

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 99.

A2.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$  είναι '1-1', αλλά όχι γνησίως μονότονη.

A3. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 216.

A4.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}^*$ , ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων  $y = x$  και  $y = \frac{4}{x^2}$ .

Για κάθε  $x \neq 0$  είναι:  $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -2]$  και στο  $(0, +\infty)$  και η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 0)$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $-2$  το  $f(-2) = -3$

x	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$x^3$	-	-		+
$x^3 + 8$	-	+		+
$f'(x)$	+	-		+
$f(x)$	↗	↘		↗

-3  
τ.μ.

B2.

Για κάθε  $x \neq 0$  είναι:  $f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0$ .

Άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 0)$  και στο  $(0, +\infty)$ .

Δεν έχει σημεία καμψής.

B3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

Άρα η  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{x^2} = 0$$

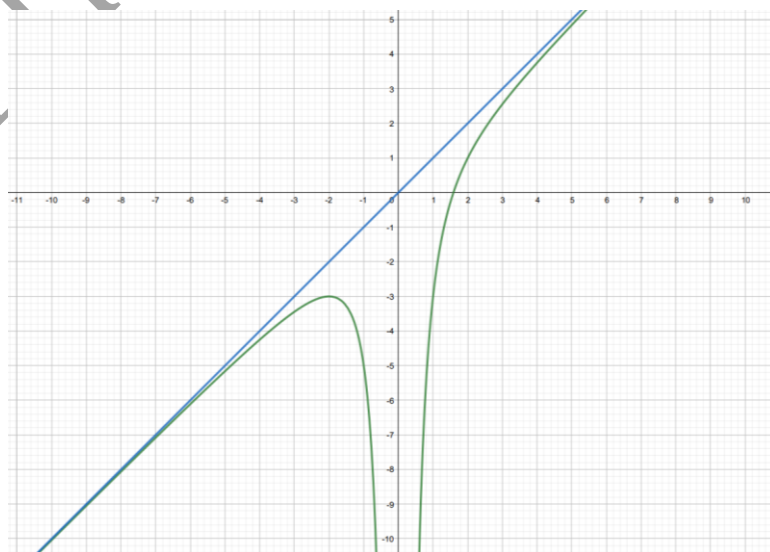
Άρα η  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = 0$$

Άρα η  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

B4.



**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

Εύρεση εμβαδού τετραγώνου

$$E_{\text{ΤΕΤΡ}} = \frac{x^2}{16}$$

Εύρεση ακτίνας

$$L = 2\pi R \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{8-x}{2\pi} \quad (1)$$

Εύρεση εμβαδού κύκλου

$$E_{\text{ΚΥΚΛΟΥ}} = \pi R^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E_{\text{ΚΥΚΛΟΥ}} = \pi \left( \frac{8-x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Εύρεση συνολικού εμβαδού

$$E_{\text{ΟΛ}} = E_{\text{ΤΕΤΡ}} + E_{\text{ΚΥΚΛΟΥ}} = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$



$$\text{ΑΡΑ } E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

**Γ2.**

$$E'(x) = \frac{1}{16\pi} \cdot [(\pi+4)x^2 - 64x + 256] = \frac{1}{16\pi} \cdot [2(\pi+4)x - 64] = \frac{(\pi+4)x}{8\pi} - \frac{4}{\pi}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x}{8\pi} - \frac{4}{\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x}{8\pi} - \frac{4}{\pi} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$$

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
E'		-	+
E			

Η  $E(x)$  συνεχής στο  $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$  με  $E'(x) < 0$  στο  $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$  άρα  $E$  γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$

Η  $E(x)$  συνεχής στο  $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$  με  $E'(x) > 0$  στο  $\left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$  άρα  $E$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

Για  $x = \frac{32}{\pi+4}$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)$

#### Εύρεση διαμέτρου

$$R = \frac{8-x}{2\pi} \Leftrightarrow 2R = \frac{8-x}{\pi} \Leftrightarrow \delta = \frac{8-x}{\pi}$$

$$\text{για } x = \frac{32}{\pi+4} \text{ έχω } \delta = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi+32 - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{(\pi+4)\pi} = \frac{8}{\pi+4}$$

#### Εύρεση πλευράς τετραγώνου

$$\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$$

Άρα η διάμετρος είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου.

Γ3.

Εύρεση συνόλου τιμών στο  $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$

$$E(\Delta_1) = \left[ E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right) = \left( \frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right) \text{ διότι}$$

- $$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{\frac{32^2}{\pi+4} - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi}$$

$$= \frac{-\frac{1024}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4} < 4$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi} > 5$$

Εύρεση συνόλου τιμών στο  $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2$

$$E(\Delta_2) = \left[ E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right) = \left[ \frac{16}{\pi+4}, 4 \right) \text{ διότι}$$

- $$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{\frac{32^2}{\pi+4} - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi}$$

$$= \frac{-\frac{1024}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4} < 4$$
- $$\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = 4$$

Το 5 ανήκει στο  $E(\Delta_1) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$  κι όχι στο  $E(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$  άρα υπάρχει μοναδικός τρόπος να κοπεί το σύρμα.



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x, \quad f''(x) = 2e^{x-a} - 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > a$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

Η f συνεχής στο  $(-\infty, a]$  και  $f''(x) < 0$  στο  $(-\infty, a)$  άρα η f είναι κοίλη στο  $(-\infty, a]$

Η f συνεχής στο  $[a, +\infty)$  και  $f''(x) > 0$  στο  $(a, +\infty)$  άρα η f είναι κυρτή στο  $[a, +\infty)$

Ισχύει ότι  $f''(a) = 0$  και αλλάζει η κυρτότητα γύρω από το a.

Το σημείο  $(a, f(a))$  είναι το μοναδικό σημείο καμψής.

**Δ2.**

Εύρεση συνόλου τιμών στο  $\Delta_1 = (-\infty, a]$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$

$$f'(\Delta_1) = \left[ f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right) = (2(1-a), +\infty) \text{ διότι}$$

- $f'(a) = 2(1-a) < 0$  αφού  $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$

Εύρεση συνόλου τιμών στο  $\Delta_2 = (a, +\infty)$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2$

$$f'(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (2(1-a), +\infty) \text{ διότι}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{x-a} \left( 1 - \frac{x}{e^{x-a}} \right) = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-a}} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0$$

Επειδή  $0 \in f'(\Delta_1)$  τότε υπάρχει  $x_1 \in \Delta_1$  ώστε  $f'(x_1) = 0$

( $x_1$  μοναδικό, αφού  $f'$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, a]$ )

Επειδή  $0 \in f'(\Delta_2)$  τότε υπάρχει  $x_2 \in \Delta_2$  ώστε  $f'(x_2) = 0$




( $x_2$  μοναδικό, αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, +\infty)$ )

$$x < x_1 \stackrel{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$x_1 < x < a \stackrel{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

$$x > x_2 \stackrel{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$a < x < x_2 \stackrel{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	$x_1$	$a$	$x_2$	$+\infty$
f'	+		-		+
f		o		o	

Η  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, x_1]$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(-\infty, x_1)$  άρα  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, x_1]$

Η  $f$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_1, x_2)$  άρα  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_1, x_2]$

Η  $f$  συνεχής στο  $[x_2, -\infty)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_2, -\infty)$  άρα  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_2, -\infty)$

Επίσης  $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0$  κι επειδή αλλάζει η μονοτονία της  $f$  εκατέρωθεν των  $x_1, x_2$  άρα  $x_1$  θέση τοπικού μεγίστου και  $x_2$  θέση τοπικού ελαχίστου.

Δ3.

$$\text{Είναι } f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2(e^{-\alpha} - 1) < 0$$

Αφού

- $\alpha > 1 \Leftrightarrow -\alpha < -1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$
- $e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} - 1 < 0$

Επειδή  $f'(x) < 0$  στο  $(x_1, x_2)$ .

Έπεται ότι  $1 \in (x_1, x_2)$  και επειδή  $\alpha > 1$  έπεται ότι:  $x_1 < 1 < \alpha < x_2$ .

Στο  $(x_1, x_2)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, άρα '1-1'

Οπότε η  $f(x) = f(1)$  έχει μοναδική λύση την  $x = 1 \notin (\alpha, x_2)$

Δ4.

Για  $\alpha = 2$  είναι  $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$  και  $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(2, f(2))$  είναι η:

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

Η συνάρτηση  $f$  στο  $[2, 3]$  είναι κυρτή από το ερώτημα (Δ1), άρα η  $C_f$  είναι πάνω από την  $(\varepsilon)$  εκτός του σημείου  $(2, f(2))$  στο διάστημα  $[2, 3]$ .

Άρα  $f(x) \geq -2x + 2$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 2$ .

Αφού  $\sqrt{x-2} \geq 0$  για  $x \in [2, 3]$  είναι:

$$f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2} \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 2.$$

$$\text{Οπότε } \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$$

$$I = \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = -2\int_2^3 x\sqrt{x-2}dx + 2\int_2^3 \sqrt{x-2}dx, \text{ με}$$



$$\begin{aligned} \int_2^3 x\sqrt{x-2} dx & \stackrel{u=x-2}{=} \int_0^1 (u+2)\sqrt{u} du = \int_0^1 u\sqrt{u} du + 2\int_0^1 \sqrt{u} du = \\ & \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du + 2\int_0^1 u^{\frac{1}{2}} du = \left[ \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15} \\ \int_2^3 \sqrt{x-2} dx & = \int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I = -2 \frac{26}{15} + 2 \frac{2}{3} = -\frac{52}{15} + \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

$$\text{Τελικά } \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

Καναβός Φώτης

Κανακάκης Γιώργος

Κατωπόδης Σπύρος

Μακρίδης Ηλίας

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνιος