ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 73.

Α3. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 128

Α4. **α.** Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in A_f = (1, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \overset{\sqrt{x}\,:\,\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \overset{\cdot(-1)<0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \overset{+1}{\Leftrightarrow}$$

$$1-\sqrt{x_1} > 1-\sqrt{x_2} \underset{\text{όλα}+}{\overset{\text{αντιστρέφουμε}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{x_1}} < \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

και συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και άρα και $1-1$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

Συνεπώς, $f(A_f) = (-\infty, 0)$ καθώς η f είναι συνεχής στο A_f και γνησίως αύξουσα σε αυτό. Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό της f^{-1}, θέτουμε

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow \\
y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} &\overset{\text{κάνουμε}}{\underset{x-\text{στή}}{\Leftrightarrow}} \\
y\cdot\left(1-\sqrt{x}\right) = 1 &\overset{\div y}{\Leftrightarrow} \\
1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} &\overset{-1}{\Leftrightarrow} \\
-\sqrt{x} = \frac{1}{y} - 1 &\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \\
\sqrt{x} = -\frac{1}{y} + 1 &\Leftrightarrow \\
\sqrt{x} = \frac{y-1}{y} &\overset{\text{όλα}+}{\Leftrightarrow} \\
\sqrt{x}^2 = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 &\Leftrightarrow \\
x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 &
\end{aligned}
$$

και από την τελευταία σχέση, προκύπτει τελικά ότι $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ για κάθε $x \in A_{f^{-1}} = f(A_f) = (-\infty, 0)$.

B2. Αρχικά, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
A_{g\circ f^{-1}} &= \left\{x \in A_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in A_g\right\} \\
&= \left\{x \in (-\infty, 0) \mid \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \in [0, +\infty)\right\} \\
&= (-\infty, 0)
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, σχετικά με τον τύπο της $g\circ f^{-1}$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g\circ f^{-1}(x) &= g\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right) \\
&= \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \\
&= \left|\frac{x-1}{x}\right| \overset{x<0}{=} \frac{x-1}{x}
\end{aligned}
$$

Συνοψίζοντας, $h(x) = g\circ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Β3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f: Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες της C_f: Υπολογίζουμε τα όρια

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty}(h(x)-0\cdot x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Συνεπώς, η C_f έχει (οριζόντια) ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=1$.

Β4. Θα είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{-\frac{x-1}{x}}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$$

έχουμε ότι

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|,\ \forall x\in\mathbb{R}^* \overset{x<0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{1}{x} \le \eta\mu\frac{1}{x} \le \frac{1}{-x} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-\frac{x-1}{x}}}{x} \le e^{-\frac{x-1}{x}}\cdot \eta\mu\frac{1}{x} \le -\frac{e^{-\frac{x-1}{x}}}{x}$$

Υπολογίζουμε τα όρια

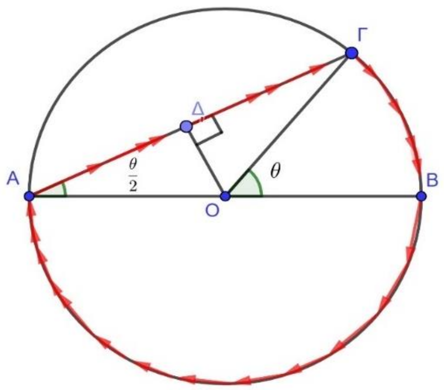
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-\frac{x-1}{x}}}{x}=\dfrac{e^{-1}}{-\infty}=\dfrac{1}{-\infty}\cdot\dfrac{1}{e}=0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-\frac{x-1}{x}}}{-x}=\dfrac{e^{-1}}{+\infty}=\dfrac{1}{+\infty}\cdot\dfrac{1}{e}=0$

Από κριτήριο παρεμβολής, έπεται τελικά ότι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{-\frac{x-1}{x}}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. i) Αν $0<\theta<\pi$



φέρνουμε την κάθετη από το κέντρο Ο στη χορδή ΑΔ. Από Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι ΑΔ=ΔΓ. Επίσης $B\hat{A}\Gamma$ εγγεγραμμένη στο $B\Gamma$ και θα ισχύει $B\hat{A}\Gamma=\dfrac{\theta}{2}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{OA\Delta}$:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}=\frac{A\Delta}{OA}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}=A\Delta\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}=A\Gamma$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για την διαδρομή (1) είναι: $t=t_{A\Gamma}+t_{\Gamma B}\,(1)$

Από το τύπο $s=\upsilon t\Leftrightarrow t=\dfrac{s}{\upsilon}$ εφόσον η κίνηση είναι με σταθερή ταχύτητα.

$s_{A\Gamma}=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}$ και $s_{\Gamma B}=r\cdot\theta=\theta$

οπότε από (1) $t(\theta)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{2}+\dfrac{\theta}{4}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\theta}{4}$

ii) Αν θ=0 η διαδρομή ΑΒ=2 οπότε $t=\dfrac{2}{2}=1h$ και αντικαθιστώντας όπου θ=0 έχουμε $t(0)=\sigma\upsilon\nu0+\dfrac{0}{4}=1$ οπότε επαληθεύεται ο τύπος $t(\theta)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\theta}{4}$.

iii) Αν θ=π η διαδρομή $AB=\pi r=\pi$ οπότε $t=\frac{\pi}{4}$ και αντικαθιστώντας όπου θ=π έχουμε $t(\pi)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ οπότε επαληθεύεται ο τύπος $t(\theta)=\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{4}$

τελικά από **(i)**, **(ii)**, **(iii)** $t(\theta)=\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{4}$ για $\theta\in[0,\pi]$.

Γ2. Η συνάρτηση $t(\theta)$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξη συνεχών, παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$t'(\theta)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}$$

$$t'(\theta)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}=0\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

Προσδιορίζουμε το πρόσημο της t'

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$t'(\theta)$		$+$		$-$	
$t(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	Τ. Ε.		Τ. Μ.		Τ. Ε.

$$t'(0)=\frac{1}{4}>0$$

$$t'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1-\sqrt{2}}{4}<0$$

Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** για $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Γ3.
Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** για θ=0 το $t(0)=1$

Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** για θ=π το $t(\pi)=\frac{\pi}{4}$

Η t είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ οπότε παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα δηλαδή για θ=π.
Οπότε η επιλογή **(iii)** είναι το αποτέλεσμα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-\alpha x}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)}+\alpha x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha\right)\right]$$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha\right)=1+\alpha$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Αν $\alpha+1>0\Leftrightarrow\alpha>-1$ τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)=+\infty$ απορ.

ii) Αν $\alpha+1<0\Leftrightarrow\alpha<-1$ τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)=-\infty$ απορ.

iii) Αν $\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=-1$ τότε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

Οπότε $\alpha=-1$

Δ2.

Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο x_0 είναι:

$$\psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow\psi-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)\quad(\varepsilon)$$

Διέρχεται από το $M(-1,0)$ οπότε:

$$-e^{x_0}=e^{-x_0}(-1-x_0)\Leftrightarrow\cancel{-e^{x_0}}=\cancel{-e^{x_0}}-x_0e^{x_0}\Leftrightarrow-x_0e^{x_0}=0\Leftrightarrow x_0=0$$

μοναδική λύση.

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) είναι:

$$\psi-e^0=e^0(x-0)\Leftrightarrow\psi-1=x\Leftrightarrow\psi=x+1$$

Προσδιορίζουμε τα κοινά σημεία της C_g με την (ε):

$$\left.\begin{array}{l}\psi=x+1\\ \psi=-x^2-x\end{array}\right\}\quad x+1=-x^2-x\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

$g'(x)=-2x-1$ και $g'(-1)=-2(-1)-1=1=\lambda_\varepsilon$

οπότε η (ε) εφάπτεται της C_g.

Δ3.

Για $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = -2x - 1$, $g''(x) = -2 < 0$ οπότε η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $(0,1)$ δηλαδή $e^x \geq x + 1 \quad (1)$.

Η C_g βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $(-1,0)$ δηλαδή $g(x) \leq x + 1 \quad (2)$.

Από $(1),(2)$ $f(x) \geq x + 1 \geq g(x)$ και το '$=$' δεν ισχύει συγχρόνως για το ίδιο x οπότε $f(x) > g(x)$ για $x \in \mathbb{R}$.

Δ4.

Η εξίσωση $\dfrac{f(x-1)-x}{x-\kappa} + \dfrac{f(x)-g(x)}{x-(\kappa+1)} = 0$

θα πάρει τη μορφή $\left[x-(\kappa+1)\right]\left[f(x-1)-x\right] + (x-\kappa)\left[f(x)-g(x)\right] = 0$

Έστω $h(x) = [x-(\kappa+1)][f(x-1)-x] + (x-\kappa)[f(x)-g(x)] \quad |\left[\kappa, \kappa+1\right]$

- η h είναι συνεχής στο $\left[\kappa, \kappa+1\right]$ ως πράξη συνεχών.
- $h(\kappa)h(\kappa+1) = -[f(\kappa-1)-\kappa][f(\kappa+1)-g(\kappa+1)]$

Έχουμε:

$f(x) \geq x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$ και το '$=$' ισχύει για $x = 0$ μόνο

για $x = \kappa - 1$ έχουμε $f(\kappa-1) \geq \kappa - 1 + 1 \Leftrightarrow f(\kappa-1) \geq \kappa$

Όμως $\kappa \neq 1$ οπότε $f(\kappa-1) > \kappa$

Επιπλέον $f(x) > g(x)$ για $x \in \mathbb{R}$

Θέτω όπου το x το κ+1 και θα έχουμε $f(\kappa+1) > g(\kappa+1)$

Τελικά $h(\kappa)h(\kappa+1) < 0$ οπότε ισχύει Θ. Bolzano και θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \kappa+1)$ ώστε $h(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - (\kappa+1))\left[f(x_0-1) - x_0\right] + (x_0 - \kappa)\left[f(x_0) - g(x_0)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x_0 - (\kappa+1)}\left[f(x_0-1)-x_0\right]}{\left[\cancel{x_0 - (\kappa+1)}\right]\left[x_0-\kappa\right]} + \frac{\cancel{(x_0-\kappa)}\left[f(x_0)-g(x_0)\right]}{\left[x_0-(\kappa+1)\right]\cancel{(x_0-\kappa)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0-1)-x_0}{x_0-\kappa} + \frac{f(x_0)-g(x_0)}{x_0-(\kappa+1)} = 0$$

Άρα η εξίσωση $\dfrac{f(x-1)-x}{x-\kappa} + \dfrac{f(x)-g(x)}{x-\kappa-1} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\kappa, \kappa+1)$ με $\kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Επιμέλεια: Ρούτης Κωνσταντίνος, Μακρίδης Κωνσταντίνος, Σάββας Νίκος