ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 99.

Α2. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 162.

Α3. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 129.

Α4. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0\\ x-1>0\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$ οπότε αν $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$ οπότε η ψ=1 οριζόντια ασύμπτωτη της c_f στο $+\infty$

Β2 $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} - \ln x = 0$

έστω $k(x) = \dfrac{x}{x-1} - \ln x \,|\, [e, e^2]$

i. η κ συνεχής στο $\left[e, e^2\right]$ ως η διαφορά συνεχών

ii. $k(e)k(e^2)=\left(\frac{e}{e-1}-\ln e\right)\left(\frac{e^2}{e^2-1}-\ln e^2\right)=$

$\left(\frac{e}{e-1}-1\right)\cdot\left(\frac{e^2}{e^2-1}-2\right)=\frac{1}{e-1}\cdot\frac{2-e^2}{e^2-1}=\frac{2-e^2}{(e-1)^2(e+1)}<0$
ισχύει Θ. Bolzano οπότε η κ έχει μια τουλ. ρίζα στο (e,e^2)

B3 $Agof=\{x\in(1,+\infty\}$ και $\left.\frac{x}{x-1}\in(0,+\infty)\right\}=\{x\in(1,+\infty)$ και $x(x-1)>0\}=\{x\in(1+\infty)$ και

$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\}=(1,+\infty)\neq\emptyset$ οπότε ορίζεται η gof

$\varphi(x)=(gof)(x)=g(f(x))=\ln\frac{x}{x-1}=\ln x-\ln(x-1)$ για $x\in(1+\infty)$

B4. Για να οριστεί η h πρέπει $\frac{x}{x-1}>0\Leftrightarrow x(x-1)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1+\infty)$

οπότε $A_h=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ $A_\varphi\neq A_h$ επομένως δεν είναι ίσες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x)=\frac{f(x)-\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow xg(x)=f(x)-\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)=x\cdot g(x)+\eta\mu x$, με

$\lim_{x\to0}g(x)=0$

η f συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(xg(x)+\eta\mu x)=0+\eta\mu 0=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)+\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{xg(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left[g(x)+\frac{\eta\mu x}{x}\right]=0+1=1$$

Οπότε $f'(0)=1$

Γ2. $f'(x)f''(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)f''(x)=2x\Leftrightarrow\left[(f'(x))^2\right]'=(x^2)'$

οι συναρτήσεις $f'(x),x^2$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $[f'(x)]^2=x^2+c$

για $x=0$ $f'(0)^2=0+c\Leftrightarrow1=c$ $[f'(x)]^2=x^2+1\neq0$ και εφόσον η f' είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $f'(x)=-\sqrt{x^2+1}$ απόρ. διότι $f'(0)=1$ Άρα $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Γ3 $f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄΄	-	+	
		σ.κ	

στο $(-\infty,0]$ η f είναι κοίλη

στο $[0,+\infty)$ η f είναι κυρτή

το σημείο (0, 0) σημείο καμπής

Γ4 $f'(x)>0$ οπότε η f↑στο R άρα 1-1

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

η εξίσωση εφαπτόμενης της C_f στο $x_0=0$ είναι $\psi-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow\psi=x$

η f κοίλη στο $(-\infty,0]$ οπότε $f(x)\le x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

η f κυρτή στο $[0,+\infty)$ οπότε $f(x)\ge x$ για $[0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f(A)=(-\infty,+\infty)=$ R άρα $A_{f^{-1}}$ = R

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x+0^-}(-x^3+3x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x+0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$ διότι:

$\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x+0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$ ή f συνεχής στο $x_0=0$

$\lim\limits_{x+0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x+0^-}\frac{-x^3+3x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x^3+3x}{x}=\lim\limits_{x+0^-}\frac{-x(x^2-3)}{x}=-\lim\limits_{x+0-}(x^2-3)=3$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(e^{x\ln x})' \underset{D.L.H.}{=} \lim_{x\to 0^+}\left[e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[x^x\cdot(\ln x+1)\right]=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to 0^+} x^x=1,\quad \lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δ2. i) Αναζητάμε τα κρίσιμα σημεία της f στα εσωτερικά σημεία του (-1, $\frac{2}{e}$) όπου η f’ μηδενίζεται ή στα εσωτερικά σημεία που η f δεν είναι παραγωγίσιμη, για $x\in(-1,0)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+3=0\Leftrightarrow -3(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=\pm1$ απορρίπτονται, για $x\in(0,\frac{2}{e})$ $f'(x)=0\Leftrightarrow (e^{x\ln x})'=0\Leftrightarrow x^x(\ln x+1)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ οπότε κρίσιμα σημεία $x=0,\quad x=\frac{1}{e}$

ii) Το πρόσημο της f’ δίνεται από τον πίνακα:

x	-1 0	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{e}$
f’	+	-	+
f	↗	↓	↗

για $A_1=[-1,0]$ $\quad f(A_1)=[f(-1),f(0)]=[-1,1]$

για $A_2=\left[0,\frac{1}{e}\right]$ $\quad f(A_2)=\left[f(\frac{1}{e}),f(0)\right]=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},1\right]$

για $A_3=\left[\frac{1}{e},\frac{2}{e}\right]$ $\quad f(A_3)=\left[f(\frac{1}{e}),f(\frac{2}{e})\right]=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right]$

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=[-1,1]$

η συνάρτηση $f(x)=x^x$ είναι ↗ στο $\left[\frac{1}{e},\frac{2}{e}\right]$ οπότε $\frac{2}{e}<1\Rightarrow\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}<1$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Δ3.

$$\left.\begin{array}{l} -1\le f(\alpha)\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2f(\alpha)\le 2 \\ -1\le f(\beta)\le 1 \Leftrightarrow -3\le 3f(\beta)\le 3 \end{array}\right\} -5\le 2f(\alpha)+2f(\beta)\le 5 \Leftrightarrow -1\le \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}\le 1$$

η f συνεχής στο $\left[-1\frac{2}{e}\right]$με $f(-1)\neq f\left(\frac{2}{e}\right)$ οπότε παίρνει όλες τις τιμές στο $[-1,1]$. Από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ξ $\in\left[-1,\frac{2}{e}\right]$ώστε $f(\xi)=\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

Δ4. $x\cdot f(x)=x\cdot x^x\ge(\ln x+1)\cdot x^x=f'(x)$ διότι $\ln x\le x-1$ (το = ισχύει για x=1)

$\ln x<x-1\Leftrightarrow \ln x+1<x$

Επειδή $\ln x\le x-1$ για x>0 με το '=' να ισχύει μόνο για x=1,

Για $x\in\left[\frac{1}{e},\frac{2}{e}\right]$ ισχύει:

$\ln x<x-1\Leftrightarrow \ln x+1<x$

Επίσης, $f(x)=x^x>0$ άρα

$xf(x)>f(x)(\ln x+1)\Leftrightarrow xf(x)>x^x(\ln x+1)\Leftrightarrow xf(x)>f'(x)$

οπότε

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx>\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}}=f\left(\frac{2}{e}\right)-f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{e}{2}}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

<u>Επιμέλεια</u>:

Κουβούσης Παναγιώτης

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος

Σάββας Νίκος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ