ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ 162

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142

Α4.

- **α)** Σωστό
- **β)** Λάθος
- **γ)** Σωστό
- **δ)** Λάθος
- **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$A_{g\circ h} = \left\{ x \in A_h \mid h(x) \in A_g \right\}$

$x \in A_h$ και $h(x) \in A_g \Rightarrow x > 0$ και $h(x) > 0 \Rightarrow x > 0$ και $\ln x > \ln 1 \Rightarrow x > 0$ και $x > 1 \Rightarrow x > 1$

Άρα $A_f = A_{g\circ h} = (1, +\infty)$

και $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \dfrac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \dfrac{x+1}{x-1}$

Άρα $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Β2.

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) = (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Άρα η f $\searrow$ στο $(1, +\infty)$ και «1-1» οπότε αντιστρέφεται

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1)\frac{1}{x-1} = +\infty \text{ διότι } \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \text{ και } \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Η f συνεχής και ↘ στο $A=(1,+\infty)$ οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$$

Έστω $y\in(1,+\infty)$ με

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow yx-x=y+1\Leftrightarrow(y-1)x=y+1\Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$$

Άρα $f^{-1}:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Επειδή $A_f=A_{f^{-1}}$ και $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in A_f=A_{f^{-1}}$ έχουμε $f^{-1}=f$

Β3.

Δείξαμε $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ άρα $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
Επίσης $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ άρα $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

Δείξαμε $f(A)=(1,+\infty)$ άρα $f(x)>1$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$
Γνωρίζουμε ότι $-1\le \text{συν}(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Άρα $f(x)>1\ge \text{συν}(x)$ για κάθε $x>1$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\text{συν}(x)$ είναι αδύνατη.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

i.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση
$f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=-x+2\Leftrightarrow f(x)+x-2=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.
Έστω $g(x)=f(x)+x-2$, τότε
g συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών
$g(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$
$g(2)=f(2)+2-2=f(2)=2>0$
$g(1)g(2)<0$
Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-x+2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$ οπότε η C_f και η (ε_1) έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ έχει εξίσωση:

$y - f(2) = f'(2)(X - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x$

Άρα η C_f εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$

Γ2.

Επειδή $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,2], οπότε

$1 \le x \le 2 \xleftrightarrow{f'\downarrow} f'(1) \ge f'(x) \ge f'(2) \Leftrightarrow f'(1) \ge f'(x) \ge 1$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο [1,2]

Επειδή f γνησίως αύξουσα στο [1,2] η f είναι "1-1" οπότε αντιστρέφεται

και $A_{f^{-1}} = f(A) = [f(1), f(2)] = [0, 2]$.

Γ3.

f παραγωγίσιμη στα [1,x] και [x,2] άρα και συνεχής, όπου $1 < x < 2$.

Από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, 2)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 0}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1}$$

και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \dfrac{2 - f(x)}{2 - x}$.

Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ και f' γνησίως φθίνουσα έχουμε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x - 1} > \dfrac{2 - f(x)}{2 - x}$, $x \in (1, 2)$.

Γ4.

i.

Για $x = 1, f(1) \ge 2*1 - 2 \Leftrightarrow f(1) \ge 0$ ισχύει σαν ισότητα

Για $x = 2, f(2) \ge 2*2 - 2 \Leftrightarrow f(2) \ge 2$ ισχύει σαν ισότητα

Για $1 < x < 2$ δείξαμε

$$\frac{f(x)}{x - 1} > \frac{2 - f(x)}{2 - x} \xleftrightarrow[2-x>0]{x-1>0} (x - 1)(2 - x)\frac{f(x)}{x - 1} > (x - 1)(2 - x)\frac{2 - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow (2 - x)f(x) > (x - 1)(2 - f(x)) \Leftrightarrow$$

$2f(x) - xf(x) > 2x - xf(x) - 2 + f(x) \Leftrightarrow f(x) > 2x - 2$

Άρα για κάθε $x \in [1, 2]$ θα ισχύει $f(x) \ge 2x - 2$

ii.

Δείξαμε $f(x) \geq 2x - 2$ για κάθε $x \in [1,2]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$ ή $x = 2$

Άρα $\int_1^2 f(x)dx > \int_1^2 (2x-2) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > \left[x^2 - 2x\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > 4 - 4 - (1-2) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > 1$ (1)

Έχουμε $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ άρα η f είναι κοίλη στο $[1,2]$

οπότε η C_f θα βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής. Άρα $f(x) \leq x$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 2$. Άρα

$\int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 xdx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx < 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx < \frac{3}{2}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow 1 < \int_1^2 f(x)dx < \frac{3}{2}$.

Έχουμε $g(x) = f(x) - ex$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = e^x$ άρα $f'(x) = e^x$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$ έχει εξίσωση: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ (1)

Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα ισχύει

$-f(x_1) = -f'(x_1) * x_1 \Leftrightarrow e^{x_1} = x_1 * e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1}(1 - x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

Τότε (1) $\Leftrightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = e(x-1) \Leftrightarrow y - e = ex - e \Leftrightarrow y = ex$.

Δ2.

•Για $x > 0$, $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής.

Δηλαδή, η C_f έχει με την y=ex ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(1, f(1))$

•Για $x = 0$, $f(0) = e^0 = 1$ και το σημείο $(0,1)$ δεν ανήκει στην $y = ex$

•Για $x < 0$, θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - ex = -e^{-x} + 2 - ex$

Τότε $g'(x) = e^{-x} - e$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	0
g'(x)	+	-	
g	↗	↘	

- Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και ↗ άρα $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\right]$ (2)

$g(x)=-e^{-x}ex+2=e^{-x}\left(-1+\dfrac{2-ex}{e^{-x}}\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-ex}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DHL}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e}{e^{-x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=(+\infty)(-1+0)=-\infty$

Επίσης $g(-1)=-e+e+2=2$ άρα $(2)\Rightarrow g(A_1)=(-\infty,2]$

$0\in g(A_1)$ άρα υπάρχει $x_0\in A_1: g(x_0)=0$

Επειδή g ↗ στο A_1 άρα και «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

- Στο $A_2=[-1,0)$ η g είναι συνεχής και ↘ άρα $g(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to0^-} g(x), g(-1)\right]$ (3)

Όμως $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-e^{-x}-ex+2\right)=-1+2=1$ άρα $(3)\Rightarrow g(A_2)=(1,2]$

Επειδή $0\notin g(A_2)$ η g δεν έχει ρίζα στο A_2.

Άρα η C_f και η $\varepsilon: y=ex$ εκτός από το A(1,e) έχουν ακριβώς ένα ακόμη κοινό σημείο το $B(x_0, f(x_0))$ με $x_0<-1$.

Δ3.

Έχουμε $g(x)=f(x)-ex$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και έχει μοναδικές ρίζες το $x_0<-1$ και το $x_1=1$.

Άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών της.

Επειδή $g(0)=f(0)-0=1>0$ θα είναι $g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-ex>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$ και επειδή $g(x_0)=g(1)=0$ θα είναι $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[x_0,1]$. Άρα

$$E=\int_{x_0}^{1} g(x)dx=\int_{x_0}^{1}\left(f(x)-ex\right)dx=\int_{x_0}^{1} f(x)dx-\int_{x_0}^{1} exdx \quad (4)$$

$$\bullet\int_{x_0}^{1} f(x)dx=\int_{x_0}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{x_0}^{0}\left(-e^{-x}+2\right)dx+\int_{0}^{1} e^{x}dx$$

$$=\left[e^{-x}+2x\right]_{x_0}^{0}+\left[e^{x}\right]_{0}^{1}=1-\left(e^{-x_0}+2x_0\right)+e-1=-e^{-x_0}-2x_0+e$$

• $\int_{x_0}^{1} exdx = e\left[\frac{x^2}{x}\right]_{x_0}^{1} = e\left(\frac{x_0^{\ 2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

Άρα $(4) \Rightarrow E = e\left(\frac{x_0^{\ 2}}{2} - \frac{1}{2}\right) - e^{x_0} - 2x_0 + e$ τ.μ.

Δ4.

Το κινητό 1 κινείται στην C_f και έστω $\Delta(x_2, f(x_2))$ μια τυχαία θέση του.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$

Άρα η C_f τέμνει τον x'x στο $Z(-\ln 2, 0)$.

Το κινητό 2 κινείται πάνω στην ευθεία y=ex από το Β στο Ο και έστω $E(x_3, ex_3)$ μια τυχαία θέση του.

Ισχύει $f(x_2) = ex_3 \Leftrightarrow -e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{-e^{-x_2} + 2}{e} = \frac{2}{e} - e^{-x_2-1}$

Η οριζόντια απόσταση θα είναι: $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = x_3 - x_2 = \frac{2}{e} - e^{-x_2-1} - x_2$

Θεωρούμε την συνάρτηση $d(x) = \frac{2}{e} - e^{-x-1}$, $x \in [x_0, -\ln 2]$

Τότε

$d'(x) = e^{-x-1} - 1$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x-1} = 1 \Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x-1} > 1 \Leftrightarrow -x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$ -1	-ln2
d'(x)	+	-
d	↗	↘

Μέγιστο για x=-1 άρα $d_{max} = d(-1) = \frac{2}{e} - e^0 + 1 = \frac{2}{e}$

<u>Επιμέλεια</u>:

Κουβούσης Παναγιώτης

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος