16⇒ α=8.

Ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Rightarrow 64=\beta^2+25 \Rightarrow \beta^2=39$

Άρα, (C): $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

ii. Είναι (ΕΕ')=2γ⇒10=2γ⇒γ=5 και $\varepsilon=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{\alpha}=\frac{5}{6} \Rightarrow \alpha=6$.

Επίσης $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Rightarrow 36=\beta^2+25 \Rightarrow \beta^2=11$.

Άρα, (C): $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

50. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης: $4x^2+9y^2=36$.

Λύση

Είναι (C): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, με α=3, β=2.

Άρα μεγάλος άξονας: ΑΑ'=2α=6, και μικρός άξονας ΒΒ'=2β=4.

Κορυφές: Α(3,0), Α'(-3,0) και Β(0,2), Β'(0,-2)

Είναι $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=9-4=5 \Rightarrow \gamma=\sqrt{5}$

Εστίες: $E_1(\gamma,0)$, $E_2(-\gamma,0)$ ή $E_1(\sqrt{5},0)$, $E_2(-\sqrt{5},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

51. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x-2y+7=0$.

Λύση

Είναι (C): $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ και η εφαπτομένη στο $M(x_1,y_1)$ είναι (μ):

$\frac{xx_1}{2}+yy_1=1 \Rightarrow x_1x+2y_1y=2$

με $\lambda_\mu=-\frac{x_1}{2y_1}$, $y_1\neq 0$.

Επειδή (μ)⊥ (ε) είναι $\lambda_\mu\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Rightarrow -\frac{x_1}{2y_1}\cdot\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow 3x_1=4y_1 \Rightarrow x_1=\frac{4}{3}y_1 (1)$

$M\in(C) \Rightarrow \frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{16}{9}y_1^2+2y_1^2=2 \Rightarrow y_1^2=\frac{9}{17} \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{\frac{9}{17}}$

- Για $y_1=\sqrt{\frac{9}{17}} \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}$ και

  (μ): $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}x+2\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}y=2$

  ή (μ): $2\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}x+3\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}y=3$

- Για $y_1=-\sqrt{\frac{9}{17}}$

  όμοια (μ'): $-2\sqrt{\frac{9}{17}}x-3\sqrt{\frac{9}{17}}y=3$

52. Δίνεται η υπερβολή $4x^2 - 9y^2 = 36$. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα.

Λύση

Είναι (C): $\frac{x^2}{9}$ - $\frac{y^2}{4}$ =1, με α=,β=2

Άξονες: ΑΑ'=2α=6 και ΒΒ'=2β=4

Είναι $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2 \Rightarrow \gamma^2=9+4=13 \Rightarrow \gamma = \sqrt{13}$

Εστίες: $E_1(\gamma,0)$, $E_2(-\gamma,0)$ ή $E_1(\sqrt{13},0)$, $E_2(-\sqrt{13},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

53. Να βρείτε την εκκεντρότητα μιας ισοσκελούς υπερβολής.

Λύση

Είναι α=β και $\gamma^2=2\cdot\alpha^2 \Rightarrow \gamma=\alpha\sqrt{2}$

Άρα η εκκεντρότητα είναι: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=\sqrt{2}$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

ΘΕΜΑΤΑ ΑΥΞΗΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ (εισαγωγή στη Γ΄ Λυκείου)

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2-6}$ β) $g(x)=\ln\left(5^{2x}-5^{x+1}+4\right)$

γ) $h(x)=\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\alpha x^2}\right|$ με α∈ (0, 1) δ) $\sigma(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-2}}$

Λύση

α) $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2-6}$

Η f ορίζεται όταν $x^4-5x^2-6\geq 0 \overset{x^2=w}{\Leftrightarrow} w^2-5w-6\geq 0 \Leftrightarrow w\leq -1$ ή $w\geq 6$.

- $w\leq -1 \Leftrightarrow x^2\leq -1$, αδύνατη.
- $w\geq 6 \Leftrightarrow x^2\geq 6 \Leftrightarrow |x|\geq \sqrt{6} \Leftrightarrow x\leq -\sqrt{6}$ ή $x\geq \sqrt{6}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6},+\infty)$.

β) $g(x)=\ln(5^{2x}-5^{x+1}+4)$

Η g ορίζεται όταν

$5^{2x}-5^{x+1}+4>0 \Leftrightarrow 5^{2x}-5\cdot 5^x+4>0 \overset{5^x=w}{\Leftrightarrow} w^2-5w+4>0 \Leftrightarrow w<1$ ή $w>4$.

- $w<1 \Leftrightarrow 5^x<5^0 \Leftrightarrow x<0$
- $w>4 \Leftrightarrow 5^x>5^{\log_5 4} \Leftrightarrow x>\log_5 4$

Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(-\infty,0)\cup(\log_5 4,+\infty)$.

γ) $h(x)=|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\alpha\cdot x^2}\,|$ με $\alpha\in(0,1)$.

Η h ορίζεται όταν $1-x^2\geq 0$ και $1-\alpha\cdot x^2\geq 0$.

- $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$
- $1-\alpha\cdot x^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $-1\leq x\leq 1$,

καθώς $0<\alpha<1 \Leftrightarrow 0<\sqrt{\alpha}<1$, οπότε $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}>1$ και $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}<-1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h=[-1,1]$.

δ) $\sigma(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-2}}$

Η σ ορίζεται όταν $x^2-x-2\geq 0$ και $x-\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

- $x^2-x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 2$.
- $x-\sqrt{x^2-x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}\leq x$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x<0$ η ανίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $x\geq 0$ υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει $x^2-x-2\leq x^2 \Leftrightarrow x\geq -2$,

άρα ο περιορισμός ισχύει για $x \geq 0$.
Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $x \geq 2$,

Επομένως το πεδίο ορισμού της σ είναι $D_\sigma = [2,+\infty)$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$

β) $f(x) = \frac{3}{x-1} + \sqrt{4-x^2}$

γ) $f(x) = \ln|x-1|$

δ) $f(x) = \ln(x+1)^2$

ε) $f(x) = \sqrt{e^{x+2}-1}$

στ) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln x}$

Λύση

α) $f(x) = \ln(\frac{1-x}{x+1})$

Η f ορίζεται όταν $x \neq -1$ και

$\frac{1-x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-1,1)$.

β) $f(x) = \frac{3}{x-1} + \sqrt{4-x^2}$

Η f ορίζεται όταν $x \neq 1$ και $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $-2 \leq x \leq 2$ με $x \neq 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [-2,1) \cup (1,2]$.

γ) $f(x) = \ln|x-1|$

Η f ορίζεται όταν $|x-1| > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

δ) $f(x) = \ln(x+1)^2$

Η f ορίζεται όταν $(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$.

ε) $f(x) = \sqrt{e^{x+2}-1}$

Η f ορίζεται όταν $e^{x+2}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x+2}\geq 1 \Leftrightarrow x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=[-2,+\infty)$.

στ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{\ln x}$

Η f ορίζεται όταν $x>0$, $\ln x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $\ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $x>1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(1,+\infty)$.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{2\ln x-\ln^2 x}$ β) $f(x)=\dfrac{3}{2\sigma\upsilon\nu x+1}+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi 2x}$

γ) $f(x)=\sqrt{2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}}$

Λύση

α) $f(x)=\sqrt{2\ln x-\ln^2 x}$

Η f ορίζεται όταν $x>0$ και

$$2\ln x-\ln^2 x\geq 0 \overset{\ln x=w}{\Leftrightarrow} w^2-2w\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq w\leq 2 \Leftrightarrow \ln 1\leq \ln x\leq \ln e^2 \Leftrightarrow 1\leq x\leq e^2.$$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $1\leq x\leq e^2$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=[1,e^2]$.

β) $f(x)=\dfrac{3}{2\sigma\upsilon\nu x+1}+\dfrac{1}{\varepsilon\phi 2x}$

Η f ορίζεται όταν $2\sigma\upsilon\nu x+1\neq 0$, $\sigma\upsilon\nu 2x\neq 0$ και $\varepsilon\phi 2x\neq 0$.

- $2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\kappa\in Z$
- $\sigma\upsilon\nu 2x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\kappa\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\kappa\in Z$
- $\varepsilon\phi 2x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x=\varepsilon\phi 0 \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\kappa\pi}{2},\kappa\in Z$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι

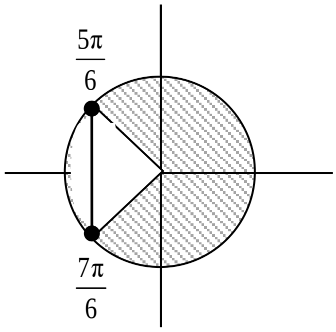
$$D_f=\{x\in R/x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},x\neq\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4},x\neq\frac{\kappa\pi}{2},\kappa\in Z\}.$$

γ) $f(x)=\sqrt{2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}}$

Η f ορίζεται όταν $2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\geq 0$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι ένωση διαστημάτων της μορφής

$$x\in\left[2\kappa\pi,2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[2\kappa\pi,2(\kappa+1)\pi\right]$$



4. Αν $f(x)=\frac{|x|-x^2}{x^2-2|x|+1}+\frac{1-|x|}{1-x^2}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

Λύση

$$f(x)=\frac{|x|-x^2}{x^2-2|x|+1}+\frac{1-|x|}{1-x^2}$$

Η f ορίζεται όταν $x^2-2|x|+1\neq 0\Leftrightarrow(|x|-1)^2\neq 0\Leftrightarrow|x|\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1$ και

$1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow|x|\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Για $x\neq\pm 1$ είναι:

$$f(x)=\frac{|x|-|x|^2}{|x|^2-2|x|+1}+\frac{1-|x|}{1-|x|^2}=\frac{|x|(1-|x|)}{(|x|-1)^2}+\frac{1-|x|}{(1-|x|)(1+|x|)}=$$
$$\frac{|x|}{1-|x|}+\frac{1}{1+|x|}=\ldots=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

5. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2\lambda x+\lambda}}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Λύση

$$f(x)=\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2\lambda x+\lambda}}.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το R όταν $x^2-2\lambda x+\lambda>0$, οπότε πρέπει

$\Delta<0\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda<0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-1)<0\Leftrightarrow 0<\lambda<1$.

6. Αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+\lambda x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ δείξτε ότι η g με $g(x)=\dfrac{5x+1}{x^2+2\lambda x+8}$, έχει επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Λύση

$f(x)=\sqrt{x^2+\lambda x+1}$ $\qquad g(x)=\dfrac{5x+1}{x^2+2\lambda x+8}$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $x^2+\lambda x+1>0$, δηλαδή, όταν

$$\Delta_1<0 \Leftrightarrow \lambda^2-4<0 \Leftrightarrow \lambda^2<4 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$$

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $x^2+2\lambda x+8\neq 0$, δηλαδή, όταν

$\Delta_2\neq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-32\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2\neq 8 \Leftrightarrow \lambda\neq \pm 2\sqrt{2}$, που ισχύει όταν $-2<\lambda<2$.

Επομένως, όταν η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

7. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

α) $f_1(x)=\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{3}\right)$ $\qquad$ β) $f_2(x)=(x+\eta\mu x)\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

γ) $f_3(x)=\dfrac{\alpha^x+1}{\alpha^x-1},\quad 0<\alpha\neq 1$

Λύση

α) $f_1(x)=\ln(\dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{3})$

Η f_1 ορίζεται όταν $x^2+9\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{3}>0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}>-x.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $-x<0$ η ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Αν $-x\geq 0$ υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει $x^2+9\geq x^2 \Leftrightarrow 9\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f_1 είναι $D_{f_1}=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in R$ και

$$f_1(-x) = \ln(\frac{-x + \sqrt{(-x)^2 + 9}}{3}) = \ln(\frac{\sqrt{x^2 + 9} - x}{3}) =$$

$$= \ln(\frac{x^2 + 9 - x^2}{3(\sqrt{x^2 + 9} + x)}) = \ln(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 9} + x}) =$$

$$= \ln(\frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{3})^{-1} = -\ln(\frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{3}) = -f_1(x)$$, άρα η f_1 είναι περιττή.

β) $f_2(x) = (x + \eta\mu x)\ln(\frac{2 - x}{2 + x})$

Η f_2 ορίζεται όταν $x \neq -2$ και

$$\frac{2 - x}{2 + x} > 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f_2 είναι $D_{f_2} = (-2,2)$.

Για κάθε $x \in (-2,2)$ είναι $-x \in (-2,2)$ και

$$f_2(-x) = (-x + \eta\mu(-x))\ln(\frac{2 + x}{2 - x}) = -(x + \eta\mu x)\ln(\frac{2 - x}{2 + x})^{-1} =$$

$$= (x + \eta\mu x)\ln(\frac{2 - x}{2 + x}) = f_2(x)$$, άρα η f_2 είναι άρτια.

γ) $f_3(x) = \dfrac{\alpha^x + 1}{\alpha^x - 1}$, $0 < \alpha \neq 1$

Η f_3 ορίζεται όταν $\alpha^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f_3 είναι $D_{f_3} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ είναι $-x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και

$$f_3(-x) = \frac{\alpha^{-x} + 1}{\alpha^{-x} - 1} = \frac{\frac{1}{\alpha^x} + 1}{\frac{1}{\alpha^x} - 1} = \frac{\frac{1 + \alpha^x}{\alpha^x}}{\frac{1 - \alpha^x}{\alpha^x}} = -\frac{\alpha^x + 1}{\alpha^x - 1} = -f_3(x)$$, άρα η f_3 είναι περιττή.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 + 2x + 2$.
Να βρείτε:
α) τα κοινά σημεία των C_f και C_g.
β) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g.

Λύση

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \qquad g(x) = x^2 + 2x + 2$

Οι f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$.

α) Τα κοινά σημεία των C_f, C_g προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = \pm 2$.

$$g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1$$

$$g(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 2 = 2$$

$$g(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$$

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(-2,2)$, $\mathrm{A}(2,10)$.

β) Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x - 2 > x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4) > 0$$

Θεωρώ $P(x) = (x+1)(x^2-4)$ που έχει ρίζες $x = -1$ ή $x = \pm 2$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της $P(x)$.

x	$-\infty$ -2	-2 -1	-1 2	2 $+\infty$
$x+1$	-	-	+	+
x^2-4	+	-	-	+
$P(x)$	-	+	-	+

Οι λύσεις της ανίσωσης $P(x)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4)>0$ είναι

$-2<x<-1$ και $x>2$.

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν $x \in (-2,-1) \cup (2,+\infty)$.

9. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2-3x+2}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Λύση

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x^2-3x+2}$$

Η f ορίζεται όταν $x^2-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν

$$f(x)<0 \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x^2-3x+2}<0 \Leftrightarrow (e^x-1)(x^2-3x+2)<0.$$

$e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$. Όμοια $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$.

$x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2$. Όμοια $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x<1$ ή $x>2$

Θεωρώ $g(x)=(e^x-1)(x^2-3x+2)$ που έχει ρίζες $x=0$, $x=1$, $x=2$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της $g(x)$.

x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
e^x-1	-	+	+	+
x^2-3x+2	+	+	-	+
$g(x)$	-	+	-	+

Οι λύσεις της ανίσωσης $g(x)<0$ είναι $x<0$ και $1<x<2$.

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν $x \in (-\infty,0)\cup(1,2)$.

10. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία οι γραμμές με εξισώσεις $y = \lambda x$ και $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ έχουν :

α) Δύο κοινά σημεία. **β)** Ένα κοινό σημείο. **γ)** Κανένα κοινό σημείο.

Λύση

Τα κοινά σημεία των γραμμών αυτών προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων τους.

$$\begin{cases} y = \lambda x & (1) \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 & (2) \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) την εξίσωση (1) προκύπτει

$$x^2 + \lambda^2 x^2 - 6x - 8\lambda x + 21 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)x^2 - (8\lambda + 6)x + 21 = 0 .$$

$$\Delta = (8\lambda + 6)^2 - 84(\lambda^2 + 1) = ... = -4(5\lambda^2 - 24\lambda + 12) .$$

$\Delta' = ... = 336$. Οι ρίζες της Δ είναι $\lambda_{1,2} = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{21}}{5}$

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 24\lambda + 12 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{12 - 2\sqrt{21}}{5} < \lambda < \dfrac{12 + 2\sqrt{21}}{5}$ τότε οι γραμμές έχουν δύο κοινά σημεία.

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 24\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{21}}{5}$ τότε οι γραμμές έχουν ένα κοινό σημείο.

Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 24\lambda + 12 > 0 \Leftrightarrow \lambda < \dfrac{12 - 2\sqrt{21}}{5}$ ή $\lambda > \dfrac{12 + 2\sqrt{21}}{5}$ τότε οι γραμμές δεν έχουν κοινά σημεία.

Άλλη λύση:

Η γραμμή με εξίσωση $y = \lambda x$ είναι ευθεία, έστω $\varepsilon : y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$.

Η γραμμή $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ παριστάνει κύκλο διότι $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = (-6)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 21 = 16 > 0$.

Ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(-\dfrac{\mathrm{A}}{2}, -\dfrac{\mathrm{B}}{2}) = \mathrm{K}(3,4)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2.$$

Η απόσταση του Κ από την ευθεία ε ισούται με

$$d(\mathrm{K}, \varepsilon) = \frac{|\lambda \cdot 3 - 1 \cdot 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} .$$

α) Αν είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)<\rho \Leftrightarrow \dfrac{|3\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}<2 \Leftrightarrow| \ldots \Leftrightarrow \dfrac{12-2\sqrt{21}}{5}<\lambda<\dfrac{12+2\sqrt{21}}{5}$

τότε ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία.

β) Αν είναι

$$d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|3\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow| \ldots \Leftrightarrow \ \lambda=\frac{12\pm 2\sqrt{21}}{5}$$

τότε ο κύκλος και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο.

γ) Αν είναι

$$d(\mathrm{K},\varepsilon)>\rho \Leftrightarrow \frac{|3\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}>2 \Leftrightarrow| \ldots \Leftrightarrow \lambda<\frac{12-2\sqrt{21}}{5} \text{ ή } \lambda>\frac{12+2\sqrt{21}}{5}$$

τότε ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία.

11. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\eta\mu\mathrm{x}+5$ β) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}5\eta\mu^2\mathrm{x}+4, & \mathrm{x}\le 1\\ \varepsilon\varphi\mathrm{x}-\sqrt{3}, & \mathrm{x}>1\end{cases}$

Λύση

α) $f(x)=2\eta\mu x+5$

Για $x=0$, είναι $f(0)=2\eta\mu 0+5=5$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,5)$.

Για $y=0$, είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+5=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\dfrac{5}{2}$, αδύνατη, άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$

β) $g(x)=\begin{cases}5\eta\mu^2 x+4, & x\le 1\\ \varepsilon\varphi x-\sqrt{3}, & x>1\end{cases}$

Για $x=0$, είναι $g(0)=5\eta\mu^2 0+4=4$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.

Για $y=0$, είναι $g(x)=0 \overset{x\le 1}{\Leftrightarrow} 5\eta\mu^2 x+4=0$, αδύνατη, άρα η C_g δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ για $x\le 1$.

Επιπλέον $g(x)=0 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}, \kappa\in \mathrm{Z}$.

Επομένως η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(\kappa\pi+\frac{\pi}{3},0)$.με

$x>1 \Leftrightarrow \kappa\pi+\frac{\pi}{3}>1 \Leftrightarrow ...\kappa>\frac{3-\pi}{3\pi}$.

Άρα $\kappa=0,\ 1,\ 2,\ ...$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$.

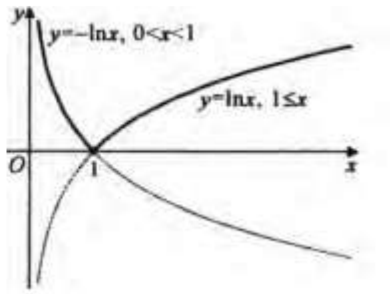
α) Να παρασταθεί γραφικά η f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $(\varepsilon): y=\ln\alpha,\ \alpha>1$

γ) Αν Β, Γ είναι τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $(\varepsilon): y=\ln\alpha$, και Α το κοινό σημείο της C_f με τον xx', να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του $\alpha>1$.

Λύση

α) $f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$



Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι $[0,+\infty)$.

β) Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $(\varepsilon): y=\ln\alpha$, $\alpha>1$ προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=\ln\alpha \Leftrightarrow |\ln x|=\ln\alpha$.

Για $x\geq 1$ είναι $f(x)=\ln\alpha \Leftrightarrow \ln x=\ln\alpha \Leftrightarrow x=\alpha$ με $\alpha>1$

Για $0<x<1$ είναι $f(x)=-\ln\alpha \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$.

γ) Είναι $B(\alpha,\ln\alpha)$ και $\Gamma(\frac{1}{\alpha},\ln\alpha)$. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $f(x)=0 \Leftrightarrow |\ln x|=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$, οπότε $A(1,0)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(\alpha-1,\ln\alpha)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\frac{1}{\alpha}-1,\ln\alpha)=(-\frac{\alpha-1}{\ln\alpha},\ln\alpha)$, οπότε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με :

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\alpha-1 & \ln\alpha\\ -\frac{\alpha-1}{\alpha} & \ln\alpha\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(\alpha-1)\ln\alpha+\frac{\alpha-1}{\alpha}\ln\alpha|=$$

$$=\frac{1}{2}|\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha}\cdot\ln\alpha|\overset{\alpha>1}{=}\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\cdot\ln\alpha$$

13. Δυο σημεία $A(x,0)$ και $B(0,y)$ κινούνται πάνω στους άξονες x΄x και y΄y αντιστοίχως, έτσι ώστε να ορίζουν με το σημείο Κ(2,1) τρίγωνο ορθογώνιο στο Κ. Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ ως συνάρτηση του x.

Λύση

Είναι $A(x,0)$, $B(0,y)$, $K(2,1)$

$\overrightarrow{KA}=(x-2,-1)$ και $\overrightarrow{KB}=(-2,y-1)$.

$\overrightarrow{KA}\perp\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=0\Leftrightarrow(x-2,-1)$

$(-2,y-1)=0\Leftrightarrow-2(x-2)-(y-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=-2x+5$.

Επομένως $\overrightarrow{KB}=(-2,-2x+4)$

$(KA)=\sqrt{(x-2)^2+1}$ $\quad (KB)=\sqrt{4+(-2x+4)^2}=\ldots=2\sqrt{(x-2)^2+1}$

$(AB)=\sqrt{x^2+y^2}=\ldots=\sqrt{5x^2-10x+25}$

Η περίμετρος του τριγώνου ΚΑΒ είναι

$\Pi(x)=(KA)+(KB)+(AB)=3\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{5x^2-10x+25}$, $x\in\mathbb{R}$

Το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ είναι $(KAB)=\dfrac{(KA)\cdot(KB)}{2}=\ldots=(x-2)^2+1$, $x\in\mathbb{R}$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x-2$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$.

γ) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=x-2$

α) Η f ορίζεται όταν $x\geq0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=[0,+\infty)$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Τα κοινά σημεία των C_f, C_g προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}=x-2$ για $x\geq0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x-2<0$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$ υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει $x=x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ή $x=4$.

Δεκτή λύση είναι μόνο η $x=4$, άρα το μοναδικό κοινό σημείο των

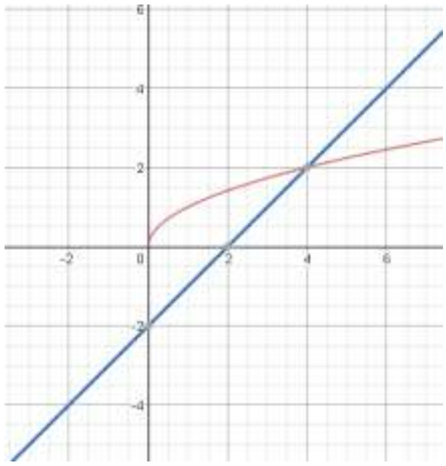
C_f, C_g είναι το $(4, f(4))=(4,2)$.

β) Η $\frac{f}{g}$ ορίζεται όταν $x\geq 0$ και $g(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_{\frac{f}{g}}=[0,2)\cup(2,+\infty)$ και ο τύπος της

είναι $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x-2}$.

γ) Στο σχήμα φαίνονται οι C_f, C_g



15. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις και μετά από τη γραφική τους παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ -2, & x>1 \end{cases}$

β) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

γ) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ -1, & 0<x\leq 2 \\ \sqrt{x-2}, & x>2 \end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0 \\ -\ln x, & 0<x<1 \\ -\frac{1}{x}, & x\geq 2 \end{cases}$

ε) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$

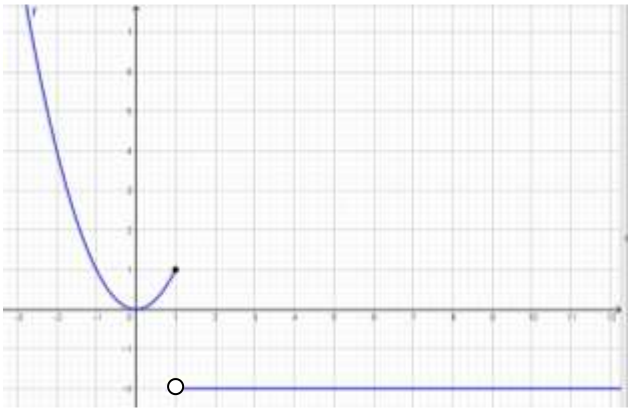
στ) $f(x)=\ln|x|$

ζ) $f(x)=|3-x^2|$

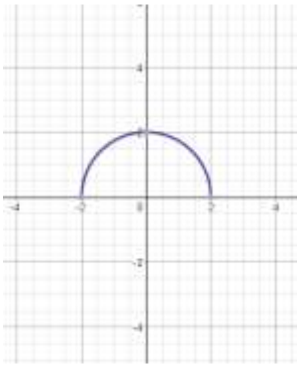
η) $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\leq 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$

Λύση

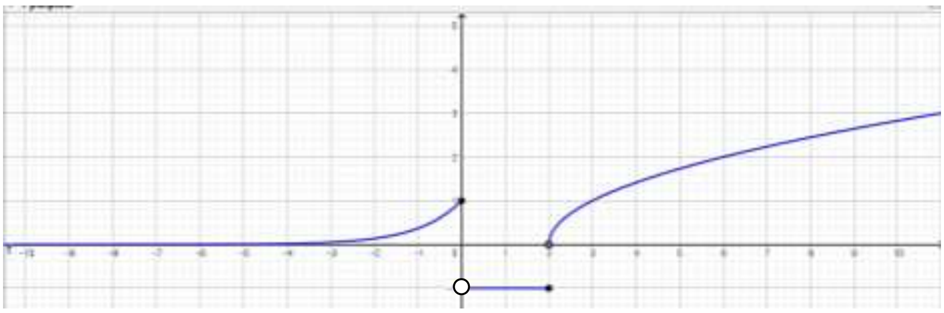
α)



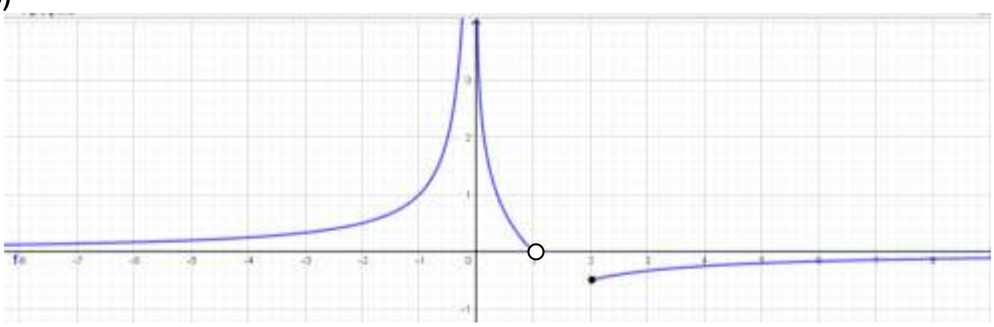
β)



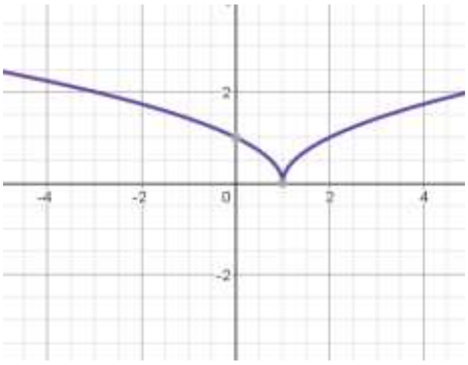
γ)



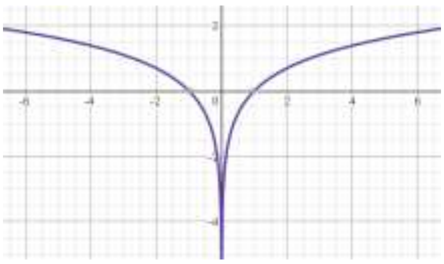
δ)



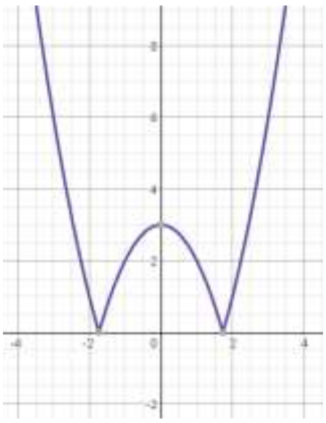
ε)



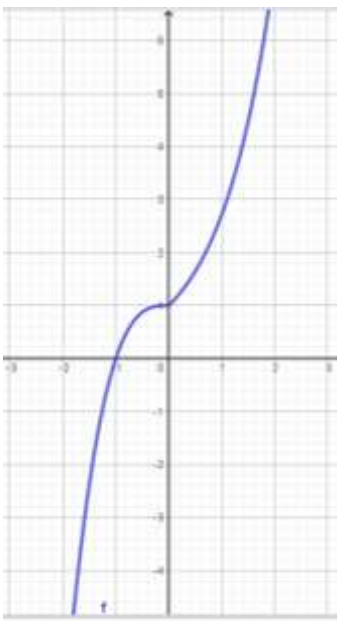
στ)



ζ)



η)



16. Να εξετάσετε αν οι f, g είναι ίσες στις παρακάτω περιπτώσεις. Αν δεν είναι να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ όπου $f=g$.

α) $f(x)=\frac{x}{x},\ g(x)=1$

β) $f(x)=\ln x^2,\ g(x)=2\ln x$

γ) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}},\ g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$

Λύση

α) $f(x)=\frac{x}{x}$ $\quad g(x)=1$

Η f ορίζεται όταν $x\neq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Για $x\neq 0$, δηλαδή $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $f(x)=\frac{x}{x}=1=g(x)$

β) $f(x)=\ln x^2$ $\quad g(x)=2\ln x$

Η f ορίζεται όταν $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x>0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(0,+\infty)$.

Είναι $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Για $x>0$, δηλαδή $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=\ln x^2=2\ln x=g(x)$

γ) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ $\quad g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$

Η f ορίζεται όταν $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ και $\frac{x-1}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$ ή $x\geq 2$. Όμως πρέπει $x\neq 2$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $x-2>0\Leftrightarrow x>2$, άρα $x>2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(2,+\infty)$.

Είναι $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Για $x>2$, δηλαδή $x\in(2,+\infty)$ είναι $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}=g(x)$.

17. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f=g$. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του για το οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

α) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ και $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

β) $f(x)=\ln e^x$ και $g(x)=x$

γ) $f(x)=\ln x^2$ και $g(x)=2\ln x$

δ) $f(x)=\ln(x-1)(x-2)$ και $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

Λύση

α) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

Η f ορίζεται όταν $x^2+1\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$\sqrt{x^2+1}-x\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\neq x$.

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{x^2+1}=x$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x<0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $x\geq 0$ υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει $x^2+1=x^2 \Leftrightarrow 1=0$, που

είναι επίσης αδύνατη. Έτσι, $\sqrt{x^2+1}\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}$.

Η g ορίζεται όταν $x^2+1\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=\mathbb{R}$.

Είναι $D_f=D_g$.

Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2+1-x^2}=\sqrt{x^2+1}+x=g(x)$.

Επομένως είναι $f=g$.

β) $f(x)=\ln e^x \qquad g(x)=x$

Η f ορίζεται όταν $e^x>0$,που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $D_f=D_g$.

Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\ln e^x=x=g(x)$.

Επομένως είναι $f=g$.

γ) $f(x)=\ln x^2 \qquad g(x)=2\ln x$

Η f ορίζεται όταν $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x>0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(0,+\infty)$.

Είναι $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Για $x>0$, δηλαδή $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=\ln x^2=2\ln x=g(x)$

δ) $f(x)=\ln(x-1)(x-2) \qquad g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

Η f ορίζεται όταν $(x-1)(x-2)>0\Leftrightarrow x<1$ ή $x>2$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ και $x-2>0\Leftrightarrow x>2$, άρα $x>2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(2,+\infty)$.

Είναι $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Για $x>2$, δηλαδή $x\in(2,+\infty)$ είναι $f(x)=\ln(x-1)(x-2)$
$=\ln(x-1)+\ln(x-2)=g(x)$.

18. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g, των οποίων οι τύποι δίνονται παρακάτω είναι ίσες. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f(x)=g(x)$.

α) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$ και $g(x)=|x-3|$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$ και $g(x)=|x|+2$

γ) $f(x)=\ln\dfrac{(x+2)^5}{3-x}$ και $g(x)=5\ln(x+2)-\ln(3-x)$

Λύση

α) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$ $\quad g(x)=|x-3|$

Η f ορίζεται όταν $x^2-6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=R$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $D_f=D_g$.

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=g(x)$.

Επομένως είναι $f=g$.

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$ $\quad g(x)=|x|+2$

Η f ορίζεται όταν $|x|-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Για $x \neq \pm 2$, δηλαδή $x \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$ είναι

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{|x|^2-4}{|x|-2}=\frac{(|x|-2)(|x|+2)}{|x|-2}=|x|+2=g(x).$$

γ) $f(x)=\ln\dfrac{(x+2)^5}{3-x}$ $\quad g(x)=5\ln(x+2)-\ln(3-x)$

Η f ορίζεται όταν $3-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και

$$\frac{(x+2)^5}{3-x}>0 \Leftrightarrow (x+2)^5(3-x)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0 \Leftrightarrow -2<x<3.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-2,3)$.

Η g ορίζεται όταν $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ και $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$, άρα $-2<x<3$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(-2,3)$.

Είναι $D_f=D_g$.

Για $x\in(-2,3)$ είναι $f(x)=\ln\dfrac{(x+2)^5}{3-x}=\ln(x+2)^5-\ln(3-x)=$
$5\ln(x+2)-\ln(3-x)=5g(x)$.

Επομένως είναι $f=g$.

19. Να προσδιορισθούν οι $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{(2-\lambda)x^2+2\lambda\kappa}{x+3-\lambda}$ και $g(x)=\dfrac{(2\lambda+\kappa-2)x^2+\kappa+\lambda}{x+\kappa+\lambda}$ να είναι ίσες.

Λύση

$$f(x)=\frac{(2-\lambda)x^2+2\lambda\kappa}{x+3-\lambda} \qquad g(x)=\frac{(2\lambda+\kappa-2)x^2+\kappa+\lambda}{x+\kappa+\lambda}$$

Η f ορίζεται όταν $x+3-\lambda\neq0 \Leftrightarrow x\neq\lambda-3$ και η g ορίζεται όταν $x+\kappa+\lambda\neq0 \Leftrightarrow x\neq-\kappa-\lambda$.

Για να είναι $f=g$ πρέπει $D_f=D_g$, δηλαδή $\lambda-3=-\kappa-\lambda \Leftrightarrow \kappa=3-2\lambda$ (1)

και $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \dfrac{(2-\lambda)x^2+2\lambda\kappa}{x+3-\lambda}=\dfrac{(2\lambda+\kappa-2)x^2+\kappa+\lambda}{x+\kappa+\lambda}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$(2-\lambda)x^2+2\lambda(3-2\lambda)=(2\lambda+3-2\lambda-2)x^2+3-2\lambda+\lambda \Leftrightarrow$$

$(2-\lambda)x^2+6\lambda-4\lambda^2=x^2+3-\lambda \Leftrightarrow 2-\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=1$ και

$+6\lambda-4\lambda^2=3-\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2-7\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\dfrac{3}{4}$.

Επομένως πρέπει να είναι $\lambda=1$, άρα $(1)\Rightarrow\kappa=1$ ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)$ και κατά συνέπεια $f=g$.

20. Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:
$2f^2(x)+2\alpha f(x)+g^2(x) \leq 2f(x)g(x)-\alpha^2$, $x \in \mathbb{R}$ και α σταθερά που ανήκει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$.

Λύση

$$2f^2(x)+2\alpha \cdot f(x)+g^2(x) \leq 2f(x)g(x)-\alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$(f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x))+(f^2(x)-2\alpha \cdot f(x)+\alpha^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$(f(x)-g(x))^2+(f(x)-\alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ και $f(x)-\alpha=0$, οπότε

$f(x)=g(x)=\alpha$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-\frac{1}{x}$ και $g(x)=\frac{x^3-x}{x-2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση

$$f(x)=1-\frac{1}{x} \qquad g(x)=\frac{x^3-x}{x-2}$$

Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ορίζονται όταν $x \neq 0$ και $x \neq 2$,

δηλαδή, όταν $x \in (-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Είναι

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=$
$$=1-\frac{1}{x}+\frac{x^3-x}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x-2)+x(x^3-x)}{x(x-2)}=\ldots=\frac{x^4-3x+2}{x(x-2)}.$$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=$
$$=1-\frac{1}{x}-\frac{x^3-x}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x-2)-x(x^3-x)}{x(x-2)}=\ldots=\frac{-x^4+2x^2-3x+2}{x(x-2)}.$$
- $(f \cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=$
$$=(1-\frac{1}{x})\cdot\frac{x^3-x}{x-2}=\frac{x-1}{x}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-2}=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-2}.$$

Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται όταν $x \neq 0, x \neq 2$ και

$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, x \neq \pm 1$,

δηλαδή, όταν $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$.

- $$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x^3-x}}{x-2} = \frac{\dfrac{\frac{x-1}{x}}{x(x-1)(x+1)}}{x-2} = \frac{x-2}{x^2(x+1)}$$

22. Αν $f(x) = \begin{cases} 5x^2+4, & x \in [-2,3] \\ \alpha x^2 + \beta, & x \in (3,5] \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{30}, & x \in [-1,2] \\ 20x^5, & x \in (2,4] \end{cases}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2+4, & x \in [-2,3] \\ \alpha x^2 + \beta, & x \in (3,5] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{30}, & x \in [-1,2] \\ 20x^5, & x \in (2,4] \end{cases}$$

Θέτουμε για διευκόλυνση

$f_1(x) = 5x^2+4$ με $D_{f_1} = [-2,3]$, $\quad f_2(x) = \alpha x^2 + \beta$ με $D_{f_2} = (3,5]$ και

$g_1(x) = \frac{x}{30}$ με $D_{g_1} = [-1,2]$, $\quad g_2(x) = 20x^5$ με $D_{g_2} = (2,4]$.

Οι συναρτήσεις f_1+g_1, f_1-g_1 και $f_1 \cdot g_1$ ορίζονται όταν $x \in [-1,2]$ και είναι

- $(f_1+g_1)(x) = f_1(x)+g_1(x) = 5x^2+4+\frac{x}{30} = \frac{150x^2+x+120}{30}$
- $(f_1-g_1)(x) = f_1(x)-g_1(x) = 5x^2+4-\frac{x}{30} = \frac{150x^2-x+120}{30}$
- $(f_1 \cdot g_1)(x) = f_1(x) \cdot g_1(x) = (5x^2+4) \cdot \frac{x}{30} = \frac{5x^3+4x}{30}$

Οι συναρτήσεις f_1+g_2, f_1-g_2 και $f_1 \cdot g_2$ ορίζονται όταν $x \in (2,3]$ και είναι

- $(f_1+g_2)(x) = f_1(x)+g_2(x) = 5x^2+4+20x^5 = 20x^5+5x^2+4$
- $(f_1-g_2)(x) = f_1(x)-g_2(x) = 5x^2+4-20x^5 = -20x^5+5x^2+4$
- $(f_1 \cdot g_2)(x) = f_1(x) \cdot g_2(x) = (5x^2+4) \cdot 20x^5 = 100x^7+80x^5$

Οι συναρτήσεις f_2+g_1, f_2-g_1 και $f_2 \cdot g_1$ δεν ορίζονται διότι $(3,5] \cap [-1,2] = \varnothing$.

Οι συναρτήσεις f_2+g_2, f_2-g_2 και $f_2\cdot g_2$ ορίζονται όταν $x\in(3,4]$ και είναι

- $(f_2+g_2)(x)=f_2(x)+g_2(x)=\alpha x^2+\beta+20x^5=20x^5+\alpha x^2+\beta$
- $(f_2-g_2)(x)=f_2(x)-g_2(x)=\alpha x^2+\beta-20x^5=-20x^5+\alpha x^2+\beta$
- $(f_2\cdot g_2)(x)=f_2(x)\cdot g_2(x)=(\alpha x^2+\beta)\cdot 20x^5=20\alpha x^7+20\beta x^5$

Επομένως έχουμε

$$(f+g)(x)=\begin{cases}\dfrac{150x^2+x+120}{30}, & x\in[-1,2]\\ 20x^5+5x^2+4, & x\in(2,3]\\ 20x^5+\alpha x^2+\beta, & x\in(3,4]\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases}\dfrac{150x^2-x+120}{30}, & x\in[-1,2]\\ -20x^5+5x^2+4, & x\in(2,3]\\ -20x^5+\alpha x^2+\beta, & x\in(3,4]\end{cases}$$

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^3+4x}{30}, & x\in[-1,2]\\ 100x^7+80x^5, & x\in(2,3]\\ 20\alpha x^7+20\beta x^5, & x\in(3,4]\end{cases}$$

23. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=2x^5-4$

β) $f(x)=2-\ln(x-3)$

γ) $f(x)=\sqrt{3-x}+2$

δ) $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$

ε) $f(x)=7e^{2-x}+3$

στ) $f(x)=x^2-2x-5$

Λύση

α) $f(x)=2x^5-4$

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5\Rightarrow 2x_1^5<2x_2^5\Rightarrow 2x_1^5-4<2x_2^5-4\Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x)=2-\ln(x-3)$

Η f ορίζεται όταν $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(3,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(3,+\infty)$ με $3<x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-3<x_2-3 \Rightarrow \ln(x_1-3)<\ln(x_2-3)$
$\Rightarrow -\ln(x_1-3)>-\ln(x_2-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2-\ln(x_1-3)>2-\ln(x_2-3) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,+\infty)$.

γ) $f(x)=\sqrt{3-x}+2$

Η f ορίζεται όταν $3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(-\infty,3]$.

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,3]$ με $x_1<x_2\leq 3$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 3-x_1>3-x_2 \Rightarrow \sqrt{3-x_1}>\sqrt{3-x_2}$
$\Rightarrow \sqrt{3-x_1}+2>\sqrt{3-x_2}+2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$.

δ) $f(x)=x^3-3x^2+3x+3=x^3-3x^2+3x-1+4=(x-1)^3+4$

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow (x_1-1)^3<(x_2-1)^3 \Rightarrow (x_1-1)^3+4<(x_2-1)^3+4$
$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) $f(x)=7e^{2-x}+3$

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 2-x_1>2-x_2 \Rightarrow e^{2-x_1}>e^{2-x_2} \Rightarrow 7e^{2-x_1}>7e^{2-x_2}$
$\Rightarrow 7e^{2-x_1}+3>7e^{2-x_2}+3 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

στ) $f(x)=x^2-2x+1-6=(x-1)^2-6$, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2<1$. Έχουμε:
  $x_1<x_2<1\Rightarrow x_1-1<x_2-1<0\Rightarrow (x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Rightarrow$
  $(x_1-1)^2-6>(x_2-1)^2-6\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

- Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $1\le x_1<x_2$. Έχουμε:
  $1\le x_1<x_2\Rightarrow 0\le x_1-1<x_2-1\Rightarrow (x_1-1)^2<(x_2-1)^2\Rightarrow$

  $(x_1-1)^2-6<(x_2-1)^2-6\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+x=3$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x}+e^{3x}+e^x<3$.
Λύση

$f(x)=x^5+x^3+x-3$ με $f(1)=0$

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5 \qquad (1)$

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3 \qquad (2)$

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-3<x_2-3 \qquad (3)$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και έχουμε

$x_1^5+x_1^3+x_1-3<x_2^5+x_2^3+x_2-3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $x^5+x^3+x=3\Leftrightarrow x^5+x^3+x-3=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\uparrow,1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

γ) $e^{5x}+e^{3x}+e^{x}<3\Leftrightarrow$

$e^{5x}+e^{3x}+e^{x}-3<0\Leftrightarrow f(e^{x})<f(1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x}<1\Leftrightarrow e^{x}<e^{0}\Leftrightarrow x<0$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+7}-x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+7}-x+5=0$.

Λύση

$f(x)=2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+7}-x$

α) Η f ορίζεται όταν $2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$ και $x+7\geq 0\Leftrightarrow x\geq -7$.

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς προκύπτει $-7\leq x\leq 2$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=[-7,2]$.

Έστω $x_1,x_2\in[-7,2]$ με $-7\leq x_1<x_2\leq 2$. Έχουμε

$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 2-x_1>2-x_2\Rightarrow \sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2-x_1}>2\sqrt{2-x_2}$ (1)

$x_1<x_2\Rightarrow x_1+7<x_2+7\Rightarrow \sqrt{x_1+7}<\sqrt{x_2+7}\Rightarrow -\sqrt{x_1+7}>-\sqrt{x_2+7}$
(2)

$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2$ (3)

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και έχουμε

$2\sqrt{2-x_1}-\sqrt{x_1+7}-x_1>2\sqrt{2-x_2}-\sqrt{x_2+7}-x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-7,2]$.

β) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+7}-x+5=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+7}-x=-5\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{f\uparrow,1-1}{\Leftrightarrow} x=2$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Λύση

$f(x)=e^{x}+x-1$ με $f(0)=0$

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$ (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε:

$e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{f\uparrow,1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

γ) Για $x < 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$

Για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της $f(x)$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)$	-	+

27. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$

β) $\ln\dfrac{3^x + 4^x}{5^x} < e^{5^x} - e^{3^x+4^x}$

Λύση

α) Θεωρώ συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2$ (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε:

$2^{x_1}+x_1<2^{x_2}+x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ανίσωση γράφεται $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6 \Leftrightarrow$

$2^{3x-x^2}+3x-x^2>2^{6-2x}+6-2x \Leftrightarrow f(3x-x^2)>f(6-2x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 3x-x^2>6-2x \Leftrightarrow$
$x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow 2<x<3$.

β) Θεωρώ συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^x$, η οποία ορίζεται στο $(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $0<x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \qquad (1)$

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \qquad (2)$

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε:

$\ln x_1+e^{x_1}<\ln x_2+e^{x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η ανίσωση γράφεται:

$$\ln\frac{3^x+4^x}{5^x}<e^{5^x}-e^{3^x+4^x} \Leftrightarrow \ln(3^x+4^x)-\ln 5^x<e^{5^x}-e^{3^x+4^x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(3^x+4^x)+e^{3^x+4^x}<\ln 5^x+e^{5^x} \Leftrightarrow f(3^x+4^x)<f(5^x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 3^x+4^x<5^x \overset{:5^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x<1 \qquad (3)$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x-1$ με $g(2)=0$ η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x_1}>(\frac{3}{5})^{x_2} \qquad (4)$

$x_1<x_2 \Rightarrow (\frac{4}{5})^{x_1}>(\frac{4}{5})^{x_2} \Rightarrow (\frac{4}{5})^{x_1}-1>(\frac{4}{5})^{x_2}-1 \qquad (5)$

Προσθέτουμε τις (4), (5) κατά μέλη και έχουμε

$(\frac{3}{5})^{x_1}+(\frac{4}{5})^{x_1}-1>(\frac{3}{5})^{x_2}+(\frac{4}{5})^{x_2}-1 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η ανίσωση (3) γράφεται $(3) \Leftrightarrow g(x) < g(2) \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} x > 2$.

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος