Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Σωστό
6. Λάθος
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος
11. Λάθος
12. Λάθος
13. Σωστό
14. Σωστό
15. Σωστό
16. Λάθος
17. Λάθος
18. Σωστό
19. Σωστό
20. Σωστό
21. Λάθος
22. Λάθος
23. Λάθος
24. Σωστό
25. Σωστό
26. Σωστό
27. Σωστό
28. Λάθος
29. Σωστό
30. Σωστό
31. Σωστό
32. Λάθος
33. Λάθος
34. Σωστό
35. Λάθος
36. Λάθος

37. Λάθος
38. Σωστό
39. Σωστό
40. Σωστό
41. Σωστό
42. Λάθος
43. Σωστό

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Τα παρακάτω θέματα αποτελούν βασικές γνώσεις στο 2ο Κεφάλαιο

1. Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\left(x^2y^{-1}\right)^3}{xy}:\dfrac{\left(x^2y\right)^4\left(x^3y^2\right)^{-1}}{\left(y^4x\right)^2}$.

   α) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

   β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης για $x=2019$ και $y=\dfrac{1}{2019}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$A=\frac{\left(x^2y^{-1}\right)^3}{xy}:\frac{\left(x^2y\right)^4\left(x^3y^2\right)^{-1}}{\left(y^4x\right)^2}=\frac{x^6y^{-3}}{xy}:\frac{x^8y^4x^{-3}y^{-2}}{y^8x^2}=$$

$$x^5y^{-4}:\frac{x^5y^2}{y^8x^2}=x^5y^{-4}:x^3y^{-6}=\ x^2y^2=(xy)^2\ \ (1)$$

β)

- Για $x=2019$ και $y=\dfrac{1}{2019}$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A=\left(\cancel{2019}\cdot\frac{1}{\cancel{2019}}\right)^2=1^2=1$$

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\left(\dfrac{xy^{-1}}{z^2}\right)^2:\left(\dfrac{x^{-3}z^4}{y^2}:\dfrac{y^3z^2}{z^{-3}x^2}\right)$.

   Στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή της για $x=-6,\ \ y=1{,}5$ και $z=9$.

ΛΥΣΗ

$$A=\left(\frac{xy^{-1}}{z^2}\right)^2:\left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2}:\frac{y^3z^2}{z^{-3}x^2}\right)=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}:\left(\frac{x^{-3}z^4}{y^2}\cdot\frac{z^{-3}x^2}{y^3z^2}\right)=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}:\frac{x^{-1}z^{-1}}{y^5}=$$

$$\frac{x^2y^{-2}}{z^4}\cdot\frac{y^5}{x^{-1}z^{-1}}=$$

$$\frac{x^3y^3}{z^3}=\left(\frac{xy}{z}\right)^3$$

3. Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}$.

α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση.

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης για $\alpha=2019$ και $\beta=2018$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$A=\frac{(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}=$$

$$\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+3\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=$$

$$\frac{\cancel{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}{(\alpha-\beta)\left(\cancel{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\right)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\quad(1)$$

β) Για $\alpha=2019$ και $\beta=2018$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$A=\frac{1}{2019-2018}=\frac{1}{1}=1$$

4. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

β) $\alpha(\alpha-2\beta)^3-\beta(\beta-2\alpha)^3=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)^2$

ΛΥΣΗ

α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2\cancel{+2\alpha x\beta y}+\beta^2y^2+\alpha^2y^2\cancel{-2\alpha x\beta y}+\beta^2x^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2$$

β) $\alpha(\alpha-2\beta)^3-\beta(\beta-2\alpha)^3=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha(\alpha^3-6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2-8\beta^3)-\beta(\beta^3-6\beta^2\alpha+12\beta\alpha^2-8\alpha^3)=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha^4}-6\alpha^3\beta\cancel{+12\alpha^2\beta^2}-8\alpha\beta^3\cancel{-\beta^4}+6\beta^3\alpha\cancel{-12\beta^2\alpha^2}+8\alpha^3\beta=\cancel{\alpha^4}+2\alpha^3\beta\cancel{+\alpha^2\beta^2}\cancel{-\alpha^2\beta^2}-2\alpha\beta^3\cancel{-\beta^4} \Leftrightarrow$

$+2\alpha^3\beta-2\alpha\beta^3=+2\alpha^3\beta-2\alpha\beta^3$

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

α) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

γ) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ **δ)** $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

ΛΥΣΗ

α) $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{+2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{-2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

β) $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2\cancel{-2\alpha\beta}+\beta^2\cancel{+2\alpha\beta}=\alpha^2+\beta^2$

γ) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$\alpha^3+\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}+\beta^3-\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3+\beta^3$

δ) $(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=$

$\alpha^3-\cancel{3\alpha^2\beta}+\cancel{3\alpha\beta^2}-\beta^3+\cancel{3\alpha^2\beta}-\cancel{3\alpha\beta^2}=$

$\alpha^3-\beta^3$

6. Να αποδείξετε ότι $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$, όπου $x\neq 0$.

ΛΥΣΗ

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$

$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}-x^2+2-\frac{1}{x^2}=4$

7. Αν ισχύει $x-y=-2$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $x^3-2x^2-y^3+8y^2-20y=-16$.

ΛΥΣΗ

Αφού $x-y=-2 \Leftrightarrow x=y-2$ τότε έχουμε:

$x^3-2x^2-y^3+8y^2-20y=$

$(y-2)^3-2(y-2)^2-y^3+8y^2-20y=$

$\cancel{y^3}-\cancel{6y^2}+\cancel{12y}-8-\cancel{2y^2}+\cancel{8y}-8\cancel{-y^3}+\cancel{8y^2}-\cancel{20y}=-16$

8. Έστω αριθμοί $\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0$ με $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$.

ΛΥΣΗ

Από ταυτότητα του Euler ισχύει ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Τότε:

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\frac{3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=3$$

9. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ β) $\dfrac{y(y-2)+1}{(y-2)(y-1)}$ γ) $\dfrac{\omega^2-1}{\omega^2+3\omega}:\dfrac{\omega^2+\omega}{2\omega^3+6\omega^2}$

ΛΥΣΗ

α) $$\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{\cancel{x^2+x+1}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{(\cancel{x-1})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x-1})(\cancel{x^2+x+1})}=1$$

β) $$\frac{y(y-2)+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{y^2-2y+1}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)^2}{(y-2)(y-1)}=\frac{(y-1)}{(y-2)}$$

γ) $$\frac{\omega^2-1}{\omega^2+3\omega}:\frac{\omega^2+\omega}{2\omega^3+6\omega^2}=\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega(\omega+3)}\cdot\frac{2\omega^2(\omega+3)}{\omega(\omega+1)}=2(\omega-1)$$

10. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha(\alpha+6)=\beta(2-\beta)-10$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\alpha(\alpha+6)=\beta(2-\beta)-10 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha=2\beta-\beta^2-10 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+10=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+6\alpha+\beta^2-2\beta+9+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha^2+6\alpha+9\right)+\left(\beta^2-2\beta+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+3)^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+3=0\\ \beta-1=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=-3 \text{ και } \beta=1$$

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α και β ισχύει:

$$\alpha(\alpha+6\beta)\ge\beta(4\alpha-\beta)$$

ΛΥΣΗ

$\alpha(\alpha+6\beta)\ge\beta(4\alpha-\beta)\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha\beta\ge4\alpha\beta-\beta^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+6\alpha\beta-4\alpha\beta+\beta^2\ge0\Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\ge0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\ge0$, που ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

12. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha>0$ και $\beta>0$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $\alpha+\frac{4}{\alpha}\ge4$ **β)** $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\ge16$

ΛΥΣΗ

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\ge4\overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2+4\ge4\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-4\alpha+4\ge0\Leftrightarrow(\alpha-2)^2\ge0$ που ισχύει.

β) Από ερώτημα (α) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\ge4\\\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\ge4\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{ολα τα μελη θετικα αρα}\\\text{πολλαπλασιαζω κατα μελη}}}{\Leftrightarrow}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\ge16$$

13. Αν x, y είναι ετερόσημοι αριθμοί, να δείξετε ότι: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le2$.

ΛΥΣΗ

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le2\overset{\cdot xy<0}{\Leftrightarrow}x^2+y^2\ge2xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0$ που ισχύει

14. Να αποδείξετε ότι: **α)** $2x^2-6x+10>2xy-y^2$ **β)** $x^2+y^2\ge xy$

ΛΥΣΗ

α) $2x^2-6x+10>2xy-y^2\Leftrightarrow$

$x^2+x^2-6x+10-2xy+y^2>0\Leftrightarrow$

$x^2-2xy+y^2+x^2-6x+9+1>0\Leftrightarrow$

$(x-y)^2+(x-3)^2+1>0$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

β) $x^2+y^2 \ge xy \Leftrightarrow$

$$x^2-xy+y^2 \ge 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$
$$2x^2-2xy+2y^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+x^2-2xy+y^2+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+(x-y)^2+y^2 \ge 0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών

15. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει: $(x+1)^2+y^2 \le 4x-3(2y+3)$

ΛΥΣΗ

$$(x+1)^2+y^2 \le 4x-3(2y+3) \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x+1+y^2-4x+6y+9 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2+6y+9 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

16. Αν $0<x<1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $x^3<x$

β) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0,\ x^3,\ 1,\ x,\ \frac{1}{x}$.

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση είναι $0<x<1$ άρα

$$\left.\begin{aligned} x<1 \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^2<x \\ x^2<x \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x^3<x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^3<x^2<x \Rightarrow x^3<x$$

β) Από υπόθεση είναι $0<x<1 \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} 1<\frac{1}{x}$ και από ερώτημα (α) έχουμε τελικά:

$$0<x^3<x<1<\frac{1}{x}$$

17. Αν ισχύει: $1 \le x \le 3$ και $-2 \le y \le 0$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης: $3x^2 - 2y$.

ΛΥΣΗ

- Είναι :

$$1 \le x \le 3 \Rightarrow 1^2 \le x^2 \le 3^2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 9 \overset{(\cdot 3)}{\Rightarrow} 3 \le 3x^2 \le 27 \ (1)$$

- Ομοίως:

$$-2 \le y \le 0 \overset{(-2)}{\Rightarrow} 4 \ge -2y \ge 0 \Rightarrow 0 \le -2y \le 4 \ (2)$$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$3 \le 3x^2 - 2y \le 31$$

18. Αν $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$, να βρείτε τα όρια των παραστάσεων:

α) $x^2 - 2y$ **β)** $xy - 4$ **γ)** $\frac{1}{x} - 2y$

ΛΥΣΗ

α)

- Είναι :

$$1 < x < 4 \Rightarrow 1 < x^2 < 16 \ (1)$$

- Ομοίως:

$$2 < y < 3 \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} -4 > -2y > -6 \Rightarrow -6 < -2y < -4 \ (2)$$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$-5 < x^2 - 2y < 12$$

β)

- Είναι:

$$1 < x < 4 \ (3)$$

$$2 < y < 3 \ (4)$$

- Από τις σχέσεις (3) και (4), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αφού όλα είναι θετικά, έχουμε:

$$2 < xy < 12 \overset{-4}{\Leftrightarrow} -2 < xy - 4 < 8$$

γ)

- Είναι:

$$1 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x} < 1 \quad (5)$$

- Από τις σχέσεις (2) και (5), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{1}{4} - 6 < \frac{1}{x} - 2y < 1 - 4 \Leftrightarrow -\frac{23}{4} < \frac{1}{x} - 2y < -3$$

19. Αν $1<\alpha<3$ και $-2<\beta<-1$ να βρείτε τα όρια των παραστάσεων:

α) $\alpha\beta+3$ **β)** $2\alpha^2-3\beta^2$

ΛΥΣΗ

α)

- Είναι:

$1<\alpha<3 \quad (1)$

$-2<\beta<-1 \Rightarrow 2>-\beta>1 \Rightarrow 1<-\beta<2 \ (2)$

- Από τις σχέσεις (1) και (2), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αφού όλα είναι θετικά, έχουμε:

$$1<-\alpha\beta<6 \overset{\cdot(-1)<0}{\Rightarrow} -1>\alpha\beta>-6 \overset{+3}{\Rightarrow} -1+3>\alpha\beta+3>-6+3 \Rightarrow -3<\alpha\beta+3<2$$

β)

- Είναι :

$1<\alpha<3 \Rightarrow 1<\alpha^2<9 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2<2\alpha^2<18 \quad (3)$

- Ομοίως:

$-2<\beta<-1 \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} 2>-\beta>1 \Rightarrow 4>\beta^2>1 \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} -12<-3\beta^2<-3 \ (4)$

- Από τις σχέσεις (3) και (4), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$-10<2\alpha^2-3\beta^2<15$

20. Αν ισχύει $-1\le x\le 3$ να αποδείξετε ότι: $|x+1|-|x-3|+|2x-6|=4$

ΛΥΣΗ

- Είναι:

$$-1\le x\le 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-3\le 0 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2x-6\le 0 \end{cases}$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$A=x+1-(-x+3)+(-2x+6)=x+1+x-3-2x+6=4$

21. Αν $x<4<y$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=|8-2x|-|y-4|+|x-y|$.

ΛΥΣΗ

- Είναι:

$$x<4<y \Rightarrow \begin{cases} 4-x>0 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 8-2x>0 \\ y-4>0 \\ x-y<0 \end{cases}.$$

- Άρα η παράσταση γίνεται:

$A=8-2x-(y-4)+(-x+y)=8-2x-y+4-x+y=12-3x$

22. Αν ισχύει $|x| \le 2$, $|y| \le 5$ και $|z| \le 9$, να δείξετε ότι: $|x+y+z| \le 16$.

ΛΥΣΗ

$$|x+y+z| \le |x+y| + |z| \le |x| + |y| + |z| \le 2+5+9 = 16$$

23. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{3x^2 + |x|}{1+3|x|}$ β) $B = \dfrac{3|x|+9}{x^2-9} + \dfrac{x^2+3|x|}{x^2+6|x|+9}$

ΛΥΣΗ

α) $A = \dfrac{3x^2+|x|}{1+3|x|} = \dfrac{3|x|^2+|x|}{1+3|x|} = \dfrac{|x|(3|x|+1)}{1+3|x|} = |x| = \begin{cases} x, & \alpha\nu\ x \ge 0 \\ -x, & \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$

β) $B = \dfrac{3|x|-9}{x^2-9} + \dfrac{x^2+3|x|}{x^2+6|x|+9} = \dfrac{3(|x|-3)}{(|x|-3)(|x|+3)} + \dfrac{|x|(|x|+3)}{(|x|+3)^2} = \dfrac{3+|x|}{|x|+3} = 1$

24. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\sqrt[3]{9^4} \cdot \sqrt[6]{9} \cdot \sqrt{9^5}}{\sqrt[4]{9^2} \cdot \sqrt{9^3}}$ β) $B = \sqrt{2\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[24]{8}$

ΛΥΣΗ

α) $A = \dfrac{\sqrt[3]{9^4} \cdot \sqrt[6]{9} \cdot \sqrt{9^5}}{\sqrt[4]{9^2} \cdot \sqrt{9^3}} = \dfrac{9^{\frac{4}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{2}{4}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{9^{\frac{24}{6}}}{9^{\frac{4}{2}}} = 9^{4-2} = 81$

β) $B = \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[24]{8} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}} \cdot \sqrt[24]{2^3} =$

$\sqrt{2 \cdot \sqrt[12]{2^4}} \cdot \sqrt[24]{2^3} = \sqrt{\sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^4}} \cdot \sqrt[24]{2^3} = \sqrt[24]{2^{16}} \cdot \sqrt[24]{2^3} = \sqrt[24]{2^{16} \cdot 2^3} = \sqrt[24]{2^{19}}$

25. Αν $x \ge 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$ β) $B = \sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^7}}}$

ΛΥΣΗ

α) $A = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3 \cdot x}} = \sqrt[12]{x^4} = \sqrt[3]{x}$

β) $B = \sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^7}}} = \sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8 \cdot x^7}}} = \sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt[12]{x^{15}}} =$

$\sqrt[7]{\sqrt[12]{x^{48} \cdot x^{15}}} = \sqrt[84]{x^{63}} = \sqrt[4]{x^3}$

26. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{4}{5}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}-\frac{\sqrt{14}+3}{\left(\sqrt{14}-3\right)\left(\sqrt{14}+3\right)}=$$

$$\frac{7+\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{2}^2}-\frac{\sqrt{14}+3}{\sqrt{14}^2-9}=\frac{7+\sqrt{14}}{7-2}-\frac{\sqrt{14}+3}{14-9}=\frac{7+\sqrt{14}-\sqrt{14}-3}{5}=\frac{4}{5}$$

27. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\frac{1}{\sqrt{x}-x}-\frac{1}{\sqrt{x}+x}$, όπου $x>0$.

Στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή της για $x=3$.

ΛΥΣΗ

- $A=\frac{1}{\sqrt{x}-x}-\frac{1}{\sqrt{x}+x}=\frac{\sqrt{x}+x-\left(\sqrt{x}-x\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}=\frac{\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x}{x-x^2}=\frac{2x}{x(1-x)}=\frac{2}{1-x}$

- Για $x=3$ γίνεται :

  $A=\frac{2}{1-3}=-1$

28. Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$, με $x\geq 1$.

α) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράσταση: $B=\frac{\sqrt{2019}}{\sqrt{2018}-\sqrt{2019}}+\frac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2019}+\sqrt{2018}}$

ΛΥΣΗ

α) $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=$

$$\frac{x+\sqrt{x}\sqrt{x-1}+x-1-\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x-1-x}=\frac{2x-1}{-1}=-2x+1$$

β) $B=\frac{\sqrt{2019}}{\sqrt{2018}-\sqrt{2019}}+\frac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2019}+\sqrt{2018}}=-2\cdot 2019+1=-4037$

29. Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

β) Για $x=5$ να αποδείξετε ότι $A^2+A-6=0$.

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-4\geq 0$ και $6-x\geq 0$

$x\geq 4$ $\quad$ $x\leq 6$

Τελικά $x\in[4,6]$

β)

- Για $x=5$ έχουμε: $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$
- Άρα:

  $A^2+A-6=2^2+2-6=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Λάθος
6. Σωστό
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Σωστό
10. Λάθος

Τα παρακάτω θέματα αποτελούν βασικές γνώσεις στο 3ο Κεφάλαιο

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5x^2-4x=3x^2-2x$ β) $x^3-2x^2-x+2=0$

γ) $(x+2)^3-13(x+1)=1$ δ) $(x-5)^2=9(x+2)^2$

ΛΥΣΗ

α) $5x^2-4x=3x^2-2x \Leftrightarrow$

$2x^2-2x=0 \Leftrightarrow$

$2x(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=1$

β) $x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

γ) $(x+2)^3-13(x+1)=1 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+8-13x-13-1=0 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+6)-(x+6)=0 \Leftrightarrow$

$(x+6)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=-6$ ή $x=\pm 1$

δ) $(x-5)^2 = 9(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 10x + 25 = 9x^2 + 36x + 36 \Leftrightarrow$

$0 = 8x^2 + 46x + 11 \Leftrightarrow$

$0 = 8x^2 + 44x + 2x + 11 \Leftrightarrow$

$0 = 2x(4x+1) + 11(4x+1) \Leftrightarrow$

$0 = (4x+1)(2x+11) \Leftrightarrow$

$x = -\frac{1}{4}$ ή $x = -\frac{11}{2}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x^2-25} = \frac{2x}{x^2+5x}$ β) $\frac{4}{x+2} - \frac{3x}{2-x} = \frac{3x^2-8}{x^2-4}$ γ) $\frac{3x-1}{x+3} - \frac{3x-7}{x-3} = 0$

ΛΥΣΗ

α)

- Πρέπει $x \neq -5$ και $x \neq +5$ και $x \neq 0$

$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{(x+5)(x-5)} = \frac{2x}{x(x+5)} \Leftrightarrow$

$(x+5)(x-5)\frac{1}{x+5} - (x+5)(x-5)\frac{1}{(x+5)(x-5)} = (x+5)(x-5)\frac{2}{x+5} \Leftrightarrow$

$x - 5 - 1 = 2(x-5) \Leftrightarrow$

$x - 6 = 2x - 10 \Leftrightarrow$

$4 = x$

β)

- Πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 2$

$(x-2)(x+2)\frac{4}{x+2} - (x-2)(x+2)\frac{3x}{-(x-2)} = (x-2)(x+2)\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$

$4(x-2) + 3x(x+2) = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$

$4x - 8 + 3x^2 + 6x = 3x^2 - 8 \Leftrightarrow$

$10x = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$

γ)

- Πρέπει $x \neq -3$ και $x \neq 3$

$(x+3)(x-3)\frac{3x-1}{x+3} - (x+3)(x-3)\frac{3x-7}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)(3x-1) - (x+3)(3x-7) = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - x - 9x + 3 - (3x^2 - 7x + 9x - 21) = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 10x + -3x^2 - 2x + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$21 = 12x \Leftrightarrow$

$x = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|2x-1|-5=3$ β) $\dfrac{|x+2|}{3}+\dfrac{1}{2}=4$

γ) $\dfrac{|4-x|}{2}+\dfrac{1}{3}=|x-4|$ δ) $||x+1|-2x|=6$

ΛΥΣΗ

α) $|2x-1|-5=3 \Leftrightarrow$

$|2x-1|=8 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x-1=8 \\ 2x-1=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

β) $\dfrac{|x+2|}{3}+\dfrac{1}{2}=4 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$2|x+2|+3=24 \Leftrightarrow$

$2|x+2|=21 \Leftrightarrow$

$|x+2|=\dfrac{21}{2} \Leftrightarrow$

$$\left\langle \begin{matrix} x+2=11,5 \\ x+2=-11,5 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x=9,5 \\ x=-13,5 \end{matrix} \right.$$

γ) $\dfrac{|4-x|}{2}+\dfrac{1}{3}=|x-4| \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$3|x-4|+2=6|x-4| \Leftrightarrow$

$2=3|x-4| \Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{3}=|x-4| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-4=\dfrac{2}{3} \\ x-4=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ x=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

δ)

$||x+1|-2x|=6 \Leftrightarrow$

$|x+1|-2x=6$ ή $|x+1|-2x=-6 \Leftrightarrow$

$|x+1|=2x+6$ πρέπει $2x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$ $|x+1|=2x-6$ πρέπει $2x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$

$x+1=2x+6$ ή $x+1=-2x-6$ $x+1=2x-6$ ή $x+1=-2x+6$

$-5=x$ απορ. $x=-\dfrac{7}{3}$ $x=7$ $x=\dfrac{5}{3}$ απορ.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x+4|-|3x-5|=0$ β) $|2x-3|=x+1$ γ) $||x+2|-1|=3$

ΛΥΣΗ

α) $|x+4|-|3x-5|=0 \Leftrightarrow$

$|x+4|=|3x-5| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+4=3x-5 \\ x+4=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

β) $|2x-3|=x+1$, πρέπει $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

$$\begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x-3=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

γ) $||x+2|-1|=3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+2|-1=3 \\ |x+2|-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2|=4 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array} \right. \\ |x+2|=-2 \text{ , αδύνατη} \end{cases}$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

- $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda) \Leftrightarrow$

  $\lambda^2 x-\lambda^2=4x-2\lambda \Leftrightarrow$

  $\lambda^2 x-4x=\lambda^2-2\lambda \Leftrightarrow$

  $(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2)$
- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$

  $$x=\frac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda}{(\lambda+2)}$$
- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-2$
- Για $\lambda=2$: $0x=0$ αόριστη
- Για $\lambda=-2$: $0x=8$ αδύνατη

6. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2(x+1)=1+\lambda x$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

α) έχει μοναδική λύση **β)** είναι αόριστη **γ)** είναι αδύνατη

ΛΥΣΗ

$\lambda^2(x+1)=1+\lambda x \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x+\lambda^2=1+\lambda x \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x-\lambda x=1-\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=(1+\lambda)(1-\lambda) \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=-(1+\lambda)(\lambda-1)$

Επομένως:

α) $\text{Πρέπει } \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1$

$$x=\frac{-(1+\lambda)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{-(1+\lambda)}{\lambda}$$

β) $\text{Πρέπει } \lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1$

$\text{και } -(1+\lambda)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1$

$\text{Άρα } \lambda=1$

γ) $\text{Πρέπει } \lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1$

$\text{και } -(1+\lambda)(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -1 \text{ ή } \lambda\neq 1$

$\text{Άρα } \lambda=0$

7. Να λυθεί η εξίσωση $x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2-1=0$ για τις διάφορες τιμές του λ.

ΛΥΣΗ

$x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2-1$

$x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2-1$

$\Delta=(2\lambda+1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda^2-1)=4\lambda^2+4\lambda+1-4\lambda^2+4=4\lambda+5$

Επομένως:

α) $\text{Αν } \Delta>0 \Rightarrow 4\lambda+5>0 \Rightarrow \lambda>-\frac{5}{4} \text{ τότε:}$

$$x_{1,2}=\frac{-2\lambda-1\pm\sqrt{4\lambda+5}}{2}$$

β) $\text{Αν } \Delta=0 \Rightarrow 4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{5}{4} \text{ τότε:}$

$$x=\frac{-2\lambda-1}{2}$$

γ) $\text{Αν } \Delta<0 \Rightarrow 4\lambda+5<0 \Rightarrow \lambda<-\frac{5}{4} \text{ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη}$

8. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση $\lambda^2x+\lambda^2=16x+4\lambda$:
α) να είναι ταυτότητα.
β) να είναι αδύνατη.

ΛΥΣΗ

$\lambda^2x+\lambda^2=16x+4\lambda \Leftrightarrow$

$\lambda^2x-16x=4\lambda-\lambda^2 \Leftrightarrow$

$(\lambda-4)(\lambda+4)x=-\lambda(\lambda-4)$

- Πρέπει $(\lambda-4)(\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=4$ ή $\lambda=-4$

και $-\lambda(\lambda-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=4$

Άρα $\lambda=4$

- Πρέπει $(\lambda-4)(\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=4$ ή $\lambda=-4$

και $-\lambda(\lambda-4)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 4$

Άρα $\lambda=-4$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς