ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 111.

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 104.

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 74.

Α4. **α)** Ψευδής

β) π.χ. $f(x) = x$

όπου $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

και $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει

Α5. **α.** Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow$$

$$(3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f : '1-1', άρα αντιστρέφεται.

Β2. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x όπου $x \neq -3$.

Είναι:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3}=y \Leftrightarrow$$

$$3x+1=y(x-3) \Leftrightarrow 3x+1=yx-3y \Leftrightarrow$$

$$(3-y)x=-1-3y \Leftrightarrow x=\frac{3y+1}{y-3} \text{ με } y \neq 3$$

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{3y+1}{y-3}$, $y \neq 3$

Οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, $x \neq 3$

Τότε $D_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{3\}$

και $f^{-1}(x)=f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$

Άρα $f=f^{-1}$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Β3. Η $f\circ f$ ορίζεται όταν $x\in D_f$ και $f(x)\in D_f$

$x\neq 3$ και $f(x)\neq 3\Leftrightarrow$

$$\frac{3x+1}{x-3}\neq 3\Leftrightarrow$$

$$3x+1\neq 3x-9$$

που ισχύει $\forall x\neq 3$

Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{3\}$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{3f(x)+1}{f(x)-3}=\frac{3\cdot\frac{3x+1}{x-3}+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3}$$

$$=\frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}}=\frac{10x}{10}=x$$

Β4. Θεωρώ $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{3x+1}$

$$|g(x)|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq|f(x)|$$

Άρα $-|f(x)|\leq g(x)\leq|f(x)|$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)|=\left|\lim_{x\to-\frac{1}{3}}f(x)\right|=\left|\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-3}\right|=0$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|)=0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}g(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\left[f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right]=0$$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο τρίγωνο OBM, $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{OM}{OB} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = OM$

Άρα $AM = AO + OM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Όμοια $\eta\mu\theta = \dfrac{BM}{OB} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = BM$

Άρα $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$

Τότε $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AM = \dfrac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta \cdot (1+\sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Άρα $E(\theta) = (1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$ με $\theta \in (0,\pi)$

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$E'(\theta) = -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2} \overset{\theta\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} \theta = \dfrac{\pi}{3}$

$\overset{\theta\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} \theta = \pi \rightarrow$ απορρίπτεται.

Επειδή η $E'(\theta)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ και $\Delta_2 = \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$ και μηδενίζεται μόνο στο $x = \dfrac{\pi}{3}$ θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Είναι $E'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

άρα $E'(\theta) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

και $E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1 < 0$

άρα $E'(\theta) < 0$ στο $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

Το πρόσημο της E' και η μονοτονία της E φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

θ	0 $\quad \pi/3 \quad$ π
$E'(\theta)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
$E(\theta)$	$\nearrow$ $\quad \frac{3\sqrt{3}}{4}$ max $\quad$ $\searrow$

Άρα το εμβαδόν $E(\theta)$ μεγιστοποιείται για $\theta = \frac{\pi}{3}$ με

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

Γ3.

- Είναι $\lim\limits_{\theta \to 0^+} E(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0^+} (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta = 0$
- $\lim\limits_{\theta \to \pi^-} E(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \pi^-} (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta = (1-1)0 = 0$
- Αφού η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 το σύνολο τιμών της είναι:

$$E(\Delta_1) = \left(\lim_{\theta \to 0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

- Είναι $\frac{3}{4} \in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ και είναι μοναδικό διότι E γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

- Στο Δ_2 όπου η E είναι γνησίως φθίνουσα προκύπτει $E(\Delta_2)=\left(\lim_{\theta\to\pi^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$
- Όμοια υπάρχει μοναδικό $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ ώστε $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$

Επίσης είναι $0<\theta_1<\frac{\pi}{3}<\theta_2<\pi$

άρα $\theta_1<\theta_2$

Γ4. Αφού η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την E στα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$

Άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$ ώστε:

$$E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\ (1)$$

και $E'(\xi_2)=\dfrac{E(\theta_2)-E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)=E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_2)=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\ (2)$$

Από $(1),(2)$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{\lambda x}\lambda = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f'(1) = 0$. Επίσης για $x > 0$ είναι $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Οπότε
$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ και για $0 < x < 1$ είναι
$0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$
και αφού η f είναι συνεχής στο 1 το $f(1) = -\ln\lambda$ είναι ελάχιστο της f.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\ln\lambda$ min	$\nearrow$

Το σημείο ακροτάτου της f είναι το $M(1, -\ln\lambda)$ το οποίο βρίσκεται στην κατακόρυφη ευθεία $x = 1$.

Δ2. Αρκεί για κάθε $x > 0$ να ισχύει

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Επομένως αρκεί το ελάχιστο της f να είναι μη αρνητικό δηλαδή

$$-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$$

Συνεπώς $\lambda_{max} = 1$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $(x, g(x_0))$ είναι η:

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

Για να ταυτίζονται οι ευθείες ε και $y = \lambda x$ πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda x = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) \Leftrightarrow$$
$$0 = g'(x_0)x - g'(x_0)x_0 + g(x_0) - \lambda x \Leftrightarrow$$
$$0 = (g'(x_0) - \lambda)x - g'(x_0)x_0 + g(x_0)$$

Άρα

$$\begin{cases} g'(x_0) - \lambda = 0 \\ -g'(x_0)x_0 + g(x_0) = 0 \end{cases} \overset{\lambda=1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} g'(x_0) = 1 \\ x_0 = g(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1) = 1 \\ x_0^{x_0} = x_0 \end{cases}$$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Οπότε

$$x_0(\ln x_0 + 1) = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f'(x_0) = f'(1) \Leftrightarrow x_0 = 1$$

αφού η f' είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα.

Δ4. **i)** Η $h(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = e^u$ και $u = x\ln x$.
Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

Θέτουμε $u = x\ln x$ και είναι

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{u\to 0} e^u = 1 = h(0)$$

Συνεπώς η h είναι συνεχής στο 0.

Τελικά η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

ii) Αν

$$I = \int_0^1 h(1-t)dt$$

Θέτουμε $u = 1 - t$ άρα $-du = dt$

Για $t = 0$ το $u = 1$ και για $t = 1$ το $u = 0$

Άρα $I = -\int_1^0 h(u)du = \int_0^1 h(t)dt$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$k(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(t)dt,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Είναι

$$k(0) = \int_0^1 h(t)dt > 0$$

αφού $h(t) > 0$ για κάθε $t > 0$

Επίσης, $k(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)dt < 0$
διότι από το Δ2 είναι $g(t) \geq t$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 1$ άρα
$\int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$,
οπότε $2\int_1^2 g(t)dt > 3$.

Είναι $k(0)k(1) < 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1 - t)dt = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς
Κατέχος Γιώργος
Μακρίδης Ηλίας
Μακρίδης Κωνσταντίνος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος
Σάββας Νίκος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ