ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.	Λάθος	2.	Λάθος	3.	Σωστό	4.	Λάθος
5.	Λάθος	6.	Λάθος	7.	Σωστό	8.	Λάθος
9.	Λάθος	10.	Λάθος	11.	Λάθος	12.	Σωστό
13.	Σωστό	14.	Σωστό	15.	Σωστό	16.	Σωστό
17.	Λάθος	18.	Σωστό	19.	Σωστό	20.	Σωστό
21.	Σωστό	22.	Λάθος	23.	Λάθος	24.	Λάθος
25.	Σωστό	26.	Λάθος	27.	Λάθος	28.	Λάθος
29.	Σωστό	30.	Λάθος	31.	Σωστό	32.	Σωστό
33.	Σωστό	34.	Σωστό	35.	Λάθος	36.	Λάθος
37.	Σωστό	38.	Λάθος	39.	Λάθος	40.	Λάθος
41.	Σωστό	42.	Λάθος	43.	Σωστό	44.	Λάθος
45.	Λάθος	46.	Σωστό	47.	Σωστό	48.	Σωστό
49.		50.	Σωστό				

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : «ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ»

1.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma M}\ (+)\end{aligned}\right\}$$

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Gamma M}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2}$$

2.

Ισχύει: $\overrightarrow{K\Lambda} = 2\overrightarrow{\Lambda N} \Rightarrow \overrightarrow{O\Lambda} - \overrightarrow{OK} = 2(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{O\Lambda}) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{O\Lambda} - \overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{O\Lambda} \Rightarrow 3\overrightarrow{O\Lambda} = 2\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$$

3.

$$7\overrightarrow{KA}-4\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KA}-4\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$4\left(\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}\right)+3\left(\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{K\Gamma}\right)=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{\Gamma A}\Rightarrow \overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{\Gamma A}\Rightarrow \overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{\Gamma A}$$

Και επειδή έχουν κοινό άκρο, το Α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

4. Είναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=(3\vec{\alpha}+6\vec{\beta})-(4\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

Άρα, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5.

$$\left|(x+2)\vec{\alpha}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|\Rightarrow\left|(x+2)\right|\left|\vec{\alpha}\right|=5\left|\vec{\alpha}\right|\Rightarrow\left|x+2\right|=5\Rightarrow \text{αφού } \left|\vec{\alpha}\right|\neq\vec{0}$$

$$x+2=5\Rightarrow x=3$$

$$x+2=-5\Rightarrow x=-7$$

6.

Είναι: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta}-4\vec{\gamma})-(\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma})=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}-5\vec{\gamma}$ **(1)**

και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=(7\vec{\alpha}+15\vec{\beta}-14\vec{\gamma})-(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta}-4\vec{\gamma})=4\vec{\alpha}+8\vec{\beta}-10\vec{\gamma}$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\parallel\overrightarrow{AB}$ άρα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

7.

$$\vec{\alpha}=(3\lambda+\mu+1,\ \lambda-\mu+7)$$

Πρέπει : $3\lambda+\mu+1=0$ (1) και $\lambda-\mu+7=0$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 4\lambda+8=0\Rightarrow\lambda=-2$

Και $3\cdot(-2)+\mu+1=0\Rightarrow\mu=5$

Άρα, $(\lambda,\mu)=(-2,5)$

8.

Είναι: $-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-2(-3,1)+(5,2)=$

$$=(6,-2)+(5,2)=(6+5,-2+2)=(11,0)$$

9.

α) $\left|(-\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{\imath}\ +(\eta\mu\theta)\vec{j}\ \right|=$

$$=\sqrt{(-\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(\eta\mu\theta)^2}=1$$

β) $\left|\sqrt{\frac{2}{4}}\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{j}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{3}{8}}$$

10.

α) $\vec{v}=(2,5)$ άρα $\lambda_{\vec{v}}=\frac{5}{2}$

β) $\vec{\alpha}=(8,-2)$ άρα $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

11.

Είναι Α (1,3), Β (0,2), Γ (1,0) και

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{(X_\Gamma-X_B)^2+(y_\Gamma\text{-}y_B)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{(X_\Gamma\text{-}X_A)^2+(y_\Gamma\text{-}y_A)^2}=\sqrt{(1-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{0+9}=3$$

Άρα, το ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές αφού $\left|\overrightarrow{AB}\right|\neq\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\neq\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|$

Ούτε ορθογώνιο διότι : $\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|^2\neq\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2$

12.

Είναι A (1,4), B (-1,9), Δ (5,-3)

Έστω Γ(x,y).

Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο θα πρέπει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow (x_{AB}, y_{AB}) = (x_{\Delta\Gamma}, y_{\Delta\Gamma}) \Rightarrow$$
$$x_{AB} = x_{\Delta\Gamma} \Rightarrow x_B - x_A = x_\Gamma - x_\Delta \Rightarrow -1-1 = x-5 \Rightarrow x = 3$$

$$y_{AB} = y_{\Delta\Gamma} \Rightarrow y_B - y_A = y_\Gamma - y_\Delta \Rightarrow 9-4 = y+3 \Rightarrow y = 2$$

Άρα, Γ (3,2).

13.

Είναι $\vec{\alpha} = (-3,1)$, $\vec{\beta} = (2,1)$ και $\vec{\gamma} = (1,4)$

Έχουμε $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = (-3,1) - 2(2,1) + (1,4) = (-3-4+1, 1-2+4) = (-6,3)$

Άρα, $\left|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

14.

α)

$$\left.\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} &= (4,-2) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} &= (-7,8) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$3\vec{\alpha} = (4,-2) + (-7,8) \Rightarrow 3\vec{\alpha} = (-3,6) \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{3}(-3,6) \Rightarrow \vec{\alpha} = (-1,2)$$

Για $\vec{\alpha} = (-1,2)$ έχουμε : $(-1,2) - 3\vec{\beta} = (-7,8) \Rightarrow$

$$-3\vec{\beta} = (-7,8) - (-1,2) \Rightarrow -3\vec{\beta} = (-6,6) \Rightarrow \vec{\beta} = -\frac{1}{3}(-6,6) \Rightarrow \vec{\beta} = (2,-2)$$

β)

Είναι $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

Έχουμε $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(-1,2)+(2,-2)=(-\kappa,2\kappa)+(2,-2)=(-\kappa+2,2\kappa-2)$

Άρα, $\lambda_1=\dfrac{2\kappa-2}{-\kappa+2}$, όπου λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με $\kappa\neq 2$.

Επίσης, $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=2(-1,2)+3(2,-2)=(-2,4)+(6,-6)=(4,-2)$,

με $\lambda_2=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$, όπου λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

Πρέπει $\lambda_1\lambda_2=-1\Rightarrow\dfrac{2\kappa-2}{-\kappa+2}\cdot(-\dfrac{1}{2})=-1\Rightarrow$

$$\frac{2\kappa-2}{-2\kappa+4}=1\Rightarrow 2\kappa\text{-}2=\text{-}2\kappa+4\Rightarrow 4\kappa=6\Rightarrow \kappa=\frac{6}{4}\Rightarrow \kappa=\frac{3}{2}$$

15.

Έστω $M(0,y_M)$ το ζητούμενο σημείο του yy'.

Είναι: $\overrightarrow{MA}=(x_A-x_{M,}\ y_A-y_M)=(2-0,3-y_M)=(2,3-y_M)$

$$\lambda_{\overrightarrow{MA}}=\frac{3-y_M}{2}$$

Είναι : $\overrightarrow{MB}=(3-0,-4-y_M)$. Άρα, $\lambda_{\overrightarrow{MB}}=\dfrac{-4-y_M}{3}$.

Επειδή $AMB=90^\circ$ θα ισχύει :

$$\lambda_{\overrightarrow{MA}}\cdot\lambda_{\overrightarrow{MB}}=-1\Rightarrow\frac{3-y_M}{2}\cdot\frac{-4-y_M}{3}=-1\Rightarrow\Rightarrow$$

$$(3-y_M)(4+y_M)=6\Rightarrow 12+3y_M-4y_M-{y_M}^2=6\Rightarrow$$

$${y_M}^2+y_M-6=0$$

$y_M=2$ ή $y_M=-3$

Άρα, $M(0,2)$ ή $M(0,-3)$

16.

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\cancel{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=6$

β) $\vec{\alpha}^{2}=|\vec{\alpha}|^{2}=2^{2}=4$

17. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\cdot 2+(-2)\cdot 1=6-2=4$

18.

Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^{2}=\sqrt{5}^{2}\Rightarrow\vec{\alpha}^{2}+\vec{\beta}^{2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5\Rightarrow$

$|\vec{\alpha}|^{2}+|\vec{\beta}|^{2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5\Rightarrow 1+1+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=5\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{3}{2}$ (1)

Έχουμε $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=$

$=\vec{\alpha}^{2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\beta}^{2}=|\vec{\alpha}|^{2}+\vec{\alpha}\vec{\beta}-2|\vec{\beta}|^{2}=$

$=1+\frac{3}{2}-2\cdot 1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

19.

Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^{2}=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^{2}\Leftrightarrow\cancel{\vec{\alpha}^{2}}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}^{2}}=$

$=\cancel{\vec{\alpha}^{2}}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}^{2}}\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

20.

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4 \quad (1)$

Και $\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=\frac{(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|} \quad (2)$

$(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\alpha}|^2\overset{(1)}{=}4-2^2=0$

Άρα (2) $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=0 \Rightarrow (\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha})=\frac{\Pi}{2}$

21.

Έχουμε $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{3}\Rightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=3\Rightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=3\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=3\Rightarrow$

$1+4+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=3\Rightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=-1 \quad (1)$

Άρα $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+4|\vec{\beta}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=$

$=1+16+4=21$

Επομένως $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{21}$

22.

Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ η σχέση είναι προφανής.

Έστω και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$

Είναι :

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\Rightarrow$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2\Rightarrow$

$$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Rightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\sigma\upsilon\nu\ (\vec{\alpha},\vec{\beta})=1\Rightarrow(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0^0\Rightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$$

Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : «ΕΥΘΕΙΑ»

23. Είναι :

$$(\varepsilon): y-y_A=\lambda(X-X_A) \acute{\eta}$$
$$(\varepsilon): y-2=-4(x+1) \acute{\eta}$$
$$(\varepsilon): y-2=-4x-4\Rightarrow(\varepsilon): 4x+y+2=0$$

24.

$$\lambda_{AB}=\frac{y_{AB}}{x_{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{4+3}=\frac{-1}{7}$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \eta \quad AB:(\varepsilon): y-y_A=\lambda_{AB}(x-x_A)*$$
$$(AB)\rightarrow(\varepsilon): y-y_B=\lambda_{AB}(x-x_B)$$
$$*\acute{\eta}\ \ (AB): 7y-14=-x-3\Rightarrow(AB): x+7y-11=0$$

25.

Βρίσκουμε την ευθεία (AB) $\lambda_{AB}=\frac{4}{2}=2$

y-2 = 2 (x+1) $\Leftrightarrow$ y-2 =2x +2 $\Rightarrow$-2x+y-4=0

Άρα (AB) : -2x+y-4 =0

Έχουμε $-2x_\Gamma + y_\Gamma - 4 = -2\cdot2+8-4=0$

Άρα το Γ επαληθεύει την (AB) και A, B, Γ είναι συνευθειακά

26.

Λύνουνε το σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+1 \\ y+x=8 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=3x+1 \\ 3x+1+x=8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y=3x+1 \Leftrightarrow y=\frac{21}{4}+1 \Leftrightarrow y=\frac{25}{4}$$

$$4x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$$

Το κοινό σημείο των είναι το Μ $\left(\frac{7}{4},\frac{25}{4}\right)$

27.

Έχουμε λε =-2 και αν Α΄ το ζητούμενο συμμετρικό είναιQ

$$(AA')\perp(\varepsilon):\lambda_{AA'}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$$

$$\lambda_{AA'}\cdot(-2) = -1 \Rightarrow \lambda_{AA'}=\frac{1}{2}$$

$$(AA'): y-y_A=\lambda_{AA'}(x-x_A) \text{ ή}$$

$$(AA'): y-1=\frac{1}{2}(x+2) \text{ ή}$$

$$(AA'): 2y-2=x+2 \text{ ή}$$

$$(AA'): -x+2y+4=0$$

Λύνουμε το σύστημα την (ε) και (Α Α΄)Q

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3=0 \\ x-2y+4=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+4x+6=0 \\ 2y+x+4=0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5x+10=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$y+2(-2)+3=0 \Rightarrow y=1$$

Άρα $M(-2,1)$

Επομένως $M(-2,1)$.

Εδώ επειδή $A\in(\varepsilon)$ ισχύει $A\equiv M\equiv A'$

28.

α) Έχουμε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{4}{2} = 2$ άρα $\lambda_{\vec{\alpha}} = 2$ και $(\varepsilon) // \vec{\alpha}$ άρα $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_\varepsilon = 2$

(ε): y -4 = 2(x+1) $\Leftrightarrow$ y-4=2x+2

ή (ε): 2x –y +6=0

β) $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{2}{3}$ και $(\varepsilon) \perp \vec{\beta}$ $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-3}{2}$

άρα η εξίσωση της (ε):

$y - 4 = -\frac{3}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - 8 = -3(x+1) \Rightarrow 2y - 8 = -3x - 3$

άρα η (ε) : 3x+2y-5=0

γ) Έχουμε λε = εφ45^0= 1

άρα (ε): y-4 = x+1 ή (ε): x-y +5 =0

29.

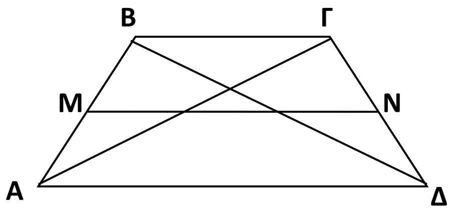
α) Είναι Α(-1,-3) , Β(0,2) , Γ(3,4) και Δ(8,3)

$\lambda_{ΒΓ} = \frac{2}{3}$ λΑΔ= $\frac{2}{3}$

Επειδή $\lambda_{ΒΓ}$ και $\lambda_{ΑΔ}$ είναι ίσα τότε ΒΓ//ΑΔ.

Επίσης:

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, $\left|\vec{ΓΔ}\right| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$



άρα ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

β) $\lambda_{ΑΓ} = \frac{7}{4}$

(ΑΓ) : y-4 = $\frac{7}{4}(x-3) \Rightarrow 4y - 16 = 7x - 21 \Rightarrow (ΑΓ): 7x - 4y - 5 = 0$

(ΒΔ) : y-2 = $\frac{1}{8}(x-0) \Rightarrow (ΒΔ): 8y - 16 = x \Rightarrow$

(ΒΔ) : -x+8y-16=0

30.

α) Έχουμε $A\Delta \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1$ με $\lambda_{B\Gamma}=\frac{5+2}{3-1}=\frac{7}{2}$

Άρα $\lambda_{A\Delta}\cdot\frac{7}{2}=-1\Leftrightarrow\lambda_{A\Delta}=-\frac{2}{7}$.

Η εξίσωση της ΑΔ είναι η $y-2=-\frac{2}{7}(x+1)\Leftrightarrow$

$7y-14=-2x-2\Leftrightarrow 2x+7y-12=0$.

β) Το μέσο Μ της ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{5-2}{2}\right)\Leftrightarrow M\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

Άρα η διάμεσος ΑΜ έχει εξίσωση:

$$y-2=\frac{\frac{3}{2}-2}{2+1}(x+1)\Leftrightarrow y-2=\frac{-\frac{1}{2}}{3}(x+1)\Leftrightarrow 6y-12=-x-1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x+6y-11=0$.

γ) Το εμβαδόν είναι :

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}\right| = 11 \text{ τ.μ}$$

διότι: $\vec{AB}=\left(3+1,5-2\right)=(4,3)$ και $\vec{A\Gamma}=\left(1+1,-2-2\right)=(2,-4)$.

31.

Είναι $\lambda_1=-\frac{1}{\mu}$, $\mu\neq 0$ και $\lambda_2=-\mu$.

Επειδή $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ πρέπει $\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow -\frac{1}{\mu}=-\mu \Rightarrow \mu=\pm1$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο M(-1,0) της (ε_1).

Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)=\frac{|2\mu(-1)+2\cdot0+\lambda|}{\sqrt{(2\mu)^2+2^2}}=\frac{|-2\mu+\lambda|}{2\sqrt{\mu^2+1}}=2\sqrt{2}$

- Για $\mu=1 \Rightarrow \frac{|-2+\lambda|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow |-2+\lambda|=8 \Rightarrow -2+\lambda=\pm8 \Rightarrow \lambda=10$ ή $\lambda=-6$.
- Για $\mu=-1 \Rightarrow \frac{|2+\lambda|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow |2+\lambda|=8 \Rightarrow 2+\lambda=\pm8 \Rightarrow \lambda=6$ ή $\lambda=-10$.

Άρα $(\mu,\lambda)=(1,10)$ ή $(1,-6)$ ή $(-1,6)$ ή $(-1,-10)$.

32. $y^2-1+2xy+x^2=0 \Rightarrow (y+x)^2-1=0 \Rightarrow (y+x+1)\cdot(y+x-1)=0$

Άρα, $y+x+1=0$ ή $y+x-1=0$.

Έχουμε δύο ευθείες παράλληλες με ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

33. Είναι $(\lambda^2-9)x+(\lambda+3)y-\lambda+2=0$

Αν $\lambda^2-9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3$ και $\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-3$

Άρα η εξίσωση εκφράζει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{-3\}$.

34. Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} y=2x-3 \\ x+y-1=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=2x-3 \\ x+(2x-3)-1=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Πρέπει το σημείο $A\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ να επαληθεύει την τρίτη ευθεία:

$(\mu-13)\cdot\frac{4}{3}+(\mu-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3=0 \Rightarrow \mu=\frac{41}{3}$.

35. Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία A(0,3) και B(0,1) των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Το μέσον του ΑΒ είναι M $\left(\frac{0+0}{2},\frac{3+1}{2}\right)$ ή M(0,2).
Έχουμε $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

Άρα, η μεσοπαράλληλη θα είναι:

$(\mu): y-y_M=\lambda(x-x_M)$ ή $(\mu): y-2=-2(x-0)$ ή $(\mu): y=-2x+2$.

36. Για λ=0:
(ε_1): x-y-4=0 και για λ=1 είναι (ε_2): 2x-6=0 δύο τυχαίες ευθείες.
Οι (ε_1),(ε_2) τέμνονται στο σημείο M(3,-1) το οποίο επαληθεύει την αρχική εξίσωση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, διότι:
$(\lambda^2+1)3+(\lambda-1)(-1)-3\lambda^2+\lambda-4=3\lambda^2+3-\lambda+1-3\lambda^2+\lambda-4=0$.

Άρα, όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο M(3,-1).

37. Έστω Γ(x,-3x) σημείο της (ε).

Θα ισχύει $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{B\Gamma}| \Rightarrow \sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(-3x+1)^2} \Rightarrow$

$10=x^2-6x+9+9x^2-6x+1 \Rightarrow 10x^2-12x=0 \Rightarrow 2x(5x-6)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\frac{6}{5}$.

38. Είναι (ε): 2x+y-3=0 και $d(P,\varepsilon)=\frac{|2(-1)+1\cdot 2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

39. Έστω M(0,1) τυχαίο σημείο της (ε_1).
Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)=\frac{|-1\cdot 0+1\cdot 1-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

40. Είναι $\overrightarrow{AB}$=(2+1,1-3)=(3,-2) και
$\overrightarrow{A\Gamma}$=(4+1,-1-3)=(5,-4) και
det($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$)=$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$=

= -12+10= -2.

Άρα, (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|$ = $\frac{1}{2}$ $|-2|$ = 1 τ.μ.

Γ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : «ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ»

41.

i. (C): $x^2+y^2=3$

ii. Είναι: $|\overrightarrow{OA}|$= $\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}$ =$\sqrt{5}$ = ρ

Άρα, (C): $x^2+y^2=5$.

42. Έστω Κ(3y+1,y) σημείο της ευθείας x-3y-1=0.
Θα ισχύει $|\overrightarrow{KA}|=|\overrightarrow{KB}|$, για να είναι το Κ κέντρο του κύκλου.
Άρα, έχουμε:

$$\sqrt{(1-(3y+1))^2+(3-y)^2} = \sqrt{(3-(3y+1))^2+(5-y)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9y^2+9-6y+y^2=4-12y+9y^2+25-10y+y^2 \Rightarrow$ $y=\frac{5}{4}$ και από την ευθεία x-3·$\frac{5}{4}$ -1=0⇒x=$\frac{19}{4}$.

Άρα, Κ$\left(\frac{19}{4},\frac{5}{4}\right)$.

Επίσης είναι: ρ=$|\overrightarrow{KA}|$=$\sqrt{\left(1-\frac{19}{4}\right)^2+\left(3-\frac{5}{4}\right)^2}$=$\frac{\sqrt{274}}{4}$

Άρα, (C): $\left(x-\frac{19}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{274}{16}=\frac{137}{8}$.

43. Είναι $x^2+y^2-2x+6y-3=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=3+1+9 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=13$.

Άρα, είναι κύκλος με κέντρο Κ(1,-3) και ακτίνα ρ=$\sqrt{13}$.

44. Έστω $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής.

Έχουμε εφαπτομένη στο M: (μ): $xx_1+yy_1=4$ με $\lambda_\mu=-\frac{x_1}{y_1}$, $y_1\neq 0$.

Επειδή (μ)//(ε) θα είναι $\lambda_\mu=\lambda_\varepsilon \Rightarrow -\frac{x_1}{y_1}=-1 \Rightarrow x_1=y_1$ (1).

Επίσης $M\in (C) \Rightarrow x_1^2+y_1^2=4 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1^2=2 \Rightarrow x_1=\pm\sqrt{2}$.

Άρα οι εφαπτομένες είναι:

(μ): $x\sqrt{2}+y\sqrt{2}=4$ και (μ'): $x(-\sqrt{2})+y(-\sqrt{2})=4$.

45. Ο κύκλος (C_1) έχει κέντρο K(-3,-2) και ακτίνα $\rho_1=3$ και ο (C_2) έχει κέντρο Λ (1,-5) και ακτίνα $\rho_2=2$.
Είναι:

$|\overrightarrow{K\Lambda}|=\sqrt{(1+3)^2+(-5+2)^2}=5$ και $\rho_1+\rho_2=3+2=5$.

Επειδή $|\overrightarrow{K\Lambda}|=\rho_1+\rho_2$ οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

46. Είναι (C): $y^2=2px$

i. Έχουμε $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ άρα $\frac{p}{2}=4 \Rightarrow p=8$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot 8x$ ή (C): $y^2=16x$.

ii. Είναι (δ): $x=-\frac{p}{2}$ άρα $-\frac{p}{2}=-3 \Rightarrow p=6$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot 6x$ ή (C): $y^2=12x$.

iii. $M\in (C) \Rightarrow 3^2=2\cdot p\cdot 1 \Rightarrow p=\frac{9}{2}$.
Επομένως, (C): $y^2=2\cdot\frac{9}{2}x$ ή (C): $y^2=9x$.

47. Είναι $y^2=2\cdot 4\cdot x$ (p=4).
Η εφαπτομένη (μ) στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι:

$yy_1=4(x+x_1)$ με $\lambda_\mu=\frac{4}{y_1}$, $y_1\neq 0$.

Είναι (ε)//(μ) $\Rightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\mu \Rightarrow 2=\frac{4}{y_1} \Rightarrow y_1=2$.

Επίσης, $M\in (C) \Rightarrow y_1^2=8x_1 \Rightarrow 2^2=8x_1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$.

Άρα, (μ): $y\cdot 2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ή $2x-y+1=0$.

48. Έστω Α(x_1,y_1) το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη στο Α είναι (μ): $yy_1=4(x+x_1)$.

Αλλά Μ∈ (μ) ⇒ $1\cdot y_1=4(-4+x_1)$ ή $y_1=4x_1-16$ (1)

Μ∈(C) ⇒ $y_1^2=8x_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} (4x_1-16)^2=8x_1 \Rightarrow 16(x_1-4)^2=8x_1 \Rightarrow 2(x_1-4)^2=x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1^2-17x_1+32=0 \Rightarrow x_1=\frac{17+\sqrt{33}}{4}$, $x_2=\frac{17-\sqrt{33}}{4}$

Για $x_1=\frac{17+\sqrt{33}}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_1=1+\sqrt{33}$

- Άρα (μ): $y(1+\sqrt{33})=4\left(x+\frac{17+\sqrt{33}}{4}\right)$

  Για $x_2=\frac{17-\sqrt{33}}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_2=1-\sqrt{33}$

- Άρα (μ'): $y(1-\sqrt{33})=4\left(x+\frac{17-\sqrt{33}}{4}\right)$.

49. Είναι (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

i. Είναι (ΕΕ')=2γ⇒10=2γ⇒γ=5 και 2α=16⇒ α=8.

Ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Rightarrow 64=\beta^2+25 \Rightarrow \beta^2=39$

Άρα, (C): $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

ii. Είναι (ΕΕ')=2γ⇒10=2γ⇒γ=5 και $\varepsilon=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{\alpha}=\frac{5}{6} \Rightarrow \alpha=6$.

Επίσης $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Rightarrow 36=\beta^2+25 \Rightarrow \beta^2=11$.

Άρα, (C): $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

50. Είναι (C): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, με α=3, β=2.

Άρα μεγάλος άξονας: ΑΑ'=2α=6, και μικρός άξονας ΒΒ'=2β=4.

Κορυφές: Α(3,0), Α'(-3,0) και Β(0,2), Β'(0,-2)

Είναι $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=9-4=5 \Rightarrow \gamma=\sqrt{5}$

Εστίες: $E_1(\gamma,0)$, $E_2(-\gamma,0)$ ή $E_1(\sqrt{5},0)$, $E_2(-\sqrt{5},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

51. Είναι (C): $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ και η εφαπτομένη στο $M(x_1,y_1)$ είναι (μ):

$\frac{xx_1}{2}+yy_1=1 \Rightarrow x_1x+2y_1y=2$

με $\lambda_\mu= -\frac{x_1}{2y_1}$, $y_1\neq 0$.

Επειδή (μ)$\perp$ (ε) είναι $\lambda_\mu\cdot\lambda_\varepsilon= -1 \Rightarrow -\frac{x_1}{2y_1}\cdot\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow 3x_1=4y_1 \Rightarrow x_1=\frac{4}{3}y_1(1)$

$M\in(C) \Rightarrow \frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{16}{9}y_1^2+2y_1^2=2 \Rightarrow y_1^2=\frac{9}{17} \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{\frac{9}{17}}$

- Για $y_1=\sqrt{\frac{9}{17}} \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}$ και

  (μ): $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}x+2\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}y=2$

  ή (μ): $2\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}x+3\cdot\sqrt{\frac{9}{17}}y=3$

- Για $y_1= -\sqrt{\frac{9}{17}}$

  όμοια (μ’): $-2\sqrt{\frac{9}{17}}x-3\sqrt{\frac{9}{17}}y=3$

52. Είναι (C): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, με α=,β=2

Άξονες: ΑΑ’=2α=6 και ΒΒ’=2β=4

Είναι $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2 \Rightarrow \gamma^2=9+4=13 \Rightarrow \gamma=\sqrt{13}$

Εστίες: $E_1(\gamma,0)$, $E_2(-\gamma,0)$ ή $E_1(\sqrt{13},0)$, $E_2(-\sqrt{13},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

53. Είναι α=β και $\gamma^2=2\cdot\alpha^2 \Rightarrow \gamma=\alpha\sqrt{2}$

Άρα η εκκεντρότητα είναι: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=\sqrt{2}$

<u>Επιμέλεια</u>: Μακρίδης Ηλίας