Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Σωστό
6. Λάθος
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος
11. Λάθος
12. Λάθος
13. Σωστό
14. Σωστό
15. Σωστό
16. Λάθος
17. Λάθος
18. Σωστό
19. Σωστό
20. Σωστό
21. Λάθος
22. Λάθος
23. Λάθος
24. Σωστό
25. Σωστό
26. Σωστό
27. Σωστό
28. Λάθος
29. Σωστό
30. Σωστό
31. Σωστό
32. Λάθος
33. Λάθος
34. Σωστό
35. Λάθος
36. Λάθος

37. Λάθος
38. Σωστό
39. Σωστό
40. Σωστό
41. Σωστό
42. Λάθος
43. Σωστό

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Τα παρακάτω θέματα αποτελούν βασικές γνώσεις στο 2ο Κεφάλαιο

1.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$A=\frac{\left(x^2y^{-1}\right)^3}{xy}:\frac{\left(x^2y\right)^4\left(x^3y^2\right)^{-1}}{\left(y^4x\right)^2}=\frac{x^6y^{-3}}{xy}:\frac{x^8y^4x^{-3}y^{-2}}{y^8x^2}=$$

$$x^5y^{-4}:\frac{x^5y^2}{y^8x^2}=x^5y^{-4}:x^3y^{-6}=\ x^2y^2=\left(xy\right)^2\ (1)$$

β)

- Για $x=2020$ και $y=\frac{1}{2020}$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A=\left(\cancel{2020}\cdot\frac{1}{\cancel{2020}}\right)^2=1^2=1$$

2.

ΛΥΣΗ

$$A=\left(\frac{xy^{-1}}{z^2}\right)^2:\left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2}:\frac{y^3z^2}{z^{-3}x^2}\right)=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}:\left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2}\cdot\frac{z^{-3}x^2}{y^3z^2}\right)=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}:\frac{x^{-1}z^{-1}}{y^5}=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}\cdot\frac{y^5}{x^{-1}z^{-1}}=$$

$$\frac{x^3y^3}{z^3}=\left(\frac{xy}{z}\right)^3$$

Για $x = -6,\ \ y = 1{,}5,\ \ z = 9$

$$A = \left(\frac{xy}{z}\right)^3 = \left(\frac{-6 \cdot 1{,}5}{9}\right)^3 = (-1)^3 = -1$$

3.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$A = \frac{(\alpha-\beta)^2 + 3\alpha\beta}{\alpha^3 - \beta^3} =$$

$$\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 3\alpha\beta}{(\alpha-\beta)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)} =$$

$$\frac{\cancel{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}}{(\alpha-\beta)\left(\cancel{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}\right)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \quad (1)$$

β) Για $\alpha = 2020$ και $\beta = 2019$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A = \frac{1}{2020 - 2019} = \frac{1}{1} = 1$$

4.

ΛΥΣΗ

α) $\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 \cancel{+2\alpha x\beta y} + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 \cancel{-2\alpha x\beta y} + \beta^2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2$$

β) $\alpha(\alpha - 2\beta)^3 - \beta(\beta - 2\alpha)^3 = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)(\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow$

$$\alpha\left(\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 - 8\beta^3\right) - \beta\left(\beta^3 - 6\beta^2\alpha + 12\beta\alpha^2 - 8\alpha^3\right) = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\alpha^4} - 6\alpha^3\beta \cancel{+12\alpha^2\beta^2} - 8\alpha\beta^3 \cancel{-\beta^4} + 6\beta^3\alpha \cancel{-12\beta^2\alpha^2} + 8\alpha^3\beta = \cancel{\alpha^4} + 2\alpha^3\beta \cancel{+\alpha^2\beta^2} \cancel{-\alpha^2\beta^2} - 2\alpha\beta^3 \cancel{-\beta^4} \Leftrightarrow$$

$$+2\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3 = +2\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3$$

5.

ΛΥΣΗ

α) $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{+2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{-2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

β) $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{-2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{+2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

γ) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$\alpha^3+\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}+\beta^3-\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3+\beta^3$

δ) $(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=$

$\alpha^3-\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}-\beta^3+\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3-\beta^3$

6.

ΛΥΣΗ

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$$

$$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}-x^2+2-\frac{1}{x^2}=4$$

7.

ΛΥΣΗ

Αφού $x-y=-2\Leftrightarrow x=y-2$ τότε έχουμε:

$x^3-2x^2-y^3+8y^2-20y=$

$(y-2)^3-2(y-2)^2-y^3+8y^2-20y=$

$\cancel{y^3}-\cancel{6y^2}+\cancel{12y}-8-\cancel{2y^2}+\cancel{8y}-8\cancel{-y^3}+\cancel{8y^2}-\cancel{20y}=-16$

8.

ΛΥΣΗ

Από ταυτότητα του Euler ισχύει ότι αν:

$\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Τότε:

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\frac{3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=3$$

9.

ΛΥΣΗ

α) $\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{\cancel{x^2+x+1}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{(\cancel{x-1})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x-1})(\cancel{x^2+x+1})}=1$

β) $\frac{y(y-2)+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{y^2-2y+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)^2}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)}{(y-2)}$

γ) $\frac{\omega^2-1}{\omega^2+3\omega}:\frac{\omega^2+\omega}{2\omega^3+6\omega^2}=\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega(\omega+3)}\cdot\frac{2\omega^2(\omega+3)}{\omega(\omega+1)}=2(\omega-1)$

10.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\alpha(\alpha+6)=\beta(2-\beta)-10\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha=2\beta-\beta^2-10\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+10=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+9+1=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2+6\alpha+9)+(\beta^2-2\beta+1)=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+3)^2+(\beta-1)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+3=0\\ \beta-1=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-3 \text{ και } \beta=1$$

11.

ΛΥΣΗ

$$\alpha(\alpha+6\beta)\geq\beta(4\alpha-\beta)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha\beta\geq4\alpha\beta-\beta^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha\beta-4\alpha\beta+\beta^2\geq0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\geq0,$$

που ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

12.

ΛΥΣΗ

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4\overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2+4\geq 4\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-4\alpha+4\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-2)^2\geq 0$ που ισχύει.

β) Από ερώτημα (α) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\geq 4\\ \left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 4\end{aligned}\right\}\overset{\substack{\text{ολα τα μελη θετικα αρα}\\ \text{πολλαπλασιαζω κατα μελη}}}{\Leftrightarrow}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

13.

ΛΥΣΗ

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq 2\overset{\cdot xy<0}{\Leftrightarrow}x^2+y^2\geq 2xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$ που ισχύει

14.

ΛΥΣΗ

α) $2x^2-6x+10>2xy-y^2\Leftrightarrow$

$$x^2+x^2-6x+10-2xy+y^2>0\Leftrightarrow$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-6x+9+1>0\Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2+(x-3)^2+1>0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

β) $x^2+y^2\geq xy\Leftrightarrow$

$$x^2-xy+y^2\geq 0\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$
$$2x^2-2xy+2y^2\geq 0\Leftrightarrow$$
$$x^2+x^2-2xy+y^2+y^2\geq 0\Leftrightarrow$$
$$x^2+(x-y)^2+y^2\geq 0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών

15.

ΛΥΣΗ

$$(x+1)^2 + y^2 \le 4x - 3(2y+3) \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 6y + 9 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

16.

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση είναι $0 < x < 1$ άρα

$$\left.\begin{array}{l} x < 1 \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^2 < x \\ x^2 < x \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^3 < x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 < x^2 < x \Rightarrow x^3 < x$$

β) Από υπόθεση είναι $0 < x < 1 \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{1}{x}$ και από ερώτημα (α) έχουμε τελικά:

$$0 < x^3 < x < 1 < \frac{1}{x}$$

17.

ΛΥΣΗ

- Είναι :

$$1 \le x \le 3 \Rightarrow 1^2 \le x^2 \le 3^2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 9 \overset{(\cdot 3)}{\Rightarrow} 3 \le 3x^2 \le 27 \quad (1)$$

- Ομοίως:

$$-2 \le y \le 0 \overset{(-2)}{\Rightarrow} 4 \ge -2y \ge 0 \Rightarrow 0 \le -2y \le 4 \quad (2)$$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$3 \le 3x^2 - 2y \le 31$$

18.
ΛΥΣΗ
α)

- Είναι :

$1<x<4 \Rightarrow 1<x^2<16 \quad (1)$

- Ομοίως:

$2<y<3 \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} -4>-2y>-6 \Rightarrow -6<-2y<-4 \quad (2)$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$-5<x^2-2y<12$

β)

- Είναι:

$1<x<4 \quad (3)$

$2<y<3 \quad (4)$

- Από τις σχέσεις (3) και (4), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αφού όλα είναι θετικά, έχουμε:

$2<xy<12 \overset{-4}{\Leftrightarrow} -2<xy-4<8$

γ)

- Είναι:

$1<x<4 \Rightarrow \frac{1}{1}>\frac{1}{x}>\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{x}<1 \quad (5)$

- Από τις σχέσεις (2) και (5), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:
  $\frac{1}{4}-6<\frac{1}{x}-2y<1-4 \Leftrightarrow -\frac{23}{4}<\frac{1}{x}-2y<-3$

19.
ΛΥΣΗ
Αφού $-3<x<1$ και $x+3>0$ και $x-1<0$.

Τότε $|x+3|=x+3,\ |x-1|=1-x$ και $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}=\frac{x+3+1-x}{4}=1$

20.
ΛΥΣΗ
- Είναι:

$$-1 \le x \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x-3 \le 0 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2x-6 \le 0 \end{cases}$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$A=x+1-(-x+3)+(-2x+6)=x+1+x-3-2x+6=4$

21.
ΛΥΣΗ

- Είναι:

$$x<4<y \Rightarrow \begin{cases} 4-x>0 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 8-2x>0 \\ y-4>0 \\ x-y<0 \end{cases}.$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$$A=8-2x-(y-4)+(-x+y)=8-2x-y+4-x+y=12-3x$$

22.

ΛΥΣΗ

$$|x+y+z|\le|x+y|+|z|\le|x|+|y|+|z|\le 2+5+9=16$$

23.

ΛΥΣΗ

α) $A=\dfrac{3x^2+|x|}{1+3|x|}=\dfrac{3|x|^2+|x|}{1+3|x|}=\dfrac{|x|(3|x|+1)}{1+3|x|}=|x|=\begin{cases} x, & \alpha\nu\ x\ge 0 \\ -x, & \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$

β) $B=\dfrac{3|x|-9}{x^2-9}+\dfrac{x^2+3|x|}{x^2+6|x|+9}=\dfrac{3(|x|-3)}{(|x|-3)(|x|+3)}+\dfrac{|x|(|x|+3)}{(|x|+3)^2}=\dfrac{3+|x|}{|x|+3}=1$

24.

ΛΥΣΗ

α) $A=\dfrac{\sqrt[3]{9^4}\cdot\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt{9^5}}{\sqrt[4]{9^2}\cdot\sqrt{9^3}}=\dfrac{9^{\frac{4}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{2}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{9^{\frac{24}{6}}}{9^{\frac{4}{2}}}=9^{4-2}=81$

β) $B=\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[24]{8}=\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=$

$\sqrt{2\cdot\sqrt[12]{2^4}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt{\sqrt[12]{2^{12}\cdot 2^4}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt[24]{2^{16}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt[24]{2^{16}\cdot 2^3}=\sqrt[24]{2^{19}}$

25.

ΛΥΣΗ

α) $A=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3\cdot x}}=\sqrt[12]{x^4}=\sqrt[3]{x}$

β) $B=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^7}}}=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8\cdot x^7}}}=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[12]{x^{15}}}=$

$\sqrt[7]{\sqrt[12]{x^{48}\cdot x^{15}}}=\sqrt[84]{x^{63}}=\sqrt[4]{x^3}$

26.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}-\frac{\sqrt{14}+3}{\left(\sqrt{14}-3\right)\left(\sqrt{14}+3\right)}=$$

$$\frac{7+\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{2}^2}-\frac{\sqrt{14}+3}{\sqrt{14}^2-9}=\frac{7+\sqrt{14}}{7-2}-\frac{\sqrt{14}+3}{14-9}=\frac{7+\sqrt{14}-\sqrt{14}-3}{5}=\frac{4}{5}$$

27.

ΛΥΣΗ

- $A=\frac{1}{\sqrt{x}-x}-\frac{1}{\sqrt{x}+x}=\frac{\sqrt{x}+x-\left(\sqrt{x}-x\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}=\frac{\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x}{x-x^2}=\frac{2x}{x(1-x)}=\frac{2}{1-x}$

- Για $x=3$ γίνεται :

  $A=\frac{2}{1-3}=-1$

28.

ΛΥΣΗ

α) $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=$

$\frac{x+\sqrt{x}\sqrt{x-1}+x-1-\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x-1-x}=\frac{2x-1}{-1}=-2x+1$

β) $B=\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2019}-\sqrt{2020}}+\frac{\sqrt{2019}}{\sqrt{2020}+\sqrt{2019}}=-2\cdot 2020+1=-4039$

29.

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-4\geq 0$ και $6-x\geq 0$

$x\geq 4$ $\quad$ $x\leq 6$

Τελικά $x\in[4,6]$

β)

- Για $x=5$ έχουμε: $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$
- Άρα:

  $A^2+A-6=2^2+2-6=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3º: «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Λάθος
6. Σωστό
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος

Τα παρακάτω θέματα αποτελούν βασικές γνώσεις στο 3º Κεφάλαιο

1.

ΛΥΣΗ

α) $5x^2 - 4x = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow$

$2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x=1$

β) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

γ) $(x+2)^3 - 13(x+1) = 1 \Leftrightarrow$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 13x - 13 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+6) - (x+6) = 0 \Leftrightarrow$

$(x+6)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -6$ ή $x = \pm 1$

δ) $(x-5)^2 = 9(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 10x + 25 = 9x^2 + 36x + 36 \Leftrightarrow$

$0 = 8x^2 + 46x + 11 \Leftrightarrow$

$0 = 8x^2 + 44x + 2x + 11 \Leftrightarrow$

$0 = 2x(4x+1) + 11(4x+1) \Leftrightarrow$

$0 = (4x+1)(2x+11) \Leftrightarrow$

$x = -\frac{1}{4}$ ή $x = -\frac{11}{2}$

2.

ΛΥΣΗ

α)

- Πρέπει $x \neq -5$ και $x \neq +5$ και $x \neq 0$

$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{(x+5)(x-5)} = \frac{2x}{x(x+5)} \Leftrightarrow$

$(x+5)(x-5)\frac{1}{x+5} - (x+5)(x-5)\frac{1}{(x+5)(x-5)} = (x+5)(x-5)\frac{2}{x+5} \Leftrightarrow$

$x - 5 - 1 = 2(x-5) \Leftrightarrow$

$x - 6 = 2x - 10 \Leftrightarrow$

$4 = x$

β)

- Πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 2$

$(x-2)(x+2)\frac{4}{x+2} - (x-2)(x+2)\frac{3x}{-(x-2)} = (x-2)(x+2)\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$

$4(x-2) + 3x(x+2) = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$

$4x - 8 + 3x^2 + 6x = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$

$10x = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$

γ)

- Πρέπει $x \neq -3$ και $x \neq 3$

$(x+3)(x-3)\frac{3x-1}{x+3} - (x+3)(x-3)\frac{3x-7}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)(3x-1) - (x+3)(3x-7) = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - x - 9x + 3 - \left(3x^2 - 7x + 9x - 21\right) = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 10x + -3x^2 - 2x + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$21 = 12x \Leftrightarrow$

$x = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

3.

ΛΥΣΗ

α) $|2x-1|-5=3 \Leftrightarrow$

$|2x-1|=8 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x-1=8 \\ 2x-1=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

β) $\dfrac{|x+2|}{3}+\dfrac{1}{2}=4 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$2|x+2|+3=24 \Leftrightarrow$

$2|x+2|=21 \Leftrightarrow$

$|x+2|=\dfrac{21}{2} \Leftrightarrow$

$$\left\langle \begin{matrix} x+2=11,5 \\ x+2=-11,5 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x=9,5 \\ x=-13,5 \end{matrix} \right.$$

γ) $\dfrac{|4-x|}{2}+\dfrac{1}{3}=|x-4| \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$3|x-4|+2=6|x-4| \Leftrightarrow$

$2=3|x-4| \Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{3}=|x-4| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-4=\dfrac{2}{3} \\ x-4=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ x=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

δ)

$||x+1|-2x|=6 \Leftrightarrow$

$|x+1|-2x=6$ ή $|x+1|-2x=-6 \Leftrightarrow$

$|x+1|=2x+6$ πρέπει $2x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$ | $|x+1|=2x-6$ πρέπει $2x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$

$x+1=2x+6$ ή $x+1=-2x-6$ | $x+1=2x-6$ ή $x+1=-2x+6$

$-5=x$ απορ. $\quad x=-\dfrac{7}{3}$ | $x=7 \quad x=\dfrac{5}{3}$ απορ.

4.

ΛΥΣΗ

α) $|x+4|-|3x-5|=0 \Leftrightarrow$

$|x+4|=|3x-5| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+4=3x-5 \\ x+4=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

β) $|2x-3|=x+1$, πρέπει $x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$

$$\begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x-3=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

γ) $||x+2|-1|=3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+2|-1=3 \\ |x+2|-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2|=4 \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x=2 \\ x=-6 \end{matrix} \right. \\ |x+2|=-2 \text{ , αδύνατη} \end{cases}$$

5.

ΛΥΣΗ

- $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda) \Leftrightarrow$

  $\lambda^2 x-\lambda^2=4x-2\lambda \Leftrightarrow$

  $\lambda^2 x-4x=\lambda^2-2\lambda \Leftrightarrow$

  $(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2)$
- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)\ne 0 \Leftrightarrow \lambda\ne 2$ και $\lambda\ne -2$

  $$x=\frac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda}{(\lambda+2)}$$
- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-2$
- Για $\lambda=2$: $0x=0$ αόριστη
- Για $\lambda=-2$: $0x=8$ αδύνατη

6.

ΛΥΣΗ

$\lambda^2(x+1)=1+\lambda x \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x+\lambda^2=1+\lambda x \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x-\lambda x=1-\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=(1+\lambda)(1-\lambda) \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=-(1+\lambda)(\lambda-1)$

Επομένως:

α) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

$$x=\frac{-(1+\lambda)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{-(1+\lambda)}{\lambda}$$

β) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$

και $-(1+\lambda)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=1$

Άρα $\lambda=1$

γ) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$

και $-(1+\lambda)(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -1$ ή $\lambda\neq 1$

Άρα $\lambda=0$

7.

ΛΥΣΗ

α) Αν $\lambda-1>0 \Leftrightarrow \lambda>1$, τότε $x>\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow x>\lambda+1$.

β) Αν $\lambda-1<0 \Leftrightarrow \lambda<1$, τότε $x<\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow x<\lambda+1$.

γ) Αν $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, τότε $0x>0$ αδύνατη.

8. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{x}{2}-1-\frac{3x+1}{3}>x$ και $\frac{2(x-3)}{3}<x$

ΛΥΣΗ

$x\in\left(-6,-\frac{8}{9}\right)$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς