ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 135

A2. Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 51

A3. Θεωρία - βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 23

A4.

α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε όπου x to x-1 και προκύπτει

$$f(x-1+1)=(x-1+1)\cdot e^{-(x-1)} \Leftrightarrow f(x)=x\cdot e^{1-x}, x\in\mathbb{R}$$

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και συνθέσεις συνεχών με $f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, διότι $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, διότι $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x<1$, διότι $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1 OM	$\searrow$	

Αφού $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ και η f είναι συνεχής στο R είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}(1-x+1) = (x-2)e^{1-x}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, ενώ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	0 ΣK	$\smile$	

Αφού είναι $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και η f είναι συνεχής στο 2, όπου είναι $f''(2) = 0$, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(2, f(2)) = A(2, \frac{2}{e})$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ και

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$, άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Β4.

i. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = -\infty$, διότι $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα, $f(\Delta_1) \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$

$f(\Delta_2) \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0, 1]$

Άρα, $f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$

ii.

- Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη διότι $\lambda \notin f(D_f)$
- Αν $\lambda = 1$ η $f(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση $x = 1$
- Αν $0 < \lambda < 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει λύσεις $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$, διότι $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$.

  Οι λύσεις είναι μοναδικές διότι f γν. αύξουσα στο Δ_1 και φθίνουσα στο Δ_2.

  Αν $\lambda \le 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in (-\infty, 1)$ διότι $\lambda \in f(\Delta_1)$, ενώ $\lambda \notin f(\Delta_2)$. Η λύση είναι μοναδική διότι η f είναι φθίνουσα στο Δ_1.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \alpha < -3$$

Γ1. Για $x < 0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική 3ου βαθμού

Για $0 < x \le \frac{3\pi}{2}$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

Εξετάζω τη συνέχεια στο 0.

- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $f(0) = \alpha\cdot0^3 - 3\cdot0^2 - 0 + 1 = 1$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Άρα, f συνεχής στο 0, οπότε f συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα στο 0.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x\left(\alpha x^2 - 3x - 1\right)}{x} = -1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0 \neq -1$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.

i.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, αφού είναι συνεχής στο $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\text{ημ}x$
- $f(0) = 1$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{συν}\frac{3\pi}{2} = 0$, άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, οπότε η f δεν ικανοποιεί την 3η προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

  (δεν εφαρμόζεται θεώρημα Rolle για την f στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$).

ii. $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\text{ημ}\xi = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Είναι $0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2}$, άρα $\kappa = 1$ οπότε $\xi = \pi$

Γ3. Τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον $x'x$ είναι τα σημεία $M(x, f(x))$ για τα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

Για $x < 0$, είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$, $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0$ διότι $\alpha < -3$, άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x < 0$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία της C_f με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον $x'x$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Γ4. Για $x<0$ είναι $f'(x)<0$ διότι $\Delta<0$ και $3\alpha<-9<0$, άρα f γν. φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$ αφού η f συνεχής στο 0.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha x^3=+\infty$, διότι $\alpha<0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

Είναι $f(0)=1$, άρα $f(\Delta_1)\overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu}{=}\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$

Για $x\in\Delta_2=\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ με $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1$, άρα $f(\Delta_2)=[-1,1]$ οπότε $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$. Επομένως, $f(x)\ge-1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $k(x)=lnx-\frac{1}{x}$, $x>0$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $k'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $k(1)=ln1-1=-1<0$ και $k(e)=lne-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{1-e}{e}<0$, οπότε $k(1)\cdot k(e)<0$ και αφού η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[1,\varepsilon]\subseteq(0,+\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,e)$, ώστε $k(x_0)=0$, δηλαδή η εξίσωση $k(x)=0\Leftrightarrow lnx=\frac{1}{x}$ έχει ρίζα $x_0\in(1,e)$, η οποία είναι μοναδική αφού η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και στο διάστημα $(1,e)$.

Δ2. Η x_0 είναι ρίζα της $lnx=\frac{1}{x}$, άρα $lnx_0=\frac{1}{x_0}$ (1).

Η συνάρτηση $f(x)=(lnx_0)\cdot(x+1)-lnx-1$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=lnx_0-\frac{1}{x}\overset{(1)}{=}\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}=0\Leftrightarrow x=x_0$.

Επίσης, $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}>0\overset{x_0\cdot x>0}{\Leftrightarrow}x>x_0$ και

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}<0\overset{x_0\cdot x>0}{\Leftrightarrow}0<x<x_0$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(x_0)$	$\searrow$	OE	$\nearrow$	

Αφού $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < x_0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0$ και η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$. Παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = (lnx_0) \cdot (x_0 + 1) - lnx_0 - 1 = lnx_0 \cdot x_0 + lnx_0 - lnx_0 - 1 \overset{(1)}{=} \frac{1}{x_0} \cdot x_0 - 1 = 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Δ3. Οι C_g, C_h έχουν κοινό σημείο αν έχει λύση η εξίσωση

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = (\frac{x_0}{e})^{x+1}$.

Για $x \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Για $x > 0$ είναι $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = (\frac{x_0}{e})^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x \cdot e^{-x}) = \ln(\frac{x_0}{e})^{x+1} \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow lnx - x = (x+1) \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow lnx - x = (x+1) \cdot lnx_0 - (x+1) \cdot lne \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow lnx - x = (x+1) \cdot lnx_0 - x - 1 \Leftrightarrow (x+1) \cdot lnx_0 - lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, οποία έχει μοναδική λύση $x = x_0$.

Επομένως, οι C_g, C_h έχουν κοινό σημείο με τετμημένη x_0 για το οποίο ισχύει

$g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{-x_0} = (\frac{x_0}{e})^{x_0+1}$ (2).

Για να έχουν οι C_g, C_h κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό πρέπει $g'(x_0) = h'(x_0)$.

Οι συναρτήσεις g και h είναι παραγωγίσιμες στο R με $g'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$ και

$h'(x) = (\frac{x_0}{e})^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$.

Πρέπει $g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = (\frac{x_0}{e})^{x_0+1} \cdot (lnx_0 - 1) \Leftrightarrow$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = (\frac{x_0}{e})^{x_0+1} \cdot lnx_0 - (\frac{x_0}{e})^{x_0+1} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow e^{-x_0} = (\frac{x_0}{e})^{x_0+1} \cdot \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{-x_0} = (\frac{x_0}{e})^{x_0+1}$ (2), που ισχύει.

Επομένως, οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$.

Δ4. Η απόσταση των 2 σημείων Α, Β δίνεται από τον τύπο

$$d(A,B) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = \sqrt{(f(x)-\varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x) = d(x)$$

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε d(x) παραγωγίσιμη στο x_0, εσωτερικό του $(0, +\infty)$ και στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο οπότε από Fermat

$d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$, άρα το x_0 κρίσιμο σημείο της φ.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 θα είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

Μακρίδης Ηλίας

Μακρίδης Κωνσταντίνος

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνος

Σάββας Νίκος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ