ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 76

Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 104

Α3. **Α)** Ψευδής

Β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3$ με $f'(x) = 3x^2$.

Η $f(x) = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ αλλά δεν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς $f'(0) = 0$.

Α4. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η παράσταση $f\big(g(x)\big)$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα $D_{fog} = (0, +\infty) \neq \emptyset$ συνεπώς

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0$$

B2. Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

Άρα η $h = f \circ g$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Επιπλέον είναι και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι το

$$h\big((0,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} h(x), \lim_{x\to0^+} h(x)\right) = (1, +\infty)$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} \left[(e^x+2)\frac{1}{e^x-1}\right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to0^+}(e^x - 1) = 0$ και $e^x - 1 > 0$, όταν $x \to 0^+$, άρα $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$

Εύρεση αντίστροφης:

$$(f\circ g)(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x - 1) \Leftrightarrow$$

$$e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow e^x - ye^x = -2 - y \Leftrightarrow$$

$$(1-y)e^x = -2 - y \Leftrightarrow e^x = \frac{2+y}{y-1} \overset{y>1}{\Leftrightarrow}$$

$$x = \ln\left(\frac{2+y}{y-1}\right),\ y > 1,$$

άρα $(f\circ g)^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2+y}{y-1}\right), y > 1$

Επομένως $(f\circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$

B3. Για κάθε $x > 1$ είναι

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\left(-\frac{3}{(x+2)(x-1)}\right) < 0$$

Άρα η φ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Β4. Αν $u = \frac{x+2}{x-1}$ τότε

$$\lim_{x\to 1^+} u = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} [(x+2)\frac{1}{x-1}] = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} u = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u\to +\infty} \ln(u) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u\to 1^+} \ln(u) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και άρα θα πρέπει:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$
- $f(0) = 1 - \ln\lambda$
- Άρα θα είναι $\lambda = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow \lambda + \ln\lambda = 1$
- Η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

  $h(x) = x + \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα στο A_h ($h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0\ \forall x > 0$) και επειδή $h(1) = 1$, το μοναδικό $\lambda > 0$ για το οποίο είναι $\lambda + \ln\lambda = 1$ ($\Leftrightarrow h(1) = h(\lambda)$) θα είναι το $\lambda = 1$
- Έπεται λοιπόν ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Γ2.

- Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της f στο $x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 1 + 0 = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{\frac{x}{1}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-1+x}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$
- Από τα παραπάνω έπεται ότι $f'(0) = 1$ και από θεωρία, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,1)$ είναι η

  (ε): $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

  $y - 1 = 1(x - 0)$

  $y = x + 1$

- Και αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x, τότε

  $\varepsilon\varphi\omega = f'(0) = 1 \overset{0^o \le \omega \le 180^o}{\Longleftrightarrow} \omega = 45^o$ δηλαδή $\omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3.

- Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$
- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$
- Συνοψίζοντας $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$
- Παρατηρούμε ότι για $x \le 0$ είναι $f'(x) > 0$.

- Ελέγχουμε αν υπάρχουν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \overset{0<x<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \underset{\gamma\iota\alpha\ x=\frac{\pi}{2}}{\overset{\delta\varepsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \underset{x \neq \frac{\pi}{2}}{\overset{x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ και } x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Επομένως, τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και

$x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

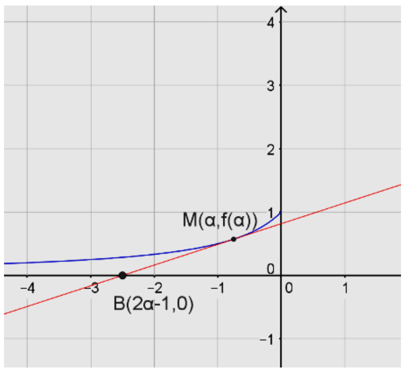
Γ4.

- Αν (ε_α) είναι η εφαπτομένη της C_f στο M τότε από Θεωρία είναι

$$(\varepsilon_\alpha): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$y = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x - \alpha) + \frac{1}{1-\alpha}$$



- Η ε_α τέμνει $x'x$ όταν $y = 0$, άρα:

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x - \alpha) + \frac{1}{1-\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha + (1-\alpha) = 0 \Leftrightarrow x - \alpha + 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow x + 1 - 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$$

- Άρα $B(2\alpha-1,0)$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης τη χρονική στιγμή t_0 είναι $2\alpha'(t_0)$ και συγχρόνως, θα είναι $\alpha(t_0)=-1$ (διότι τη χρονική στιγμή $t=t_0$ η τετμημένη του M είναι -1).

  Έτσι, αντικαθιστώντας $t=t_0$ στη δοσμένη σχέση, θα είναι:

$$\alpha'(t)=-\frac{\alpha(t)}{3}\overset{t=t_0}{\Rightarrow}\alpha'(t_0)=-\frac{\alpha(t_0)}{3}\Rightarrow\alpha'(t_0)=-\frac{(-1)}{3}\Rightarrow$$

$\alpha'(t_0)=\frac{1}{3}\Rightarrow 2\alpha'(t_0)=\frac{2}{3}$ (που είναι ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του B τη χρονική στιγμή $t=t_0$)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=e^x+2x-e$ και $f''(x)=e^x+2>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών.

$f'(0)=e^0+2\cdot 0-e=1-e<0$

$f'(1)=e+2\cdot 1-e=2>0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

- Για $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0$
- Για $x<x_0$ είναι $f'(x)<f'(x_0)\Rightarrow f'(x)<0$

και η f είναι συνεχής στο x_0 άρα το $f(x_0)$ είναι (ολικό) ελάχιστο της f.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$ min	$\nearrow$

- Ακόμα, θα είναι:

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ και άρα:

$$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$$
$$=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$$

Δ2. Το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f επομένως $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x\neq x_0$ είναι $f(x)-f(x_0)>0$ οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty \quad (1)$$

Ισχύει για $x\neq x_0$:

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\leq 1 \Leftrightarrow$$
$$-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\leq \eta\mu\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{f(x)-f(x_0)} \quad (2)$$

Από (1) και (2) είναι :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\eta\mu\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty$$

Δ3. Αν $h(x)=f(x)+x-x_0$ τότε

Η h είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών

$h(x_0)=f(x_0)-x_0+x_0=f(x_0)<f(0)=0$ αφού f γνησίως φθίνουσα στο $[0,x_0]$

$h(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

οπότε από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$

$h'(x)=f'(x)+1>0$ στο $(x_0,1)$ αφού για $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow$ $f'(x)>0$, άρα η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Δ4. Είναι $f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho$ και $f(1) = 0$,

$$\rho < 1 \Rightarrow f(\rho) < f(1) \Rightarrow f(\rho) < 0$$

γιατί f γνησίως αύξουσα στο $(\rho, 1) \subseteq (x_0, 1)$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(k) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(k)$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) , από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Αφού η f' είναι γνήσια αύξουσα έχουμε:

$$\xi < \kappa \Rightarrow f'(\xi) < f'(k) \Rightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(k)$$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς
Κατέχος Γιώργος
Μακρίδης Ηλίας
Μακρίδης Κωνσταντίνος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος
Σάββας Νίκος