ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Σωστό
6. Λάθος
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος
11. Λάθος
12. Λάθος
13. Σωστό
14. Σωστό
15. Σωστό
16. Λάθος
17. Λάθος
18. Σωστό
19. Σωστό
20. Σωστό
21. Λάθος
22. Λάθος
23.
    α. Σωστό
    β. Λάθος
    γ. Λάθος
    δ. Λάθος
24. Σωστό
25. Σωστό
26. Σωστό
27. Σωστό
28. Λάθος
29. Σωστό
30. Σωστό
31. Σωστό
32. Λάθος
33. Λάθος
34. Σωστό
35. Λάθος
36. Λάθος
37. Λάθος
38. Σωστό
39. Σωστό
40. Σωστό
41. Σωστό
42. Λάθος
43. Σωστό

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.

α. Έχουμε:

$$A = \frac{\left(x^2y^{-1}\right)^3}{xy} : \frac{\left(x^2y\right)^4\left(x^3y^2\right)^{-1}}{\left(y^4x\right)^2} =$$

$$\frac{x^6y^{-3}}{xy} : \frac{x^8y^4x^{-3}y^{-2}}{y^8x^2} =$$

$$x^5y^{-4} : \frac{x^5y^2}{y^8x^2} =$$

$$x^5y^{-4} : x^3y^{-6} =$$

$$x^2y^2 = (xy)^2 \quad (1)$$

β.

- Για $x = 2018$ και $y = \frac{1}{2018}$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A = \left(\cancel{2018} \cdot \frac{1}{\cancel{2018}}\right)^2 = 1^2 = 1$$

2.

$$A = \left(\frac{xy^{-1}}{z^2}\right)^2 : \left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2} : \frac{y^3z^2}{z^{-3}x^2}\right) =$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4} : \left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2} \cdot \frac{z^{-3}x^2}{y^3z^2}\right) =$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4} : \frac{x^{-1}z^{-1}}{y^5} =$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4} \cdot \frac{y^5}{x^{-1}z^{-1}} =$$

$$\frac{x^3y^3}{z^3} = \left(\frac{xy}{z}\right)^3$$

- Για $x = -6$, $y = 1,5$ και $z = 9$ αντικαθιστώντας έχουμε:

$$A = \left(\frac{xy}{z}\right)^3 = \left(\frac{-6 \cdot 1,5}{9}\right) = (-1)^3 = -1$$

3.

α. Έχουμε:

$$A=\frac{(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}=$$

$$\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+3\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=$$

$$\frac{\cancel{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}{(\alpha-\beta)\left(\cancel{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\right)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\quad(1)$$

β. Για $\alpha=2017$ και $\beta=2018$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A=\frac{1}{2017-2018}=\frac{1}{-1}=-1$$

4.

α. $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2\Leftrightarrow$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2\cancel{+2\alpha x\beta y}+\beta^2y^2+\alpha^2y^2\cancel{-2\alpha x\beta y}+\beta^2x^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2$$

β. $\alpha(\alpha-2\beta)^3-\beta(\beta-2\alpha)^3=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow$

$$\alpha(\alpha^3-6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2-8\beta^3)-\beta(\beta^3-6\beta^2\alpha+12\beta\alpha^2-8\alpha^3)=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\alpha^4}-6\alpha^3\beta\cancel{+12\alpha^2\beta^2}-8\alpha\beta^3\cancel{-\beta^4}+6\beta^3\alpha\cancel{-12\beta^2\alpha^2}+8\alpha^3\beta=\cancel{\alpha^4}+2\alpha^3\beta\cancel{+\alpha^2\beta^2}\cancel{-\alpha^2\beta^2}-2\alpha\beta^3\cancel{-\beta^4}\Leftrightarrow$$

$$+2\alpha^3\beta-2\alpha\beta^3=+2\alpha^3\beta-2\alpha\beta^3$$

5.

α. $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{+2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{-2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

β. $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{-2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{+2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

γ. $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$\alpha^3+\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}+\beta^3-\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3+\beta^3$

δ. $(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=$

$\alpha^3-\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}-\beta^3+\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3-\beta^3$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$

$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}-x^2+2-\frac{1}{x^2}=4$

7. Αφού $x-y=-2 \Leftrightarrow x=y-2$ τότε έχουμε:

$x^3-2x^2-y^3+8y^2-20y=$

$(y-2)^3-2(y-2)^2-y^3+8y^2-20y=$

$\cancel{y^3}-\cancel{6y^2}+\cancel{12y}-8-\cancel{2y^2}+\cancel{8y}-8\cancel{-y^3}+\cancel{8y^2}-\cancel{20y}=$

-16

8. Από ταυτότητα του Euler ισχύει ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Τότε:

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\frac{3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=3$$

9.

α) $\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{\cancel{x^2+x+1}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{(\cancel{x-1})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x-1})(\cancel{x^2+x+1})}=1$

β) $\frac{y(y-2)+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{y^2-2y+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)^2}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)}{(y-2)}$

γ) $\frac{\omega^2-1}{\omega^2+3\omega}:\frac{\omega^2+\omega}{2\omega^3+6\omega^2}=\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega(\omega+3)}\cdot\frac{2\omega^2(\omega+3)}{\omega(\omega+1)}=2(\omega-1)$

10. Έχουμε:

$\alpha(\alpha+6)=\beta(2-\beta)-10\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha=2\beta-\beta^2-10\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+10=0\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+9+1=0\Leftrightarrow$

$(\alpha^2+6\alpha+9)+(\beta^2-2\beta+1)=0\Leftrightarrow$

$(\alpha+3)^2+(\beta-1)^2=0\Leftrightarrow$

$\left.\begin{aligned}\alpha+3=0\\ \beta-1=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$ $\alpha=-3$ και $\beta=1$

11.

$\alpha(\alpha+6\beta)\geq\beta(4\alpha-\beta)\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha\beta\geq 4\alpha\beta-\beta^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha\beta-4\alpha\beta+\beta^2\geq 0\Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

12.

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\geq 0$ που ισχύει.

β) Από ερώτημα (α) έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\geq 4\\ \left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 4\end{matrix}\right\} \overset{\text{ολα τα μελη θετικα αρα πολλαπλασιαζω κατα μελη}}{\Leftrightarrow} \left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

13. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq 2 \overset{\cdot xy<0}{\Leftrightarrow} x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ που ισχύει

14.

α) $2x^2-6x+10>2xy-y^2 \Leftrightarrow$

$$x^2+x^2-6x+10-2xy+y^2>0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-6x+9+1>0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2+(x-3)^2+1>0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

β) $x^2+y^2\geq xy \Leftrightarrow$

$$x^2-xy+y^2\geq 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$
$$2x^2-2xy+2y^2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+x^2-2xy+y^2+y^2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+(x-y)^2+y^2\geq 0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών

15.

$$(x+1)^2+y^2\leq 4x-3(2y+3) \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x+1+y^2-4x+6y+9\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2+6y+9\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x-1=0\\ y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}$$

16.

α) Από υπόθεση είναι $0<x<1$ άρα

$$\left.\begin{array}{l} x<1 \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^2<x \\ x^2<x \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^3<x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3<x^2<x \Rightarrow x^3<x$$

β) Από υπόθεση είναι $0<x<1 \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} 1<\frac{1}{x}$ και από ερώτημα (α) έχουμε τελικά:

$$0<x^3<x<1<\frac{1}{x}$$

17.

- Είναι :

$$1\le x\le 3 \Rightarrow 1^2\le x^2\le 3^2 \Rightarrow 1\le x^2\le 9 \overset{(\cdot 3)}{\Rightarrow} 3\le 3x^2\le 27 \quad (1)$$

- Ομοίως:

$$-2\le y\le 0 \overset{(-2)}{\Rightarrow} 4\ge -2y\ge 0 \Rightarrow 0\le -2y\le 4 \quad (2)$$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$3\le 3x^2-2y\le 31$$

18.

α)

- Είναι :

$$1<x<4 \Rightarrow 1<x^2<16 \quad (1)$$

- Ομοίως:

$$2<y<3 \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} -4>-2y>-6 \Rightarrow -6<-2y<-4 \quad (2)$$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$-5<x^2-2y<12$$

β)

- Είναι:

$1<x<4 \quad (3)$

$2<y<3 \quad (4)$

- Από τις σχέσεις (3) και (4), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αφού όλα είναι θετικά, έχουμε:

$2<xy<12 \overset{-4}{\Leftrightarrow} -2<xy-4<8$

γ)

- Είναι:

$1<x<4 \Rightarrow \frac{1}{1}>\frac{1}{x}>\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{x}<1 \quad (5)$

- Από τις σχέσεις (2) και (5), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$\frac{1}{4}-6<\frac{1}{x}-2y<1-4 \Leftrightarrow -\frac{23}{4}<\frac{1}{x}-2y<-3$

19.

α)

- Είναι:

$1<\alpha<3 \quad (1)$

$-2<\beta<-1 \Rightarrow 2>-\beta>1 \Rightarrow 1<-\beta<2 \quad (2)$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αφού όλα είναι θετικά, έχουμε:

$1<-\alpha\beta<6 \overset{\cdot(-1)<0}{\Rightarrow} -1>\alpha\beta>-6 \overset{+3}{\Rightarrow} -1+3>\alpha\beta+3>-6+3 \Rightarrow -3<\alpha\beta+3<2$

β)

- Είναι :

$1<\alpha<3 \Rightarrow 1<\alpha^2<9 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2<2\alpha^2<18 \quad (3)$

- Ομοίως:

$-2<\beta<-1 \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} 2>-\beta>1 \Rightarrow 4>\beta^2>1 \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} -12<-3\beta^2<-3 \quad (4)$

- Από τις σχέσεις (3) και (4), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$-10<2\alpha^2-3\beta^2<15$

20.

- Είναι:

$$-1\le x\le 3\Rightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\ x-3\le 0\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}2x-6\le 0\end{cases}$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$$A=x+1-(-x+3)+(-2x+6)=x+1+x-3-2x+6=4$$

21.

- Είναι:

$$x<4<y\Rightarrow\begin{cases}4-x>0\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}8-2x>0\\ y-4>0\\ x-y<0\end{cases}.$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$$A=8-2x-(y-4)+(-x+y)=8-2x-y+4-x+y=12-3x$$

22. Από τριγωνική ανισότητα:

$$|x+y+z|\le|x+y|+|z|\le|x|+|y|+|z|\le 2+5+9=16$$

23.

α) $$A=\frac{3x^2+|x|}{1+3|x|}=\frac{3|x|^2+|x|}{1+3|x|}=\frac{|x|(3|x|+1)}{1+3|x|}=|x|=\begin{cases}x, & \alpha\nu\ x\ge 0\\ -x, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

β) $$B=\frac{3|x|-9}{x^2-9}+\frac{x^2+3|x|}{x^2+6|x|+9}=\frac{3(|x|-3)}{(|x|-3)(|x|+3)}+\frac{|x|(|x|+3)}{(|x|+3)^2}=\frac{3+|x|}{|x|+3}=1$$

24.

α) $$A=\frac{\sqrt[3]{9^4}\cdot\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt{9^5}}{\sqrt[4]{9^2}\cdot\sqrt{9^3}}=\frac{9^{\frac{4}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{2}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}}=\frac{9^{\frac{24}{6}}}{9^{\frac{4}{2}}}=9^{4-2}=81$$

β) $$B=\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[24]{8}=\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=$$

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[12]{2^4}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt{\sqrt[12]{2^{12}\cdot 2^4}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt[24]{2^{16}}\cdot\sqrt[24]{2^3}=\sqrt[24]{2^{16}\cdot 2^3}=\sqrt[24]{2^{19}}$$

25.

α) $A=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3\cdot x}}=\sqrt[12]{x^4}=\sqrt[3]{x}$

β) $B=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^7}}}=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8\cdot x^7}}}=\sqrt[7]{x^4\cdot\sqrt[12]{x^{15}}}=$

$\sqrt[7]{\sqrt[12]{x^{48}\cdot x^{15}}}=\sqrt[84]{x^{63}}=\sqrt[4]{x^3}$

26.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}-\frac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)}=$$

$$\frac{7+\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{2}^2}-\frac{\sqrt{14}+3}{\sqrt{14}^2-9}=\frac{7+\sqrt{14}}{7-2}-\frac{\sqrt{14}+3}{14-9}=\frac{7+\sqrt{14}-\sqrt{14}-3}{5}=\frac{4}{5}$$

27.

- $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}=\dfrac{\sqrt{x}+x-(\sqrt{x}-x)}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}=\dfrac{\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x}{x-x^2}=\dfrac{2x}{x(1-x)}=\dfrac{2}{1-x}$
- Για $x=3$ γίνεται :

  $A=\dfrac{2}{1-3}=-1$

28.

α) $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=$

$\dfrac{x+\sqrt{x}\sqrt{x-1}+x-1-\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x-1-x}=\dfrac{2x-1}{-1}=-2x+1$

β) $B=\dfrac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2017}-\sqrt{2018}}+\dfrac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}=-2\cdot 2018+1=-4035$

29.

α) Πρέπει $x-4\geq 0$ και $6-x\geq 0$

$x\geq 4$ $\quad$ $x\leq 6$

Τελικά $x\in[4,6]$

β)

- Για $x=5$ έχουμε: $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$
- Άρα:

  $A^2+A-6=2^2+2-6=0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ»

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Λάθος
6. Σωστό
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.

α) $5x^2-4x=3x^2-2x \Leftrightarrow$

$2x^2-2x=0 \Leftrightarrow$

$2x(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=1$

β) $x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

γ) $(x+2)^3-13(x+1)=1 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+8-13x-13-1=0 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+6)-(x+6)=0 \Leftrightarrow$

$(x+6)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=-6$ ή $x=\pm 1$

δ) $(x-5)^2 = 9(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 10x + 25 = 9x^2 + 36x + 36 \Leftrightarrow$$
$$0 = 8x^2 + 46x + 11 \Leftrightarrow$$
$$0 = 8x^2 + 44x + 2x + 11 \Leftrightarrow$$
$$0 = 2x(4x+1) + 11(4x+1) \Leftrightarrow$$
$$0 = (4x+1)(2x+11) \Leftrightarrow$$
$$x = -\frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{11}{2}$$

2.

α)

- Πρέπει $x \neq -5$ και $x \neq -5$ και $x \neq 0$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{(x+5)(x-5)} = \frac{2x}{x(x+5)} \Leftrightarrow$$
$$(x+5)(x-5)\frac{1}{x+5} - (x+5)(x-5)\frac{1}{(x+5)(x-5)} = (x+5)(x-5)\frac{2}{x+5} \Leftrightarrow$$
$$x - 5 - 1 = 2(x-5) \Leftrightarrow$$
$$x - 6 = 2x - 10 \Leftrightarrow$$
$$4 = x$$

β)

- Πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq -2$

$$(x-2)(x+2)\frac{4}{x+2} - (x-2)(x+2)\frac{3x}{-(x-2)} = (x-2)(x+2)\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$$
$$4(x-2) + 3x(x+2) = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$$
$$4x - 8 + 3x^2 + 6x = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$$
$$10x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0$$

γ)

- Πρέπει $x \neq -3$ και $x \neq 3$

$(x+3)(x-3)\dfrac{3x-1}{x+3}-(x+3)(x-3)\dfrac{3x-7}{x-3}=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)(3x-1)-(x+3)(3x-7)=0 \Leftrightarrow$

$3x^2-x-9x+3-(3x^2-7x+9x-21)=0 \Leftrightarrow$

$3x^2-10x+-3x^2-2x+21=0 \Leftrightarrow$

$21=12x \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{21}{12}=\dfrac{7}{4}$

δ)

$||x+1|-2x|=6 \Leftrightarrow$

$|x+1|-2x=6$ ή $|x+1|-2x=-6 \Leftrightarrow$

$|x+1|=2x+6$ πρέπει $2x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$

$x+1=2x+6$ ή $x+1=-2x-6$

$-5=x$ απορ. $x=-\dfrac{7}{3}$

$|x+1|=2x-6$ πρέπει $2x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$

$x+1=2x-6$ ή $x+1=-2x+6$

$x=7$ $x=\dfrac{5}{3}$ απορ.

3.

α) $|2x-1|-5=3 \Leftrightarrow$

$|2x-1|=8 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-1=8 \\ 2x-1=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$

β) $\dfrac{|x+2|}{3}+\dfrac{1}{2}=4 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$2|x+2|+3=24 \Leftrightarrow$

$2|x+2|=21 \Leftrightarrow$

$|x+2|=\dfrac{21}{2} \Leftrightarrow$

$\left\langle \begin{array}{l} x+2=11,5 \\ x+2=-11,5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=9,5 \\ x=-13,5 \end{array} \right.$

γ) $\frac{|4-x|}{2}+\frac{1}{3}=|x-4| \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$$3|x-4|+2=6|x-4| \Leftrightarrow$$

$$2=3|x-4| \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}=|x-4| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-4=\frac{2}{3} \\ x-4=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{3} \\ x=\frac{10}{3} \end{cases}$$

4.

α) $|x+4|-|3x-5|=0 \Leftrightarrow$

$$|x+4|=|3x-5| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+4=3x-5 \\ x+4=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{4} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

β) $|2x-3|=x+1$, πρέπει $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

$$\begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x-3=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

γ) $||x+2|-1|=3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+2|-1=3 \\ |x+2|-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2|=4 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array} \right. \\ |x+2|=-2 \text{ , αδύνατη} \end{cases}$$

5.

- $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda)\Leftrightarrow$

  $\lambda^2x-\lambda^2=4x-2\lambda\Leftrightarrow$

  $\lambda^2x-4x=\lambda^2-2\lambda\Leftrightarrow$

  $(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2)$

- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$

  $$x=\frac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda}{(\lambda+2)}$$

- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-2$
- Για $\lambda=2$: $0x=0$ αόριστη
- Για $\lambda=-2$: $0x=8$ αδύνατη

6.

$\lambda^2(x+1)=1+\lambda x\Leftrightarrow$

$\lambda^2x+\lambda^2=1+\lambda x\Leftrightarrow$

$\lambda^2x-\lambda x=1-\lambda^2\Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=(1+\lambda)(1-\lambda)\Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=-(1+\lambda)(\lambda-1)$

α) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

$$x=\frac{-(1+\lambda)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{-(1+\lambda)}{\lambda}$$

β) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$

και $-(1+\lambda)(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=-1$ ή $\lambda=1$

Άρα $\lambda=1$

γ) Πρέπει $\lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$

και $-(1+\lambda)(\lambda-1)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq -1$ ή $\lambda\neq 1$

Άρα $\lambda=0$

7.

$x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2-1$

$x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2-1$

$\Delta=(2\lambda+1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda^2-1)=4\lambda^2+4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda=8\lambda+1$

α) Αν $\Delta>0\Rightarrow 8\lambda+1>0\Rightarrow\lambda>-\frac{1}{8}$ τότε:

$$x_{1,2}=\frac{-2\lambda+1\pm\sqrt{8\lambda+1}}{2}$$

β) Αν $\Delta=0\Rightarrow 8\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{8}$ τότε:

$$x=\frac{-2\lambda+1}{2}$$

γ) Αν $\Delta<0\Rightarrow 8\lambda+1<0\Rightarrow\lambda<-\frac{1}{8}$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

8.

$\lambda^2x+\lambda^2=16x+4\lambda\Leftrightarrow$

$\lambda^2x-16x=4\lambda-\lambda^2\Leftrightarrow$

$(\lambda-4)(\lambda+4)x=-\lambda(\lambda-4)$

- Πρέπει $(\lambda-4)(\lambda+4)=0\Leftrightarrow\lambda=4$ ή $\lambda=-4$

  και $-\lambda(\lambda-4)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=4$

  Άρα $\lambda=4$

- Πρέπει $(\lambda-4)(\lambda+4)=0\Leftrightarrow\lambda=4$ ή $\lambda=-4$

  και $-\lambda(\lambda-4)\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq0$ και $\lambda\neq4$

  Άρα $\lambda=-4$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ»

1) Λάθος
2) Λάθος
3) Σωστό
4) Σωστό
5) Σωστό
6) Λάθος
7) Λάθος
8) Σωστό
9) Σωστό
10) Σωστό
11) Σωστό
12) Σωστό
13) Λάθος
14) Σωστό
15) Λάθος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. i) $x^4+125x=0 \Leftrightarrow x(x^3+125)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^3=125 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-5$

   ii) $x^7-64x=0 \Leftrightarrow x(x^6-64)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm 2$

   iii) $x^3+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+1=0$ αδύνατη

2. i) $\Delta=\left(\sqrt{5}-2\right)^2>0$ και οι λύσεις είναι $x_1=2$ και $x_2=\sqrt{5}$

   ii) $\Delta=0$, η διπλή ρίζα είναι $x=\frac{1}{2}$

   iii) $x^2+x+1=0$ με $\Delta<0$, άρα αδύνατη

3. **i)** Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$(x-1)^2+4|x-1|-5=0 \Leftrightarrow |x-1|^2+4|x-1|-5=0$
και θέτουμε $y=|x-1|\geq 0$.
Η τελευταία γράφεται ισοδύναμα $y^2+4y-5=0$
άρα $y=1$ ή $y=-5$ απορρίπτεται.
Οπότε $|x-1|=1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$
ii) θέτουμε $y=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$ και έχουμε $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=3$
Για $y=2$ είναι $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$
Για $y=3$ είναι $x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

4. Πρέπει $x^2-1\geq 0$.
Εφόσον $\sqrt[3]{x^2-1}\geq 0$ και $|x^2-3x+2|\geq 0$ για να είναι
$\sqrt[3]{x^2-1}+|x^2-3x+2|=0$ πρέπει $x^2-1=0$ και $x^2-3x+2=0$, των οποίων η κοινή λύση είναι η $x=1$.
Επομένως η λύση είναι: $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

5. $\Delta=4\beta^2>0$ άρα έχουμε δυο ρίζες άνισες τις: $x=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ ή $x=\frac{\alpha\beta-1}{\beta}$

6. Πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4(3-y)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 2$

7.

α) $x^2-5|x|+6>0 \Leftrightarrow |x|^2-5|x|+6>0 \Leftrightarrow |x|>3 \Leftrightarrow x>3$ ή $x<-3$ και

$|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

Άρα $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,2)\cup(3,+\infty)$

β) $-x^2+|x|-3<0 \Leftrightarrow -|x|^2+|x|-3<0 \rightarrow x\in\mathbb{R}$

γ) $(2x-1)^2-3|2x-1|+2<0 \Leftrightarrow |2x-1|^2-3|2x-1|+2<0 \Leftrightarrow 1<|2x-1|<2$

$\Leftrightarrow 1<|2x-1| \Leftrightarrow$ και $|2x-1|<2$

$2x-1>1 \Leftrightarrow$ | $2x-1<-1$
$x>1$ | $\boxed{x<0}$

$-2<2x-1<2 \Leftrightarrow$
$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

$|x|>1 \Leftrightarrow 1<x$ ή $x<-1$

Τελικά $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$

8.

α) x^2-50x<0 $\Leftrightarrow x(x-50)<0 \Leftrightarrow 0<x<50$

β) $2x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x(2-x)\geq 0 \Leftrightarrow 0<x<2$

γ) $x^2+4x\leq 5 \Leftrightarrow x^2+4x-5\leq 0 \Leftrightarrow -5<x<1$

δ) $x^2+5x+7\leq 0$ → ΑΔΥΝΑΤΗ

ε) $x^2+64\leq -16x \Leftrightarrow x^2+16x+64\leq 0 \Leftrightarrow x=-8$

στ) $(1+x)6\geq(2x+2)^2 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 2(x+1)(2x-1)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

ζ) $-3x^2+10x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}$ ή $x\geq 3$.

9.

α) $x^2-(2\lambda-1)x-2\lambda+1=0$.

Πρέπει Δ>0 $\Leftrightarrow \lambda<-\frac{3}{2}$ ή $\lambda>\frac{1}{2}$.

β) $(\lambda+1)x^2-2\lambda x=\lambda+1 \Leftrightarrow (\lambda+1)x^2-2\lambda x-(\lambda+1)=0$

Πρέπει Δ>0 $\Leftrightarrow \lambda\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

10.

α) $x^2+15x\geq 0 \Leftrightarrow x(x+15)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -15$ ή $x\geq 0$.

β) $x^2-4x<0 \Leftrightarrow x(x-4)<0 \Leftrightarrow 0<x<4$.

γ) $-3x^2+5x-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq x\leq 1$.

δ) $2x^2-4x+5>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

ε) $x^2+49>14x \Leftrightarrow x^2-14x+49>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{7\}$.

στ) $(2x-1)^2\leq 5(1-2x) \Leftrightarrow (2x-1)(2x-6)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,\frac{1}{2}\right]$.

ζ) $42x^2-71x+30\leq 0 \Leftrightarrow x<\frac{72}{84}$ και $x>\frac{70}{84}$.

11.

α) $x^2-(\lambda+1)x+\lambda^2-1=0$

Δύο άνισες αν $-1<\lambda<\frac{3}{5}$, μία αν $\lambda=\frac{3}{5}, \lambda=-1$ καμία αν $-1>\lambda, \lambda>\frac{3}{5}$,

β) $(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)x+\lambda=0$, $\lambda\neq 1$

Δύο άνισες αν $-\frac{1}{3}<\lambda<1$, μία αν $\lambda=\frac{1}{3}, \lambda=1$ καμία αν $-\frac{1}{3}>\lambda, \lambda>1$,

12. $A_f=\Re$, $A_g=[-2,5]$

13. Πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow 0<\lambda<\frac{3}{2}$ και πάντα θετικό, αφού $a>0$.

14.

α) $x^2-(a+1)x+a-3=0$ Δ= $\alpha^2-2\alpha+14>0, \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

β) $4\psi^2-(4-2|\alpha|)\psi+\alpha=4$ Δ>0, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

15. (λ-1)x^2-2(λ-1)x-λ=0,

Πρέπει $\Delta<0$ και $a<0$, άρα $\frac{1}{2}<\lambda<1$

16.

α) $-x^2+\kappa x-(3\kappa+8)<0$

Δ= $k^2+12k+32$, Δ΄<0

Άρα αληθεύουν για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

β) $(3a-1)x^2+4x+a>0$, $a\neq\frac{1}{3}$

Δ= $4(-3a^2+a+4)$ Πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow \alpha<-1$ ή $\alpha>\frac{4}{3}$ και $a>0 \Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{3}$

Άρα: $\alpha>\frac{4}{3}$.

17. Θέτουμε $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \lambda$ και προκύπτει ότι $\lambda = 1$. Τελικά $x = y = z = 4$

18. (2λ-1)x^2-2λx+2λ-1, πρέπει 2λ-1>0 και Δ<0, τότε $\lambda > 1$.

19. α) $3ax^2 - 2ax + 2(a-3)$, πρέπει Δ<0, τότε $\alpha < 0$ και $\alpha > \frac{18}{5}$.

β) $3ax^2 - 2ax + 2(a-3) < 0$, πρέπει α<0 και Δ<0, τότε α<0.

20. $x^2 - (2a-1)x + 1 - 2a = 0$,

α) Δ= $(2a-1)(2a+3)$

β) i) έχει δυο άνισες ρίζες $-\frac{3}{2} > a, a > \frac{1}{2}$,

ii) έχει διπλή ρίζα $-\frac{3}{2} = a$ ή $a = \frac{1}{2}$,

iii) είναι αδύνατη στο $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$.

21. $-2x^2 + (3\lambda - 1)x + 3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

Έχει ετερόσημες ρίζες για $-\frac{3\lambda^2 + \lambda - 2}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 > \lambda$ ή $\lambda > \frac{2}{3}$.

22. $(1+\lambda)x^2 + 2(2\lambda+1)x + 1 + 5\lambda \le 0$ λ < -1 και Δ = -4(λ^2+2λ) < 0.

Πρέπει $\Delta \le 0$ και $a < 0$ άρα $\lambda \le -2$.

23. α) $x^2 - 2x - \lambda + 1 > 0$, Δ=4λ

- Αν $\lambda < 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $\lambda = 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- Αν $\lambda > 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{\lambda}\right) \cup \left(1+\sqrt{\lambda}, +\infty\right)$

β) $(\lambda-1)x^2-2x-1<0$

Αν λ=1, τότε $-2x-1<0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$.

Αν $\lambda \neq 1$,

- Αν $\lambda<0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $\lambda=0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$
- Αν $\lambda \in (0,1)$ τότε $\Delta>0$ και $a<0$ άρα $x \in (-\infty,\rho_1)\cup(\rho_2,+\infty)$, όπου

$\rho_1=\frac{1+\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ και $\rho_2=\frac{1-\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$.

24. $-x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1=0$. Δ = $(8\lambda^2+5)>0$.

Άρα ρίζες πραγματικές και άνισες.

$x_1^2+x_2^2+3x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+x_1x_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda-1)^2-\lambda^2-\lambda-1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 0$ ή $\lambda \geq \frac{5}{3}$

25. $\lambda x^2-(\lambda-1)x+\lambda-3>0, \lambda \neq 0$, πρέπει λ>0 και Δ<0, τότε $\lambda \in \left(0, \frac{-10-\sqrt{112}}{-6}\right)$.

26. α) Αν $\lambda=\frac{1}{3}$, τότε 1 ρίζα.

Αν $\lambda=\frac{20}{11}$, λ=0 , τότε 1 διπλή ρίζα.

Αν $\lambda \in \left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{20}{11}\right)$, τότε 2 ρίζες.

Αν $\lambda \in (-\infty,0)\cup(\frac{20}{11},+\infty)$, καμία λύση.

β) Για x=2, $\lambda=\frac{1}{15}$.

27. α) Πρέπει $P=x_1x_2<0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}<0$, $\lambda \in (-1,1)$

β) Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} S=x_1+x_2<0 \\ \text{και } \Delta \geq 0 \\ \text{και } P>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \lambda \in (-\infty,3).$$

28. i) $x > 1$ ή $x < -2$ ii) $x \in [-3,1]$ iii) αδύνατη iv) $x \in \mathbb{R}$

29. Πρέπει $\Delta < 0 \Leftrightarrow [3(\lambda+1)]^2 - 4(\lambda-1)(\lambda+4) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$.

30. Πρέπει $P = x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda-1} < 0$, $\lambda \in (0,1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – 7ο : «ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ»

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Σωστό
5. Σωστό
6. Λάθος
7. Σωστό
8. Σωστό
9. Σωστό
10. Σωστό
11. Σωστό
12. Λάθος
13. Σωστό
14. Λάθος
15. Λάθος
16. Σωστό
17. Λάθος
18. Λάθος
19. Σωστό
20. Λάθος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.

i) x΄x: $A_1(-1,-2)$, y'y: $A_2(1,2)$
ii) $A_3(1,-2)$
iii) $A_4(2,-1)$

2. f(0)=-1, $f(-\sqrt{2})=1-3\sqrt{2}$,
f(a+1) $=a^2-a-3$, f(2x) $=4x^2-6x-1$,
f(f(0))=f(-1)=3.

3. α) Την x=1 , x=2.
β) $x\in\left(\frac{7-\sqrt{65}}{4},\frac{7+\sqrt{65}}{4}\right)$

4. α) $x\in\mathbb{R}$
β) f(0)=0, f(1)=1, f(π)=3π-1, $f(\sqrt{2})=3\sqrt{2}-1$.

5. α) $x\in(-2,1]$
β) α = 3, β=0.

6.

α) $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ β) $A_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{4}{5},1\right\}$ γ) $A_f=\Re$
δ) $A_f=\Re-\{2,3\}$ ε) $A_f=[1,+\infty)$ στ) $A_f=[1,2)\cup(2,+\infty)$
ζ) $A_f=\Re$ η) $A_f=(1,2)\cup(2,+\infty)$ θ) $A_f=\Re-\{-1,3\}$

7.

α) Την x=0 , x=$\pm\sqrt{2}$.
β) Την x=0 , x=1
γ) Την $x\in(-\infty,0)\cup(12,+\infty)$.

8. α) x=5
β) x=-1 (απορρίπτεται)
γ) x=1

9. α) $A_f=\mathbb{R}-\{0,6\}$, $A_g=\mathbb{R}-\{6\}$
β) x=$-\frac{7}{2}$.

10. $(AB) = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{8}$ και όμοια είναι $(B\Gamma) = \sqrt{4}, (A\Gamma) = \sqrt{4}$
Αφού $(B\Gamma) = (A\Gamma)$ και $(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2$ το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

11.
α) $f(0) = -5, f(1) = -8, f(4) = -5$
β) $x = -1$ ή $x = 5$
γ) $x \in (-1,5)$
δ) $A(1,-8), B(4,-5)$
ε) $x \in (1,4)$

12. $f(0) = 3$ και $f(1) = f(3) = 0$ και προκύπτει η $f(x) = x^2 - 4x + 3$

13. **α)** $\varepsilon_1 : y = -x + 2,\ \ \varepsilon_2 : y = x - 4$
β) $\Gamma(3,-1)$
γ) 45^o
δ) 1

14. $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$
α) Τα A(0,-1) και B(1,0).
β) $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

15. $A_f = \Re^*$ και $A_g = \Re$.
α) Πρέπει : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.
β) Πρέπει : $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

16.
α) Τέμνει x΄x για x<2 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $A(-\frac{1}{2},0)$
Τέμνει x΄x για x≥2 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη
Τέμνει y΄y για x<2 : $f(0) = 1$ $\Delta(0,1)$

β) $f(-1) = -1 \neq 1$, άρα το σημείο A(-1,1) δεν ανήκει στην C_f.
γ) f(f(1))=15.

17.
α) Πρέπει : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{7}{4}$
Άρα $A(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$.
β) Πρέπει: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

18.

α) $A_f = \Re$.

β) Τέμνει x΄x : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$ Α$(1,0)$, Β$(2,0)$.

Τέμνει y΄y : $f(0)=2$ Γ$(0,2)$.

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

19.

α) Πρέπει : $f(x)=\mathrm{g}(x) \Leftrightarrow x=2, x=3, y=1, y=6$

Άρα Α$(2,1)$, Β$(3,6)$

β) Πρέπει : $f(x)>\mathrm{g}(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

20.

α) $A_f=[-1,1)$ και $A_g=(-1,1]$.

β) Πρέπει : $f(x)=\mathrm{g}(x) \Leftrightarrow x=0, y=1$.

Άρα Α$(0,1)$

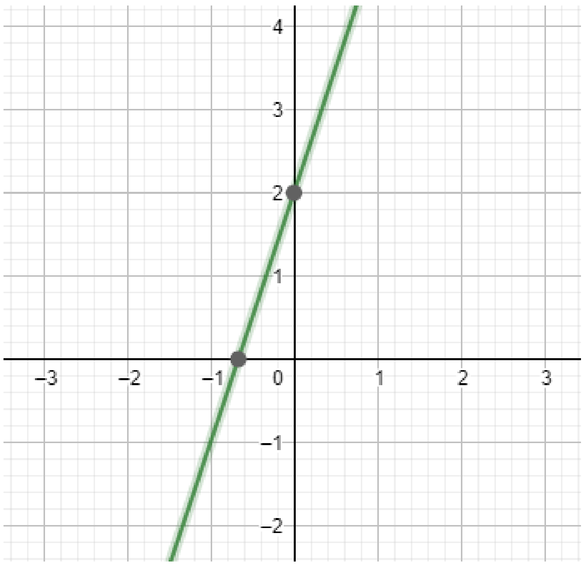
γ) Πρέπει : $f(x)>\mathrm{g}(x) \Leftrightarrow x\in(0,1)$.

δ) Πρέπει $4\in A_f$ Αδύνατο.

21.

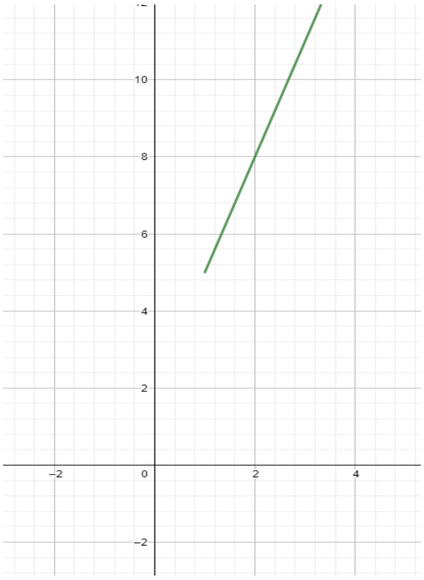
α)

x	0	-2/3
y	2	0



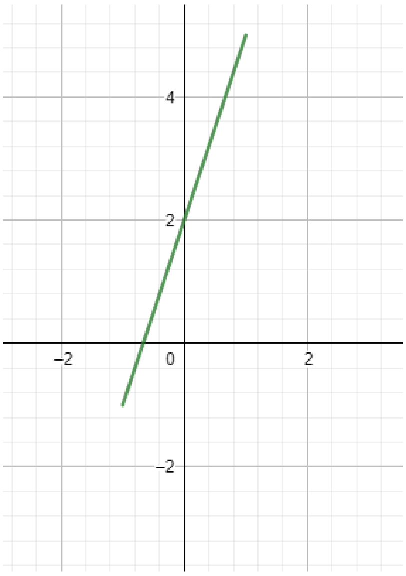
β)

x	1	2
y	5	7

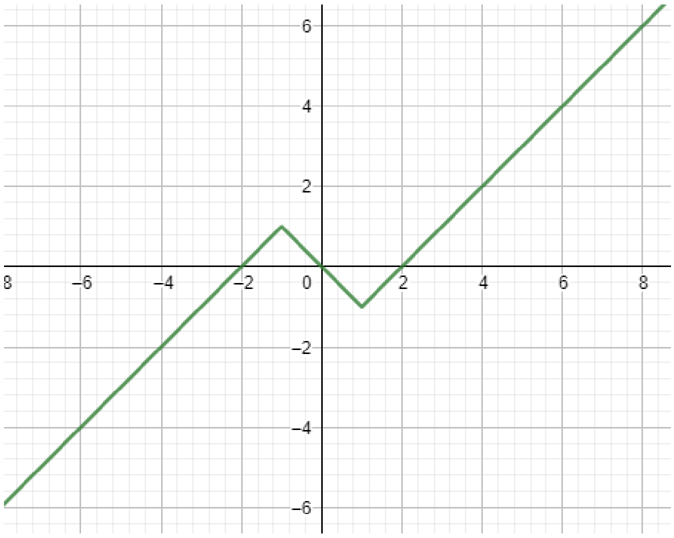


γ)

x	-1	1
y	-1	5



22.



23.

α) y = 2x – 1,
β) y = -x + 3 ,
γ) y= - 2x + 3.

Επιμέλεια: Κατέχος Γιώργος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος