ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Βλέπε σελ. 15 σχολικού βιβλίου.

β) Βλέπε σελ. 35-36 σχολικού βιβλίου.

Α2. Βλέπε σελ. 142 σχολικού βιβλίου.

Α3. Βλέπε σελ. 135 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) Λάθος. Βλέπε σελ. 134 σχολικού βιβλίου.

β) Λάθος. Βλέπε σελ. 71 σχολικού βιβλίου.

Α5. (γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

Β2.

Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας.

Θεωρούμε $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2\ ,\ x\in\mathbb{R}$

- g συνεχής στο $[2,3]\subseteq\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών
- $g(2)=e^{-2}>0, g(3)=e^{-3}-1<0$ άρα $g(3)\cdot g(2)<0$

  Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Μοναδικότητα

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(2,3)$. Επομένως είναι γνησίως μονότονη άρα και '1-1' οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Β3.

'Ελεγχος '1-1'

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-e^{-x}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1.

Εύρεση αντίστροφης

Θέτω $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \overset{y-2>0\Leftrightarrow y>2}{\Leftrightarrow} -x=\ln(y-2)$

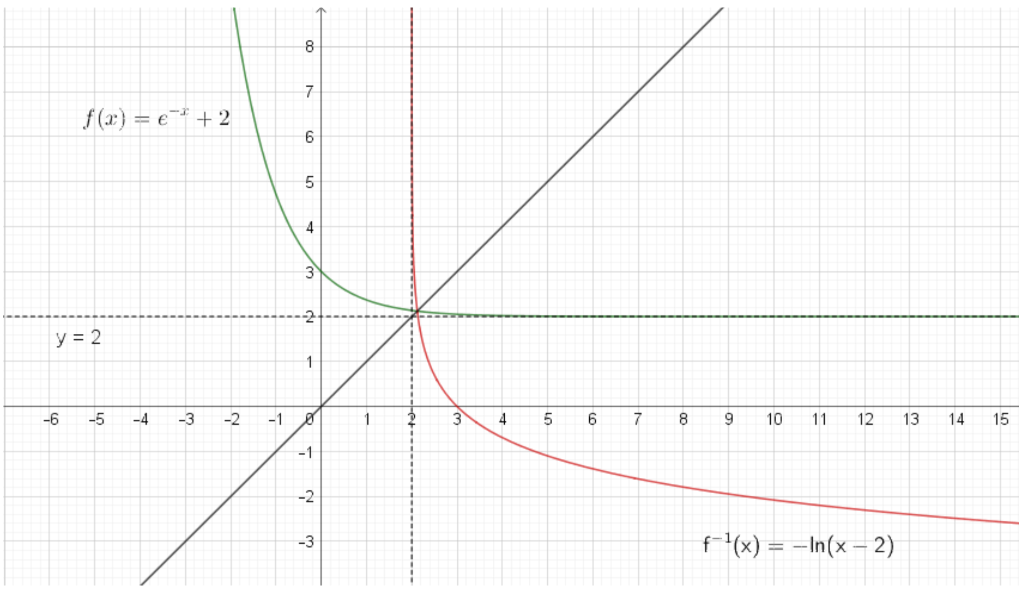
$\Leftrightarrow x=-\ln(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$, άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$

Β4. Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \underset{\substack{\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\left[-\ln(u)\right]=+\infty$

άρα η x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x & ,x<1 \end{cases}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, η f θα είναι και συνεχής στο 1 άρα πρέπει:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$. (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+\alpha)=1+\alpha$, (2)

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(e^{x-1}+\beta x)=1+\beta$ (3) και $f(1)=1+\alpha$

Άρα (1), (2), (3) είναι α=β.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\Leftrightarrow 2=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1+\beta x-\beta}{x-1}$$

$$\overset{D.L.H}{\underset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow}} 2=\lim_{x\to1^-}\frac{(e^{x-1}-1+\beta x-\beta)'}{(x-1)'}\Leftrightarrow 2=\lim_{x\to1^-}(e^{x-1}+\beta)\Leftrightarrow 2=1+\beta\Leftrightarrow 1=\beta$$

άρα και α=1.

Γ2.

Εύρεση μονοτονίας f

Είναι $f'(x)=\begin{cases} 2x & ,x>1 \\ e^{x-1}+1 & ,x<1 \end{cases}$ άρα $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και f συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση συνόλου τιμών

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ διότι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

Γ3.

i)

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ άρα το σύνολο τιμών της

είναι: $f\left((-\infty,0)\right) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = \left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$

Το $0\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα x_0 η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα γνησίως μονότονη επομένως και 1-1.

ii) $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x_0$ ή $f(x) = 0$

- $x > x_0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ οπότε δεν είναι δυνατόν να ισχύει

  $f(x) = \underbrace{x_0}_{\text{αρνητικό}}$ ή $f(x) = 0$

Γ4.

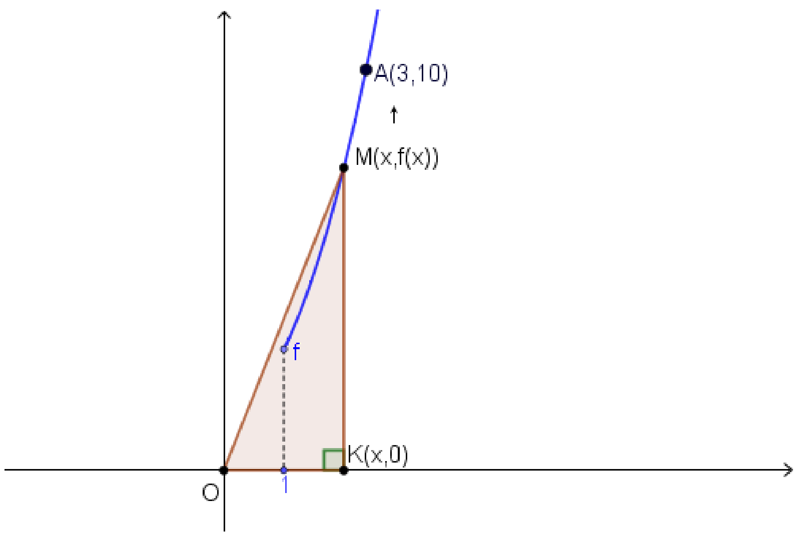
Θα ισχύουν $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 10$, $x'(t) = 2$

$$E(t) = \frac{1}{2}|x(t)||y(t)| = \frac{1}{2}x(t)y(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(x^2(t)+1\right) = \frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$$

$$E'(t) = \left[\frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(t)+x'(t)\right) = \frac{1}{2}x'(t)\left(3x^2(t)+1\right)$$

Θέτω $t=t_0$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)\left(3x^2(t_0)+1\right) = \frac{1}{2}2(27+1) = 28 \text{ τ.μ}$$



Δ1.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:
  $$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$
- $f(1)=\alpha+\beta$
- $f'(1)=\alpha$
- Η εφαπτομένη στο $A(1,1)$ έχει εξίσωση:
  $$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$
  $$y=\alpha(x-1)+(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$$
  $$y=\alpha x+\beta$$
- Οπότε είναι $\boxed{\alpha=-1}$ και $\boxed{\beta=2}$

Δ2.

- Για το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισχύει:
  $$E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]\right|dx$$
- Για $x\geq 1$ είναι: $(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$
- Οπότε:
  $$E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$
  $$\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$
  $$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\left[\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]'dx=$$
  $$0-\int_1^2\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x+2}dx$$
- Διαιρώντας αριθμητή δια παρονομαστή:
  $$E=\int_1^2\left[(x-1)-\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right]dx=$$
  $$-\int_1^2\left[(x-1)-\frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2}\right]dx=$$
  $$-\left[\frac{x^2}{2}-x-\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2=$$
  $$\ln 2-\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

Δ3.

i.

- Είναι:
  $$f'(x)+1=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}=$$
  $$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$ ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων.
- Για $x\neq 1$ είναι: $f'(x)>-1$ ως άθροισμα θετικών ποσοτήτων.

ii.

Α΄ τρόπος:

- Από το i. ερώτημα προκύπτει ότι για την
  $g(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)+2$
- Είναι: $g'(x)=\left(f(x)+x\right)'=f'(x)+1\geq 0$
- “ = ” μόνο για $x=1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα: $(-\infty,1],[1,+\infty)$ και συνεχής, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- $$\lambda+\frac{1}{2}>\lambda\Leftrightarrow g\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)>g(\lambda)\Leftrightarrow$$
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)>f(\lambda)+\lambda\Leftrightarrow$$
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)>f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda>(\lambda+1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}+\lambda\Leftrightarrow$$
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda>(\lambda+1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$$
- Οπότε αληθεύει η: $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda+1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$

Β΄ τρόπος:

- Παρατηρώ ότι : $(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=f(\lambda)+\lambda-2$
- Άρα αρκεί να δείξω ότι:
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
  $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$$

- Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

- Άρα αρκεί να δείξω ότι $\frac{1}{2}f'(\xi) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) \geq -1$, που ισχύει λόγω του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ4.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-3x^2-1$
- Η εφαπτομένη της C_g στο $(0, g(0))$ έχει εξίσωση $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-2=-1(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y=-x+2}$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$ έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y=-x+2}$
- Οπότε η εφαπτομένη της C_g στο $B(0,2)$ είναι ίδια με την εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$.
- Για να υπάρχει και άλλη κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν $(x_1, x_2) \neq (0,1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x_1)=f'(x_2)$ αυτό όμως είναι άτοπο διότι $g''(x)=-6x$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g''(x)$	+ 0 −
$g'(x)$	$\nearrow$ max $g(0)=-1$ $\searrow$

- Άρα $g'(x)<-1$ για $x \neq 0$ και $f'(x)>-1$ για $x \neq 1$.

<u>Επιμέλεια</u>: Βασιλάτος Κοσμάς
Καναβός Φώτης
Κανακάκης Γιώργος
Κατέχος Γιώργος
Μακρίδης Ηλίας
Μακρίδης Κωνσταντίνος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος
Σάββας Νίκος