ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.	Σωστό	2.	Σωστό	3.	Σωστό	4.	Σωστό
5.	Σωστό	6.	Σωστό	7.	Λάθος	8.	Λάθος
9.	Σωστό	10.	Σωστό	11.	Σωστό	12.	Λάθος
13.	Λάθος	14.	Σωστό	15.	Σωστό	16.	Σωστό
17.	Σωστό	18.	Σωστό	19.	Σωστό	20.	Σωστό
21.	Λάθος	22.	Σωστό	23.	Σωστό	24.	Σωστό
25.	Λάθος	26.	Σωστό	27.	Λάθος	28.	Σωστό
29.	Σωστό	30.	Σωστό	31.	Σωστό	32.	Σωστό
33.	Σωστό	34.	Λάθος	35.	Σωστό	36.	Σωστό
37.	Σωστό	38.	Σωστό	39.	Σωστό	40.	Σωστό
41.	Λάθος	42.	Σωστό	43.	Λάθος	44.	Λάθος
45.	Σωστό	46.	Λάθος	47.	Λάθος	48.	Λάθος
49.	Σωστό	50.	Σωστό	51.	Λάθος	52.	Σωστό
53.	Λάθος	54.	Λάθος	55.	Λάθος	56.	Σωστό
57.	Σωστό						

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Έχουμε $\lambda_1=-5$ παίρνουμε $20x+4y=7$ οπότε $\lambda_2=-5 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο

2.

- Έχουμε (ε) $y=\lambda x+\beta$
- $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 2=\lambda\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=2$
- $B \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0=\lambda 2+\beta \Leftrightarrow 0=2\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda=-1$
- Άρα $y=-x+2$

3.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x=9 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array} \quad \kappa(3,1)$$

$\kappa \in (\varepsilon_3) \Leftrightarrow 3\cdot 3+1=10 \Leftrightarrow 10=10$

Άρα και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το $\kappa(3,1)$

4.

- $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)$
- $D_x=\begin{vmatrix}2 & 1\\ \lambda-1 & \lambda\end{vmatrix}=2\lambda-\lambda+1=\lambda+1$
- $D_y=\begin{vmatrix}1 & 2\\ \lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda-1-2\lambda=-\lambda-1$

- Αν $D\neq 0\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$.

  Το σύστημα έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{D_x}{D}\Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}$ $\quad y=\dfrac{D_y}{D}\Leftrightarrow y=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}$

- Αν $D=0\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$

  για λ=0 $\left.\begin{matrix}y=2\\ 0=-1\end{matrix}\right\}$ Αδύνατο

  για λ=1 $\left.\begin{matrix}x+y=2\\ x+y=2\end{matrix}\right\}$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

  (x,y) = (2-κ,κ) $\kappa\in\mathbb{R}$

5.

$$\left.\begin{matrix}(x+2)(4-y)=-xy\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}4x-xy+8-2y=-xy\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}4x-2y=-8\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2x-y=-4\\ x+y=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=5\\ y=14\end{matrix}$$

6.

$$\left.\begin{matrix}y=x^2+1\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=(y-1)^2+1\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y^2-3y+2=0\\ x=y-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=1 \text{ ή } y=2\\ x=y-1\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{για}\ \begin{matrix}y=1,\ x=0\ \ A(0,1)\\ y=2,\ x=1\ \ B(1,2)\end{matrix}$$

7.

$$\left.\begin{array}{l} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}\ \ x\neq 0 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{6}{x} \\ x^2+(\frac{6}{x})^2=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{6}{x} \\ x^4-13x^2+36=0 \end{array}\right\}$$

- Παίρνω $x^2=\omega\geq 0$, οπότε έχουμε $\omega^2-13\omega+36=0 \Rightarrow$ $\omega_1=9$ ή $\omega_2=4$

- Για $\omega=9$ έχουμε $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

  Για $x=3$ $y=\frac{6}{3}=2$ $A(3,2)$

  Για $x=-3$ $y=\frac{6}{-3}=-2$ $B(-3,-2)$

- Για $\omega=4$ έχουμε $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ οπότε Γ(2,3) Δ (-2,-3)

8.

- Έχουμε $f(13)=5$ και $f(8)=20$.
- Επειδή $8<13$ και $f(8)=20>5=f(13)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

9.

i. $x^2+1\neq 0$ ισχύει για $A_f=\mathbb{R}$.

ii. $f(x)\leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\leq 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ ισχύει.

iii. Έχουμε ότι $f(1)=\frac{2}{1+1}=1$ και $f(x)\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα το 1 είναι η μέγιστη τιμή της f.

iv. Έχουμε $x, -x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1} \Leftrightarrow f(-x)=\frac{-2x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

10. $A_f = \mathbb{R}$ έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{x_1 - 2 < x_2 - 2 \quad (+)}$$
$$x_1^3 + x_1 - 2 < x_2^3 + x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

11.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow f(x) + 4 = x^2 \\ x^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} f(x) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -4 \\ f(0) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(0) \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

i. $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$.

ii. Άρα, η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.

iii. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την $g(x) = x^2$ κατακόρυφα, 4 μονάδες προς τα κάτω.

12.

$$\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \\ 5 + x \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq 5 \\ x \geq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [-5, 5] \qquad A = [-5, 5]$$

i. έχουμε $-x, x \in [-5, 5]$

$$f(-x) = \sqrt{5 - (-x)} - \sqrt{-x + 5} = \sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x} = -\left(\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}\right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2 \Rightarrow \sqrt{5 - x_1} > \sqrt{5 - x_2} \quad (1)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5 + x_1 < 5 + x_2 \Rightarrow \sqrt{5 + x_1} < \sqrt{5 + x_2} \Rightarrow -\sqrt{5 + x_1} > -\sqrt{5 + x_2} \quad (2)$$

iii. Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη

$$\sqrt{5 - x_1} - \sqrt{5 + x_1} > \sqrt{5 - x_2} - \sqrt{5 + x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

13.

- Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Επειδή οι f και g είναι γνησίως αύξουσες στο A τότε έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ και $g(x_1) < g(x_2)$.
- Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :
  $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$
- Άρα, οι $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

14. $P(1) = 1 + 5 - 5 - 7 = -6$.

Άρα, το υπόλοιπο είναι υ = -6.

15.

$P(\rho) = \rho^6 + 5\rho^4 + 7 \neq 0$. Άρα το ρ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Οπότε το $x - \rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

16.

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= 0 \\ P(-2) &= -15 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda - (\mu+1) - 1 &= 0 \\ -8\lambda + 2(\mu+1) - 1 &= -15 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda - \mu &= 2 \\ -4\lambda + \mu &= -8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}\right\}$$

17.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} = + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + B(x) \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x + A - 1 = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-1 &= 0 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} B &= -1 \\ A &= 1 \end{aligned}\right|$$

Άρα $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \quad x \neq 0 \quad x \neq 1$

18.

$$P(x) = (x+2)^2 + (x+2) + 1 \Leftrightarrow P(x) = x^2 + 5x + 7$$

19.

$P(x) = -2x^4 + 4x^3 - x + 4$

-2	4	0	-1	4	2
	-4	0	0	-2	
-2	0	0	-1	2	

Άρα π (x) = $-2x^3-1$ και υ=2

20.

Έστω π(x) και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x-1) (x-3).

Επειδή το (x-1) (x-3) είναι δευτέρου βαθμού το υ (x) θα είναι της μορφής

υ(x) =αx +β α,β $\in \mathbb{R}$

P(x) = (x-1) (x-3) π(x) +αx+β

$$\left.\begin{matrix} P(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha+\beta = -2 \\ P(3) = -10 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta = -10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -\alpha-\beta=2 \\ 3\alpha+\beta=-10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -\alpha-\beta=2 \\ 2\alpha=-8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$\alpha = -4 \quad 4-\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2$ άρα $\upsilon(x) = -4x + 2$

21.

Για x=1 έχουμε $2+(5-\lambda^3)+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda^3-\lambda-6=0$

Οι διαιρέτες του -6 είναι $\pm1, \ \pm2, \ \pm3, \ \pm6$ παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα της (1)

με Horner έχουμε:

1	0	-1	-6	2
	2	4	6	
1	2	3	0	

$(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+3)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda^2+2\lambda+3=0$

$\Delta = 4-12 = -8 < 0$

άρα λ=2

Για λ=2 η εξίσωση γίνεται : $2x^3-3x^2+1=0$ με το σχήμα Horner έχουμε

2	-3	0	1	1
	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

$(x-1)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $2x^2-x-1=0$

$\Delta=9 \quad x=\frac{1+3}{4}=1$ ή $x=\frac{1-3}{4}=\frac{-1}{2}$

άρα x=1 διπλή ρίζα και $x=\frac{-1}{2}$

22.

$(x+2)^6-7(x+2)^3-8=0$.

Έστω $(x+2)^3=\omega$ οπότε έχουμε:

$\omega^2-7\omega-8=0 \Rightarrow \omega=8$ ή $\omega=-1$

Για ω=8 έχουμε $(x+2)^3=8 \Leftrightarrow x+2=2 \Leftrightarrow x=0$

Για ω=-1 έχουμε $(x+2)^3=-1 \Leftrightarrow x+2=-1 \Leftrightarrow x=-3$

23. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-5x^2+4x-1$

2	-5	4	-1	1
	2	-3	1	
2	-3	1	0	

$2x^3-5x^2+4x-1=(x-1)(2x^2-3x+1)$

Το $2x^2-3x+1$ έχει ρίζες το 1 και το $\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	+	
$2x^2-3x+1$		+		-		+	
P(x)		-	0	+	0	+	

Άρα $x\in(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

24.

	-∞ -√3	0	3/7	√3	+∞
x	-	-	+	+	+
-7x+3	+	+	+	-	-
x^2-3	+	-	-	-	+
Γ	-	+	-	+	-

i. $\frac{2x+7}{x+3}<1 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{x+3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{2x+7-x-3}{x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3}<0$ με $x \neq -3$

$(x+4)(x+3)<0 \quad x \in (-4,-3)$

ii. $\frac{x-7}{x^2-3}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-7}{x^2-3}-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x^2}-7x-\cancel{x^2}+3}{x(x^2-3)}<0$ με $x^2-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3} \quad x \neq 0$

$(-7x+3)x(x^2-3)<0 \quad -7x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{7} \quad x=0 \quad x=\pm\sqrt{3}$

$x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (0,\frac{3}{7}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

25.

i. $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ έχουμε $\sqrt{x-3} \geq 0$

Άρα η ανίσωση $\sqrt{x-3} \geq -2$ ισχύει για κάθε $x \geq 3$.

ii. $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\sqrt{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ άρα $x \in [0,+\infty)$

26.

i. $\frac{1}{2^x}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4$

ii. $\frac{1}{2^x}=16 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^4 \Leftrightarrow x=-4$

iii. $2^{x+1}-4\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow 2^x\cdot 2-4\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow -2\cdot 2^x=-8 \Leftrightarrow$

$2^x=4 \Leftrightarrow x=2$

27.

i. $9^x - 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

Θέτουμε $3^x = w \rangle 0$ οπότε $w^2 - w - 6 = 0$

$w_1 = -2$ Απορρίπτεται ή $w_2 = 3$ οπότε $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

ii. $3^X - 4\sqrt{3^X} + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3^X})^2 - 4\sqrt{3^X} + 3 = 0$

Θέτουμε $\sqrt{3^x} = w > 0$ $w^2 - 4w + 3 = 0 \Leftrightarrow w = 1$ ή $w = 3$

Άρα:

$\sqrt{3^x} = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$ ή

$\sqrt{3^x} = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

28.

i. $3^{|3x-4|} = 9 \Leftrightarrow |3x-4| = 2 \Leftrightarrow 3x - 4 = 2$ ή $3x - 4 = -2 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \frac{2}{3}$

ii. $7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x} \Leftrightarrow 8 \cdot 5^{2x} = 8 \cdot 7^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{5^2}{7^3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

29.

i. $3^{x^2-7x+10} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$

ii. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x - 4 > x + 1 \Leftrightarrow x > 5$

30. Πρέπει $\lambda - 5 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 5$

Hf είναι γνησίως αύξουσα στο Rόταν

$\frac{\lambda - 2}{\lambda - 5} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 2 - (\lambda - 5)}{\lambda - 5} > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\lambda - 5} > 0 \Leftrightarrow \lambda > 5$

31.

i. $\log\dfrac{5\alpha\beta}{6\gamma}=\log 5+\log\alpha+\log\beta-\log 6-\log\gamma$

ii. $\ln(5x^2\alpha)=\ln 5+2\ln|x|+\ln\alpha$

32.

i. Πρέπει $x-3>0$ και $x+6>0\Rightarrow x>3$

$\log(x-3)+\log(x+6)=\log 2+\log 5\Leftrightarrow\log(x-3)(x+6)=\log 10\Leftrightarrow$

$x^2+3x-18=0\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-7\rightarrow$ Απορρίπτεται

Άρα: x = 4

ii. Πρέπει $x^2-2x>0$ και $x>0\Leftrightarrow x(x-2)>0\Rightarrow x>2$

$x>0$

$\ln(x^2-2x)=\ln x\Leftrightarrow x^2-2x=x\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$

Η $x=0$ απορρίπτεται.

Άρα $x=3$

33.

i. Πρέπει $x-e>0\Leftrightarrow x>e$

$\ln(x-e)\le 0\Leftrightarrow\ln(x-e)\le\ln 1\Leftrightarrow x-e\le 1\Leftrightarrow x\le 1+e$

ii. Πρέπει $x^2+\dfrac{3}{2}x>0\Leftrightarrow x(x+\dfrac{3}{2}>0\Leftrightarrow xe(-\infty,\dfrac{-3}{2})\cup(0,+\infty)$

$\ln(x^2+\dfrac{3}{2}x)<\ln 1\Leftrightarrow x^2+\dfrac{3}{2}x<1\Leftrightarrow 2x^2+3x-2<0$

Δ$=9+16=25$ $x=\dfrac{-3+5}{4}=\dfrac{1}{2}$ ή $x=\dfrac{-3-5}{4}=-2$

Άρα $xe(-2,\dfrac{1}{2})$

34.

Πρέπει $x>-3, x>-1, x>-8 \Rightarrow x>-1$

Έχουμε $2\ln(x+3) \geq \ln(x+1)+\ln(x+8) \Leftrightarrow$

$$\ln(x+3)^2 \geq \ln(x+1)(x+8) \Leftrightarrow (x+3)^2 \geq (x+1)(x+8) \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x+9 \geq x^2+9x+8 \Leftrightarrow 1 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Άρα $x \in (-1, \frac{1}{3}]$

35.

i. $\log(3^x+2)=2x\log 3 \Leftrightarrow \log(3^x+2)=\log 3^{2x} \Leftrightarrow$

$3^x+2=3^{2x} \Leftrightarrow 3^{2x}-3^x-2=0 \Leftrightarrow 3^x=2$ ή $3^x=-1 \rightarrow$ Αδύνατο

$$3^x=2 \Leftrightarrow x\ln 3=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

ii. $\log(2^x+2\cdot 3^x)+\log 81=x\log 3+\log 178 \Leftrightarrow$

$$\log(2^x+2\cdot 3^x)81=\log(3^x\cdot 178) \Leftrightarrow (2^x+2\cdot 3^x)81=3^x\cdot 178 \Leftrightarrow$$

$$81\cdot 2^x=16\cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}=\frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x=4$$

36.

i.

$$\left.\begin{array}{l} xy=8 \\ \log y=\log x^2 \\ x>0 y>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} xy=8 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^3=8 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>0y>o$$

ii.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ 2\log y=\log x+\log 2 \\ y>0 x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x \\ \log y^2=\log 2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x \\ y^2=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=y \\ y=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y(y-1)=0 \\ y=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 / y=1 \\ y=2x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=0,\ \ x=0\ \ \rightarrow \text{Απορρίπτεται} \\ y=1,\ \ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Άρα $(x,y)=(\frac{1}{2},1)$

37.

i. $$\eta\mu(\alpha-\frac{\pi}{4})+\eta\mu(\alpha+\frac{\pi}{4})=$$

$$\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=$$

$$2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\alpha$$

ii. $$\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2\beta}=\frac{(\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta)(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)}{(1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta)(1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta)}=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}=\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)\cdot\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$$

38.

i. $$\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2}{\eta\mu2\alpha}$$

ii. $$\varepsilon\varphi(2\chi+y)=\frac{\varepsilon\varphi2\chi+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi2\chi\cdot\varepsilon\varphi y}(1)$$

$$\varepsilon\varphi2\chi=\frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1-\varepsilon\varphi^2x}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}(2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται: $\varepsilon\varphi(2\chi+y)=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{1-\frac{3}{16}}=\dfrac{16}{13}$

39.

$$\frac{2}{(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\alpha)}=\frac{2}{1+\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+1}=$$

$$=\frac{2}{2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\frac{2}{\dfrac{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+1}=\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$$

40.

$\eta\mu 2\chi=(\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi)^2 \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi=\eta\mu^2\chi-2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow$
$2\eta\mu 2\chi=1$

$$\eta\mu 2\chi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu 2\chi=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$$

$\chi=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{12}$ ή $2\chi=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2\chi=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}\Leftrightarrow \chi=\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{12}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

41.

Πρέπει $\sigma\upsilon\nu 2\chi\neq 0$

$$\varepsilon\varphi 2\chi=2\eta\mu\chi\Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 2\chi}=2\eta\mu\chi\Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu 2\chi\Leftrightarrow$$

$\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu 2\chi)=0\Leftrightarrow \eta\mu\chi=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu 2\chi$

$\eta\mu\chi=0\Leftrightarrow \chi=\kappa\pi$,

$\sigma\upsilon\nu 2\chi=\sigma\upsilon\nu\chi\Leftrightarrow 2\chi=2\kappa\pi\pm\chi\Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi$ ή $\chi=\dfrac{2\kappa\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

42.

i. $\eta\mu 2\chi - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu\chi - 1) + \eta\mu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi - 1)(2 \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\chi = 1$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{-1}{2}$

$\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή

$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii. $\eta\mu(\chi + \frac{\pi}{3}) - \frac{3}{2} = \eta\mu(\chi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\chi\, \eta\mu\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} = \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\eta\mu\chi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\eta\mu\chi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

43.

i. Πρέπει: $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A = (0, +\infty)$

ii. Για κάθε $x_1,\ x_2 \in (0, +\infty)$ με:

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Rightarrow \ln(e^{x_1} - 1) < \ln(e^{x_2} - 1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

iii. $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow \boxed{x < \ln 2}$

44. Εφαρμογή πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Επιμέλεια: Πεφάνης Κώστας