# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

## - ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 -

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Βλέπε θεωρία

**Α2.** Βλέπε ορισμό.

**Α3.** Βλέπε ορισμό.

**Α4.** α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

$$z = x + yi$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x^2 + 2y^2 - 4) + (2x - 2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{array}$$

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = 1 - i$$

**Β2.** $w=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\dfrac{i(1-i)}{1-i}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{3}=-3i$

**Β3.**

$$\begin{aligned}
&|u-3i|=\left|4(1+i)-1+\cancel{i}-\cancel{i}\right|\Leftrightarrow\\
&|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow\\
&|u-3i|^2=|3+4i|^2\Leftrightarrow\\
&(u-3i)(\bar{u}+3i)=25\Leftrightarrow\\
&u\bar{u}+3iu-3i\bar{u}+9=25\Leftrightarrow\\
&u\bar{u}+3i(u-\bar{u})=16\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Παίρνω :

$u=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ $\quad x^2+y^2+3i-2yi=16\Leftrightarrow$

$$x^2+y^2-6y-16=0$$

$A^2+B^2-4\Gamma=36+64=100>0$ : που είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=5$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

**Γ1.** $h(x)=x-\ln(e^x+1)$

- Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων.

$$h'(x)=1-\frac{1}{e^x+1}e^x=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$$

$$h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$$

Άρα η $h$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$$
$$h\left(2h'(x)\right) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$
$$h\left(2h'(x)\right) < 1 - \ln(e+1)$$

Επειδή $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$h\left(2h'(x)\right) < h(1) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$
$$2\frac{1}{e^x+1} < 1 \underset{e^x+1>0}{\Leftrightarrow} 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow 1 < e^x \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln\left(e^x+1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Θέτω $\left.\begin{array}{r} u = \dfrac{e^x}{e^x+1} \\ x \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{u\to1}(\ln u) = \ln 1 = 0$.

Η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x - \ln\left(e^x+1\right)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right) = \ln 1 = 0$.

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(e^x+1\right)\right) = 1 \qquad \boxed{\lambda = 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\right] = \ln 1 = 0 \quad \boxed{\beta = 0}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\right) = o, \lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right) = 1\right)$$

Η είναι $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x) = e^x\left(h(x)+\ln 2\right)$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x)+\ln 2 = 0 \Leftrightarrow x-\ln\left(e^x+1\right) = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{e^x}{e^x+1} = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

Είναι $\varphi(x) \ge 0$: για $x \in [0,1]$

$$h(x)+\ln 2 = x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2 = \ln e^x - \ln\left(e^x+1\right)+\ln 2 =$$

$$= \ln\frac{2e^x}{e^x+1}$$

Είναι $\dfrac{2e^x}{e^x+1} \ge 1 \Leftrightarrow 2e^x \ge e^x+1 \Leftrightarrow e^x \ge e^0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Άρα $\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1} \ge \ln 1 \Rightarrow \ln\dfrac{2e^x}{e^x+1} \ge 0$

$$E=\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)dx=$$
$$=\int_0^1 e^x h(x)dx+\int_0^1 e^x\ln 2dx=$$
$$=\left[e^x h(x)\right]_0^1-\int_0^1 e^x h'(x)dx+\left[e^x\right]_0^1\ln 2=$$
$$=eh(1)-h(0)-\int_0^1 e^x\frac{1}{e^x+1}dx+e\ln 2-\ln 2=$$
$$=e\left(1-\ln(e+1)\right)+\ln 2-\left[\ln(e^x+1\right]_0^1+e\ln 2-\ln 2=$$
$$=e-e\ln(e+1)+\ln 2-\ln(e+1)+e\ln 2=$$
$$=e+(1+e)\ln 2-(1+e)\ln(e+1)=$$
$$=e+(1+e)\ln\frac{2}{e+1}\ \text{τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=$
$\lim\limits_{x\to 0} e^x=e^0=1=f(0)$

Οπότε f συνεχής στο $x_0=0$.

- Για $x\neq 0$
  - $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

    Θέτω: $g(x)=xe^x-e^x+1$

    Αν: $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

    $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

- Για $x<0 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
- Για $x>0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
- f συνεχής στο 0.Τελικά γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ2.** Είναι $f'$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)>0$ στο $\mathbb{R}$.

**α)** $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Άρα $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Η $x=0$ είναι ρίζα αφού $\int_1^{2f'(0)} f(u)du=\int_1^{2\frac{1}{2}} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$

Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\left(e^x-1\right)\right)=0\cdot(-1)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

και αφού f γνησίως αύξουσα και συνεχής έπεται ότι: $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ή ίση με μηδέν σε μεμονωμένο σημείο (αφού $f''(x)>0$ ή ίση με μηδέν σε μεμονωμένα σημεία και $f\left(2f'(x)\right)\in(0,+\infty)$) άρα $\int_1^{2f'(x)} f(u)du$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

**β)** Είναι $y(t)=f\left(x(t)\right)$ και $x'(t)=2y'(t)$

$y'(t)=f\left(x(t)\right)' \Leftrightarrow y'(t)=f'\left(x(t)\right)\cdot x'(t) \Leftrightarrow$

$\dfrac{x'(t)}{2}=f'\left(x(t)\right)x'(t) \Leftrightarrow f'\left(x(t)\right)=\dfrac{1}{2}$ (1)

Έχουμε πιο πάνω βρει: $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ και αφού η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα έπεται η τιμή $x(t)=0$ είναι η μοναδική που επαληθεύει την (1).

Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(0,f(0)\right)=(0,1)$

**Δ3.**

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \Leftrightarrow xf(x)=e^x-1$ για $x\neq 0$, οπότε

$g(x)=\left(e^x-1+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$

$x>0$: $\quad g'(x)=2\left(e^x-e\right)\left(e^x-e\right)'(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2\cdot 2(x-2)=$

$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+\left(e^x-e\right)\right]$$

$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[xe^x-2e^x+e^x-e\right]$$

$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$$

$e^x-e=0 \Leftrightarrow x=1$ μοναδική ρίζα $\left(e^x-e\right)'=e^x>0,\ 1$, άρα $e^x-e$ είναι γνησίως αύξουσα

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Για την $t(x)=xe^x-e^x-e$ παρατηρούμε ότι:

t: συνεχής στο $[1,2]$

$t(1)t(2)=-e\left(e^2-e\right)<0$

Οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $t(x_0)=0$. Το $x_0$ είναι μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ αφού $t^{/}(x)=(xe^x)^{/}-(e^x)^{/}=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$ άρα η t είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης:

για $x<x_0 \overset{\text{t: γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} t(x)<t(x_0) \Rightarrow t(x)<0$

για $x>x_0 \overset{\text{t: γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} t(x)>t(x_0) \Rightarrow t(x)>0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $x_0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | | | τ.ε. | | τ.μ. | | τ.ε. | | |

Επιμέλεια: Κανακάκης Γιώργος
Μακρίδης Ηλίας
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος