ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 06 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 186

**Α2.** Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 142

**Α3.** Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 161

**Α4.**

α) Σ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

$$A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g \ \ \text{και} \ \ g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in[0,+\infty) \ \ \text{και} \ \ \sqrt{x}\le 1\right\}$$
$$=\left\{x\in[0,+\infty) \ \ \text{και} \ \ x\le 1\right\}=[0,1]\neq\varnothing$$

Ορίζεται η $f\circ g$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{x}\right)^4-2\left(\sqrt{x}\right)^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

**Β2.** Η h συνεχής στο $[0,1]$

Για $x\in(0,1)$ $h'(x)=2(x-1)<0$ άρα $h\searrow[0,1]$

$\mu\varepsilon \quad h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]$

$\psi=(x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\psi}=\sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{\psi}=|x-1| \Leftrightarrow \sqrt{\psi}=-x+1$

$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{\psi}$

Οπότε $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$

**Β3.**

**i.** $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}, \quad A_\varphi=[0,1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών.

Στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Οπότε η φ συνεχής στο $x_0=1$, άρα συνεχής στο $[0,1]$.

$\left.\begin{array}{l}\varphi(0)=1\\ \varphi(1)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi(0)\neq\varphi(1)$, οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο $[0,1]$.

**ii.**

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\\ \text{ημx γνησίως αύξουσα στο } \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$ για

την τιμή $\eta=\eta\mu\alpha$ από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε

$\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$

## ΘΕΜΑ Γ

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & ,x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$$

**Γ1.** Για $x<-1$ έχουμε:

$f'(x)=-2 \Leftrightarrow$

$f'(x)=(-2x)' \Leftrightarrow$

$f(x)=-2x+c_1,\ \ \forall x<-1\ \mu\varepsilon\ c_1\in\mathbb{R}\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ \ (\alpha\pi\acute{o}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\varepsilon\varsigma\ \Theta MT)$

Για $x>-1$ έχουμε:

$$f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=(x^3-x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)=x^3-x+c_2,\ \ \forall\, x>-1\ \mu\varepsilon\ c_2\in\mathbb{R}\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ \ (\alpha\pi\acute{o}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\varepsilon\varsigma\ \Theta MT)$$

Ακόμη, επειδή η $C_f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$.

Επιπλέον, η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ειδικότερα στο $x=-1$, επομένως

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(1)$$

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-2x+c_1)=2+c_1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x^3-x)=-1+1=0$

Έπεται ότι $2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$.

Τελικά,

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

**Γ2.** Για $x > -1$, $f(x) = x^3 - x$ και $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $A(\,x_0, f(x_0)\,)$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Επομένως έχουμε,

$$y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1) \cdot (x - x_0)$$

$$y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)x - 3x_0^3 + x_0$$

$$y = (3x_0^2 - 1)x - 2x_0^3$$

Στη συνέχεια, επειδή η εφαπτομένη διέρχεται απ΄ το σημείο $(0, -2)$ θα είναι

$$-2 = -2x_0^3 - 3x_0^2 \cdot 0 - 0 \iff$$

$$x_0^3 = 1 \iff$$

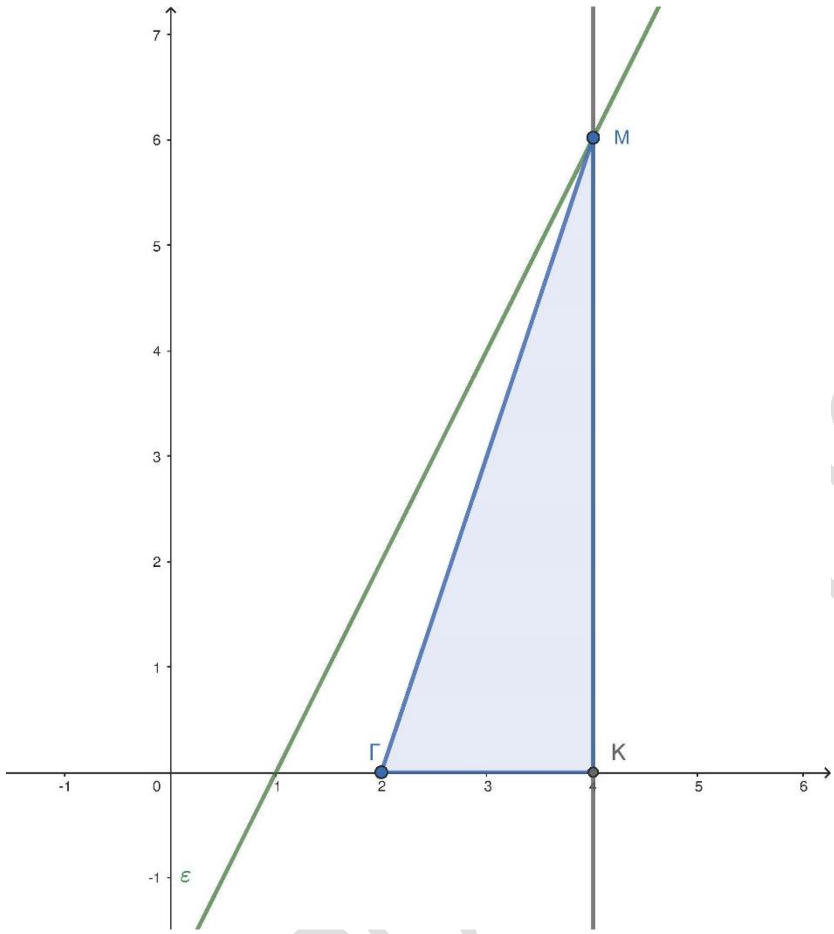
$$x_0 = 1.$$

Συνεπώς, το σημείο επαφής είναι το $A(1, f(1))$ και η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$(\varepsilon):\ y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$(\varepsilon):\ y = 2x - 2.$$

**Γ3.** Από το ερώτημα Γ2 έχουμε ότι $(\varepsilon)$: $y = 2x - 2$.




Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}\,\beta \cdot \upsilon \;\Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\,(x_M - 2) \cdot y_M \;\Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\,(x_M - 2) \cdot (2x_M - 2) \Leftrightarrow$$

$$E = x_M^2 - 3x_M + 2$$

Έτσι έχουμε,

$$E\big(x(t)\big) = x(t)^2 - 3x(t) + 2, \forall\, t \geq 0$$

και

$$E'\big(x(t)\big) = 2x'(t)x(t) - 3x'(t), \forall\, t \geq 0$$

Για $t = t_0$ από την εκφώνηση προκύπτει ότι

$x(t_0) = 3$ , $y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2$ μον/sec.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$E'\big(x(t_0)\big) = 2x'(t_0)x(t_0) - 3x'(t_0)$$

$$E'\big(x(t_0)\big) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \;\; \tau.\mu o\nu./sec$$

**Γ4.**

- Για το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu\, f(x)}{f(x)}\right]$ έχουμε:

$$-1 \le \eta\mu(-2x-2) \le 1 \overset{x<-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{-1}{-2x-2} \le \frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} \le \frac{1}{-2x-2}$$

Όπου

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{-2x-2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x-2} = 0$ επομένως από κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} = 0.$$

- Για το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} \overset{\substack{u=-x\\u\to\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{1+x^3}\right]$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{1+x^3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{1+x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

Τελικά, το ζητούμενο όριο είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu\, f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu\, f(x)}{f(x)}\right] + \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{1+x^3}\right] = 0 + 1 = 1.$$

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

**i)** Η συνάρτηση $f(x) = x - ln(3x)$ ορίζεται, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως διαφορά πολυωνυμικής και λογαριθμικής συνάρτησης με $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επίσης, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $\searrow$ | $1 - ln3$ <br> $OE$ | $\nearrow$ | |

Αφού $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ για $x > 1$, $f'(1) = 0$ και η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$ και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = 1 - ln3 < 0$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq f(1)$ (1). Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Είναι

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - ln(3x)) = +\infty$, διότι $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ και $\lim_{x \to 0^+} (ln(3x)) = -\infty$,
- $f(1) = 1 - ln3$,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - ln(3x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(3x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{ln(3x)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της $f$ στο $\Delta_1$ είναι $f(\Delta_1) \overset{f\downarrow}{=} [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [1 - ln3, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της $f$ στο $\Delta_2$ είναι

$f(\Delta_2) \overset{f\uparrow}{=} [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [1 - ln3, +\infty)$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι

$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1 - ln3, +\infty)$.

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει αριθμός $x_1 \in (0,1)$,τέτοιος, ώστε $f(x_1) = 0$, μοναδικός, διότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$.

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει αριθμός $x_2 \in (1, +\infty)$,τέτοιος, ώστε $f(x_2) = 0$, μοναδικός, διότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $x_1$ και $x_2$.

**ii)** Η συνάρτηση $f'$ ορίζεται, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως ρητή με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η $f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

**Δ2.**

Αφού η συνάρτηση $f$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1$ και $x_2$ και είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(x_1, x_2)$ και αφού για $x_1 < 1 < x_2$ είναι $f(1) = 1 - ln3 < 0$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, οπότε $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $E = \int_{x_1}^{x_2}(-f(x))\,dx =$

$$= \int_{x_1}^{x_2}[ln(3x) - x]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} ln3x\,dx - \int_{x_1}^{x_2} xdx = \int_{x_1}^{x_2}(x)'\cdot ln3xdx - [\frac{x^2}{2}]_{x_1}^{x_2} =$$

$= [x \cdot ln\,(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3\,dx - (\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}) =$

$= x_2 \cdot ln(3x_2) - x_1 \cdot ln(3x_1) - [x]_{x_1}^{x_2} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}.$

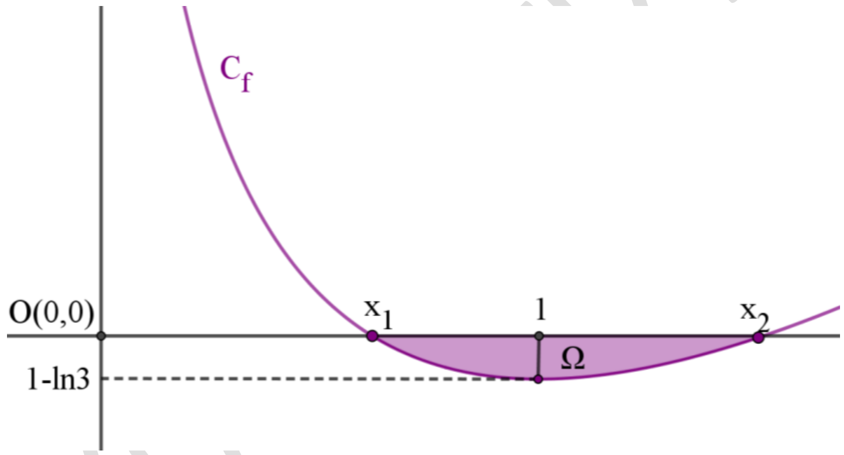
Είναι $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow ln(3x_1) = x_1$ και

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow ln(3x_2) = x_2.$

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$E = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{2(x_2 - x_1)}{2} =$

$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} - \frac{2(x_2 - x_1)}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot (x_2 + x_1 - 2).$




**Δ3.**

$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ με $x_2 > 1$ και $f(x_2) = 0$

$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$

Ισχύει διότι:

$E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \overset{x_2 > x_1}{\Leftrightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$

**Δ4.** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $x_2$ είναι :

$$\psi - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \psi = f'(x_2)(x - x_2)$$

Από **Δ1.** $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(x) - 1 - \ln 3 \geq 0 \quad (1)$

Η f είναι κυρτή οπότε $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \quad (2)$

Η εξίσωση:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$
$$f(x) - 1 + \ln 3 = -f(x) + f'(x_2)(x - x_2)$$
$$f(x) - 1 + \ln 3 = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \quad (3)$$

Από $(1),(2),(3)$ πρέπει

$f(x) - 1 + \ln 3 = 0$ που ισχύει για $x = 1$

Και $f'(x_2)(x - x_2) - f(x) = 0$ που ισχύει για $x = x_2$

Όμως $x_2 > 1$ οπότε αδύνατη.

Επιμέλεια: Καραγιάννης Κωνσταντίνος
Μακρίδης Ηλίας
Μακρίδης Κωνσταντίνος
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος
Σάββας Νίκος