ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. § 2.3 σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. § 2.7 σχολικό βιβλίο σελ. 140

Α3. § 2.5 σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α4.
- **α.** Λάθος
- **β.** Λάθος
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Λάθος
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f(g(x)) = x^2 - 2x \Leftrightarrow (x+\beta)^2 + \alpha = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 - 2x$

Οπότε, $2\beta = -2 \Leftrightarrow \beta = -1$ και $\beta^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Β2.
- f όχι "1-1", αφού για παράδειγμα $f(-1) = f(1)$, άρα δεν υπάρχει η αντίστροφή της.
- $g'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα g $\nearrow$ οπότε και "1-1", οπότε υπάρχει η αντίστροφη g^{-1}.

  g συνεχής και $\nearrow$ άρα, $g(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty)$,

  $A_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

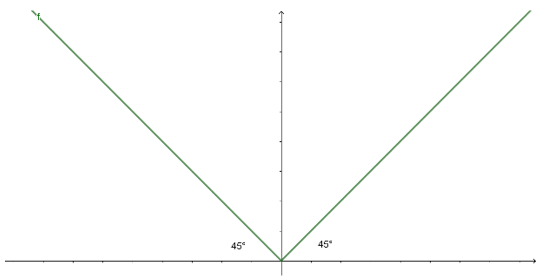
  $y = g(x) \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$ οπότε $g^{-1}(x) = x + 1$

Β3.

$A_{g^{-1}\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$(g^{-1} \circ f)(x) = x^2 - 1 + 1 = x^2$

$\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$



ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Β4.

i. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(f(x)+2\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-1+2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(g(x)+2\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x-1+2\right)=2,$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 1}h(x)=2$

ii.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)+7-9}{\left(h^2(x)-4\right)\left(\sqrt{h(x)+7}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(h(x)+2\right)\left(\sqrt{h(x)+7}+3\right)}=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}$$

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1.

- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=3x^2$
- η εφαπτομένη (ε) σε τυχαίο σημείο $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ της C_f έχει εξίσωση
  $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
- για να περνά από το $N\left(-2,f(-2)\right)=(-2,-8)$ πρέπει και αρκεί:

$$-8=3x_0^2(-2)-2x_0^3 \Leftrightarrow x_0^3+3x_0^2-4=0$$

$$x_0^3-1+3x_0^3-3=0\Leftrightarrow (x_0-1)\left(x_0^2+x_0+1\right)+3(x_0-1)(x_0+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)\left(x_0^2+x_0+1+3x_0+3\right)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1 \\ x_0^2+4x_0+4=0\Leftrightarrow (x_0+2)^2=0\Leftrightarrow x_0=-2 \end{cases}$$

Οπότε από το Ν περνούν οι εφαπτομένες

$\varepsilon: y=3x-2$ (σημείο επαφής το $A(1,1)$)

$\varepsilon_1: y=12x+16$ (σημείο επαφής το $N(-2,-8)$)

Γ2. Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ζ τότε είναι λ=3 και η εξίσωσης της ζ είναι: $y-\alpha=3(x-0)\Leftrightarrow y=3x+\alpha,\quad -2<\alpha<2$

Για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-(3x+\alpha)=x^3-3x-\alpha$ ισχύουν

- g συνεχής στο $[-1,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(-1)\cdot g(1)=(2-\alpha)(-2-\alpha)<0$

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3x_0+\alpha$

Είναι:

$g'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)>0$ στο $(-1,1)$, άρα g $\nearrow$ στο $(-1,1)$ οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Έτσι, το $A\left(x_0,x_0^3\right)$ είναι το μοναδικό σημείο τομής των ζ και C_f μεταξύ των $x=-1$ και $x=1$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Γ3. Για το $M(x(t),y(t))$ ισχύουν $x'(t)>0$, $-2\le x(t)\le 0$ και $y(t)=x^3(t)$, οπότε $y'(t)=3x^2(t)\cdot x'(t)$ (1)

Αν $y'(t)=3x'(t)$ η (1) δίνει $3x'(t)=3x^2(t)3x'(t)\Leftrightarrow x^2(t)=1\Leftrightarrow x(t)=-1$

Άρα, το ζητούμενο σημείο της καμπύλης είναι το $\left(-1,(-1)^3\right)=(-1,-1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{f'(x)\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+f(x)\sigma\upsilon\nu^3x-1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=0$$

Άρα, $g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

- $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}}{6}=1$,οπότε $g(x)=1$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ2. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\eta\mu^3x-\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

x	0		π/4		π/2
f'	//	−	0	+	//
f	//	↘	ε	↗	//

Από τη συνέχεια της f και τη μορφή της μονοτονίας προκύπτει ότι για $x_0=\frac{\pi}{4}$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Η ελάχιστη τιμή είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 2=2\sqrt{2}$.

Δ3.

- f συνεχής και ↘ στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ άρα

$$f\left(\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim_{x\to0^+}f(x)\right]=\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$$

$3\sqrt{2}\in f\left(\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$ οπότε υπάρχει $\rho_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $f(\rho_1)=3\sqrt{2}$ το ρ_1 είναι μοναδικό αφού f ↘

- f συνεχής και $\nearrow$ στο $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$, άρα $f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right]=\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$

  $3\sqrt{2}\in f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ οπότε υπάρχει $\rho_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(\rho_2)=3\sqrt{2}$ το ρ2 είναι μοναδικό αφού f $\nearrow$. Άρα, υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες ρ1, ρ2 με $\rho_1<\rho_2$.

Δ4. Είναι: $f''(x)=\ldots=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^3x}+\frac{\eta\mu^2x+2\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^3x}>0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

- f συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\rho_2\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4},\rho_2\right)$ με $f''(x)>0$, άρα $f'\nearrow$

  από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{\pi}{4},\rho_2\right)$, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho_2)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2-\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\frac{4\rho_2-\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi}$$

$$\xi<\rho_2\overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(\rho_2)\Leftrightarrow\frac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi}<f'(\rho_2)\overset{\rho_2>\frac{\pi}{4}}{\Leftrightarrow}4\sqrt{2}<f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)$$

<u>Επιμέλεια</u>: Οικονομόπουλος Αναστάσιος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ