ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 06 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α4.

- **α)** Λάθος
- **β)** Λάθος
- **γ)** Λάθος
- **δ)** Σωστό
- **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$A_f = \{x \in A_h \mid h(x) \in A_g\} = \{x \in (0,+\infty) \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x \in (0,+\infty) \text{ και } x \in (0,+\infty)\} = (0,+\infty) \neq \varnothing$$

οπότε ορίζεται η $f = g \circ h$.

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x}$$

Β2.

i. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως ρητή.

$$f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x}\right)' = \frac{(4-x^2)' \cdot x - (4-x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} = -\frac{x^2+4}{x^2} < 0$$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2} > \dfrac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} e\left(4-\pi^2\right) < \pi\left(4-e^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{4-\pi^2}{\pi} < \dfrac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} \pi > e$, το οποίο ισχύει.

B3.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(4-x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty,$$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(4-x^2\right) = 4 > 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$,

άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0,$$

άρα $\psi = -x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

Για $x>2$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| = \frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|}, \text{ οπότε } -\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty, \textbf{ οπότε } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0.$$

Από (1) με κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε

$$\int_2^3 xf(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9\alpha}{2}-2-2\alpha = 1$$

$$1+\frac{9\alpha}{2}-2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1 \end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-2) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ οπότε f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=-1$ συνεπώς ορίζεται εφαπτομένη για την C_f στο $x_0 = 1$

ii) $\varepsilon: y-f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$

Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{3\pi}{4}$ διότι $0\le\omega<\pi$

Γ3. Για $x<1$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x>1$ η f είναι συνεχής ως ρητή

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3x+3) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x} = 1$

Άρα f συνεχής και στο 1, οπότε f συνεχής στο R

Για $x<1$, $f'(x) = 2x-3<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$

Για $x<1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 1 η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα και «1-1»

Στο $A_1 = (-\infty,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (1,+\infty)$$

Στο $A_2 = [1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0,1]$$

Οπότε $f(A) = f(A_1)\cup f(A_2) = (0,+\infty)$

Γ4. Για $x>1$ έχουμε $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$ για κάθε $x>1$ άρα η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x)\geq y \Leftrightarrow f(x)-y\geq 0$ και f(x)>0 στο [2,e].

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^2 (f(x)-y)dx+\int_2^e f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e f(x)dx=\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^e+\left[\ln|x|\right]_2^e=$$

$$=\ln2+2-4-\left(\frac{1}{2}-2\right)+(1-\ln2)=\ln2-2+\frac{3}{2}+1-\ln2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l\in R$.

Είναι $f(x)=g(x)\cdot(x-1)+2x$, οπότε
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}[g(x)\cdot(x-1)+2x]=l\cdot0+2=2$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa]=\ln1-1+\kappa=\kappa-1$, οπότε

$$\kappa-1=2\Leftrightarrow\kappa=3.$$

Δ2.

i) Για $\kappa=3$ προκύπτει $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3$ με $x\in(0,2)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ ως πράξεις και συνθέσεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)'+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2\cdot(x-2)}.$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$, που απορρίπτεται, διότι $x\in(0,2)$.

Επίσης, είναι $f'(x)>0 \overset{x-2<0,\,x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2+x-2<0 \overset{0<x<2}{\Leftrightarrow} 0<x<1$ και όμοια

$$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<2.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	OM 2	$\searrow$	

Αφού $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ για $1 < x < 2$, $f'(1) = 0$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,2)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,2)$.
Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = ln1 - 1 + 3 = 2$.

Είναι

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3] = -\infty$,
- $f(1) = 2$,
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}[ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3] = -\infty$.

Το σύνολο τιμών της f στο Δ_1 είναι $f(\Delta_1) \overset{f\uparrow}{=} (\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$, άρα υπάρχει αριθμός $x_1 \in (0,1)$, μοναδικός, λόγω μονοτονίας, τέτοιος, ώστε $f(x_1) = 0$.

Το σύνολο τιμών της f στο Δ_2 είναι $f(\Delta_2) \overset{f\downarrow}{=} (\lim\limits_{x\to 2^-}, f(x)] = (-\infty, 2]$, άρα υπάρχει αριθμός $x_2 \in (1,2)$, μοναδικός, λόγω μονοτονίας, τέτοιος, ώστε $f(x_2) = 0$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Έστω $\frac{1}{3} \leq x_1 < 1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\frac{1}{3}) \leq f(x_1) < f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{3}) < 0$, άτοπο, διότι $f(\frac{1}{3}) = ln(2 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = ln\frac{5}{3} > ln1 = 0$.

Δ3.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$, τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = \frac{3\cdot f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $(\frac{1}{3}, x_1) \subseteq (0,1)$, οπότε υπάρχει αριθμός $\xi \in (\frac{1}{3}, x_1)$, άρα $\xi \in (0,1)$, τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3 \cdot f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ ως πράξεις και συνθέσεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2})' = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,2),$$

άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε ο αριθμός ξ είναι μοναδικός.

Επομένως, υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\frac{3 \cdot f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$.

Δ4.

i) Αφού οι συναρτήσεις F, G είναι αρχικές συναρτήσεις της f ισχύουν $F(x) = G(x)$, άρα υπάρχει αριθμός $c \in R$, τέτοιος, ώστε

$$F(x) = G(x) + c. \quad (1)$$

Για $x = x_1$ $(1) \Rightarrow F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$, αφού $F(x_1) = 0$.

Έτσι, $(1) \Leftrightarrow F(x) = G(x) - G(x_1)$.

Για $x = x_2$ $(2) \Rightarrow F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$, αφού $G(x_2) = 0$.

ii) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα (x_1, x_2) ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(x_1) = x_1 \cdot F(x_1) + x_2 \cdot G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = -x_2 \cdot F(x_2) + x_1 - x_2$ και

$h(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 \cdot F(x_2) - x_1 + x_2$,

διότι $F(x_1) = G(x_2) = 0$.

Είναι $x_1 < x_2$ και αναζητούμε το πρόσημο του $F(x_2)$.

Είναι $F'(x) = f(x)$.

Αφού x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ είναι οι μοναδικές ρίζες της f και η f είναι συνεχής δεν μηδενίζεται στο διάστημα (x_1, x_2), διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Είναι $f(1) = 2$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, οπότε $F'(x) = f(x) > 0$.

Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (x_1, x_2).

Έτσι, $x_1 < x_2 \overset{F \nearrow}{\Rightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0$, αφού $F(x_1) = 0$.
Αφού $0 < x_1 < x_2$ και $F(x_2) > 0$, προκύπτει $h(x_1) < 0$ και $h(x_2) > 0$, οπότε $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ και σύμφωνα με θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).
Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 = x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2 =$$
$$= f(x) \cdot (x_1 + x_2) + 2 > 0, \text{ διότι } f(x) > 0$$

για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και $0 < x_1 < x_2$.

Συνεπώς η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (x_1, x_2).

Επομένως, η ρίζα της εξίσωσης

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0$$

είναι μοναδική στο διάστημα (x_1, x_2).

Επιμέλεια: Καραγιάννης Κωνσταντίνος

Κουβούσης Παναγιώτης

Μακρίδης Ηλίας

Μακρίδης Κωνσταντίνος

Μπαμπέ Αφροδίτη

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος

Σάββας Νίκος