ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. § 2.7 σχολικό βιβλίο σελ. 144

Α2. § 3.1 σχολικό βιβλίο σελ. 185

Α3. § 2.5 σχολικό βιβλίο σελ. 128-129

Α4.

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- $A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f \,|\, f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\, x^2+1\geq 2\Leftrightarrow x^2\geq 1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\, x^2+1\geq 2\Leftrightarrow x^2\geq 1\right\}=$ $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\right\}$
- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$

Β2.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1-0}=1,$ **λ=1**
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

  (διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=+\infty$), β=0

  Η ασύμπτωτη προς το $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Β3.

$$\lim_{x\to2^+}h(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}h(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-1\right)=\sqrt{3}>0$, $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ και όταν:

- διότι $x\to2^+$ είναι $x>2\Leftrightarrow x-2>0$
- διότι $x\to2^-$ είναι $x<2\Leftrightarrow x-2<0$

Επειδή τα πλευρικά όρια στο 2 είναι διαφορετικά, έπεται ότι δεν υπάρχει το όριο της h στο $x_0=2$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Β4.

- Η t είναι συνεχής στα $[0,1),(1,2]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών και επειδή:
  - ✓ $t(1)=(g\circ f)(1)\cdot \eta\mu\pi=0$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left((1-x^2)\cdot\eta\mu\pi\right)=0$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to 1^+} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\eta\mu\pi\right)=0$, έπεται t συνεχής στο $[0,2]$

- Η t είναι παραγωγίσιμη στα $(0,1),(1,2)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων και επειδή:
  - ✓ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}\cdot\eta\mu\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu\pi x}{\sqrt{x-1}}\right)=$

    $=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi-\pi x)}{(1-x)\pi}\pi\right)==\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\pi\cdot\sqrt{x^2-1}\dfrac{\eta\mu((1-x)\pi)}{(1-x)\pi}\right)=0$

    (Διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu((1-x)\pi)}{(1-x)\pi}\overset{u=(1-x)\pi}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$)
  - ✓ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x^2)\cdot\eta\mu\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-(1-x^2)\cdot\pi\cdot\eta\mu(\pi-\pi x)}{\pi-\pi x}\right)=0$

    Έπεται ότι $t(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,2)$
  - $t(0)=\varphi(0)\cdot\eta\mu 0=0$, $t(2)=\varphi(2)\cdot\eta\mu 2\pi=0$, $t(0)=t(2)$

    Από τα παραπάνω προκύπτει ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle $[0,2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow f^2(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Για $x=1: f^2(1)=1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$, $f^2(x)=x$

Από την ισότητα: $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}, x>0$ προκύπτει ότι η στο $(0,+\infty)$ δεν έχει ρίζα και επειδή είναι συνεχής, έπεται ότι διατηρεί πρόσημο.

- ✓ $f(1)=1$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, έτσι από την (1) έπεται $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$.

Γ2.

Αν $N(x,\sqrt{x})$ τυχαίο σημείο της C_f τότε η απόσταση d=(ΝΑ), όπου $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ δίνεται από την $d(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2}=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+x}$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

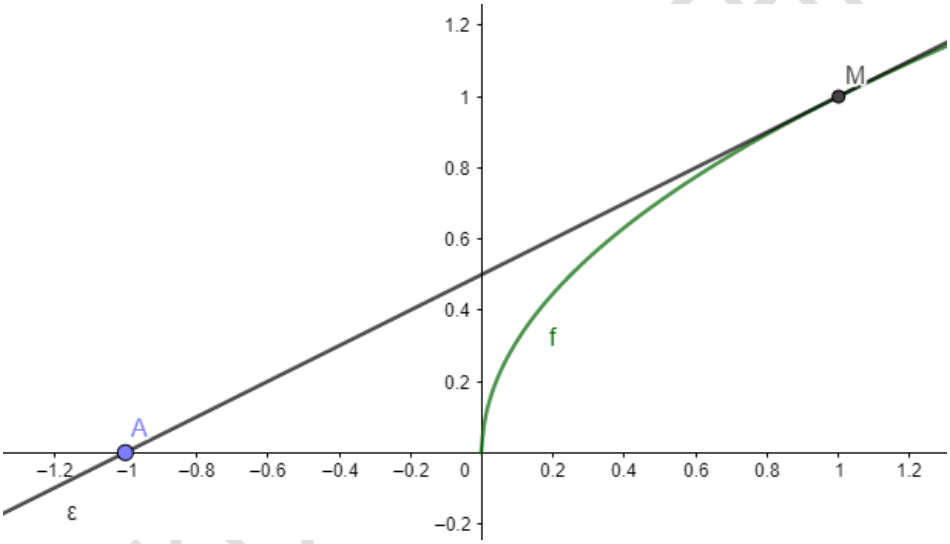
Η απόσταση d(x) γίνεται ελάχιστη όταν η συνάρτηση $h(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+x$, πάρει την ελάχιστη τιμή.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $h'(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)+1=2x-2=2(x-1)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

x	0		1	+∞
h′		+		−
h		↘	ε	↗

Από τη μορφή της μονοτονίας και τη συνέχει έπεται ότι για $x=1$ η h(x), άρα και η d(x) παίρνει την ελάχιστη τιμή. Άρα το Μ(1,1) είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το Α.

Γ3.



- f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω.

  Έτσι η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη (ε) στο Μ. (Με εξαίρεση το σημείο Μ).

  Η εξίσωση της (ε) είναι $y-f(1)=f'(x)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

  Για $y=0$, $x=-1$ άρα το σημείο τομής της (ε) με τον x΄x είναι το Α(-1,0).

  Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=(ABM)-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\int_0^1\sqrt{x}dx=1-\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\tau.\mu$$

Γ4. Για την $p(x)=f(x)-g(x)$, έχουμε ότι

$\begin{cases} p \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ ως διαφορά συνεχών} \\ p(0)\cdot p(1)=-g(0)(1-g(1))<0, \text{ αφού } g(0)>0,\ g(1)<1 \end{cases}$

Από θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $p(x_0)=0$.

- Για κάθε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$ έπεται $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow -g(x_1)<-g(x_2) \end{cases}$

  $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)\Leftrightarrow p(x_1)<p(x_2)$, οπότε p ↗ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(3x^2-3x+1)-x^3(6x-3)}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{9x^4-9x^3+3x^2-6x^4+3x^3}{(3x^2-3x+1)^2}=$$

$$=\frac{3x^2(x^2-2x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}$$

- $f'(x)>0$ στο $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$
- f ↗ στο $(-\infty,0],[0,1],[1,+\infty)=\mathbb{R}$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$

Δ2.

- $f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{(1-x)^3}{3-6x+3x^2-3+3x+1}=\frac{x^3+(1-x)^3}{3x^2-3x+1}=$

  $=\frac{x^3+1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}=\frac{3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- $f(0)=0$ και f ↗

  Για $x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 0$

  $E=\int_0^1 f(x)dx$ είναι $\int_0^1 f(x)+f(1-x)dx=\int_0^1 1dx\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=1$ (1)

  Για το $I=\int_0^1 f(1-x)dx$ θέτω $u=1-x$, τότε $du=-dx$

  Για $x=0$ είναι $u=1$
  Για $x=1$ είναι $u=0$

  $I=-\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$

  Έτσι η (1) γίνεται $2\int_0^1 f(x)dx=1\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E=\frac{1}{2}$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Δ3. $0 \le x \le 1$ και επειδή f ↗

$f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1$

Άρα, $f^2(x) \le f(x)$, "=" μόνο για $x = 0$ και $x = 1$

Άρα,

$$\int_0^1 f^2(x)dx < \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\int_0^1 f^2(x)dx < 1 \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x)dx < 1$$

Δ4. $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\eta\mu^2 x) + f(1 - \eta\mu^2 x) = 1$

Αρκεί να λυθεί η

$$1 = f\left(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f\left(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right) \overset{f:"1-1"}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow$$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}$ $(1), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x \in (0,1)$.

Αν $g(\omega) = \frac{e^\omega}{\omega}$, $\omega \in (0,1)$ είναι $g'(\omega) = \frac{\omega e^\omega - e^\omega}{\omega^2} = e^\omega \frac{\omega - 1}{\omega^2} < 0$, άρα g ↘ οπότε και "1-1" στο $(0,1)$, οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με την

$g(\sigma\upsilon\nu x) = g(\eta\mu x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Επιμέλεια: Οικονομόπουλος Αναστάσιος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ