ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο, σελ. 144-145.

Α2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο, σελ. 15.

Α3. Η Τ παράγωγος της f και η Η παράγωγος της g.

Α4.

α) Ψ

β) Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=3-\frac{1}{x^2}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty} 3=3$

Α5. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1,+\infty)$ ως ρητή.

Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει επιπλέον να είναι συνεχής στο

$$x_0=1 \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(x^2+\alpha)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x}=1+\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Β2. Για $\alpha=1$ $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+1, & x\le 1\end{cases}$

- Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

- Η f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ με $f'(x)=2x$

- Η f παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ με $f'(x)=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

$$\text{στο } x_0=1: \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και δεν ισχύει Θ. Rolle.

Β3. Για $x\in(-\infty,1)$ $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$ Δεκτή

Η εφαπτομένη στο $x_0=-\frac{1}{8}$ είναι

$$\psi-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow \psi-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32}\Leftrightarrow \psi=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

Για $x\in(1,+\infty)$ $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

Δεκτή η λύση $x=2$

Η εφαπτομένη στο $x_0=2$ είναι:

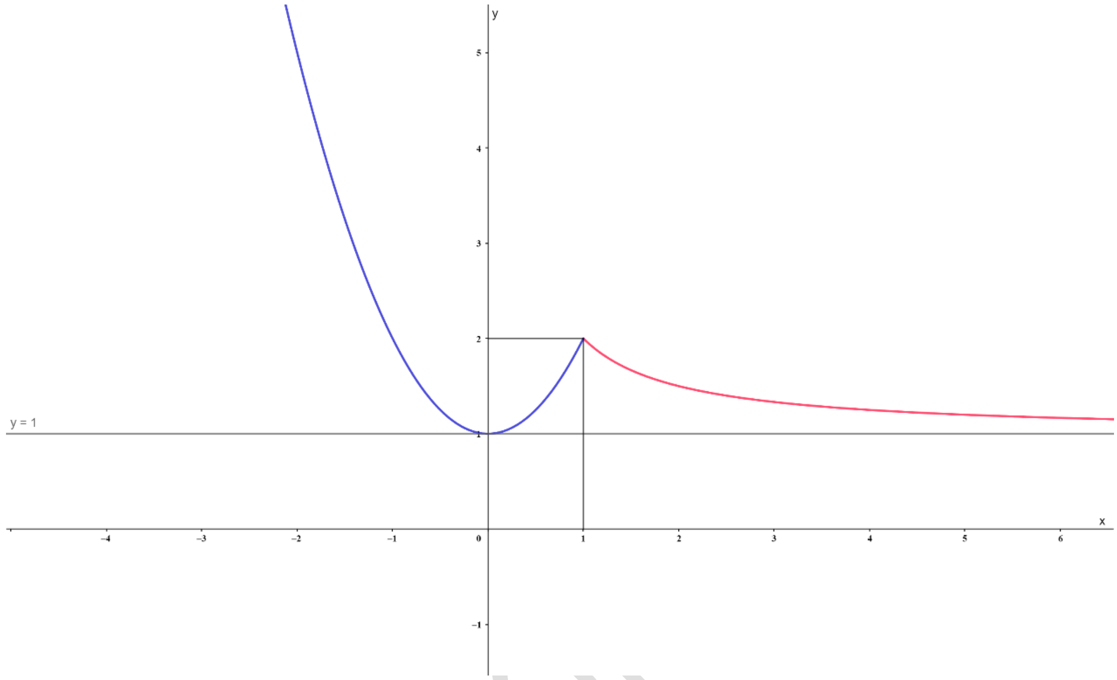
$$\psi-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow \psi-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow \psi=-\frac{1}{4}x+2$$

Β4. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Για $x\in(-\infty,1]$ η f είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού οπότε δεν έχει ασύμπτωτες.

Για $x>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$,

οπότε $\psi=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξη συνεχών

Για $x\in(0,\pi)$, $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$

$$x\in(0,+\infty)\quad f'(x)=\frac{(\ln(x+1))'x-\ln(x+1)x'}{x^2}=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f'	$+$	$-$	
	$\nearrow$	$\searrow$	

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=$$

$$f(\pi)=2\eta\mu\pi-\pi=-\pi$$

$$=2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=0,\ x_0=\pi$ τοπικό ελάχιστο και στο $x_0=\frac{\pi}{3}$ τοπικό μέγιστο.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\pi$ και ολικό μέγιστο στο $x_0=\frac{\pi}{3}$.

Γ2. Η f συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$ με $f''(x)=-\eta\mu x$, για $x\in\left(0,\pi\right)$

Οπότε η f είναι κοίλη στο $\left[0,\pi\right]$. Η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι πάνω από τη C_f και έχουμε μόνο ένα κοινό σημείο το σημείο επαφής.

Γ3.

$$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^\pi(2\eta\mu x-x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^\pi\left(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx-\int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^\pi \eta\mu 2x dx-\int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi x(\eta\mu x)'dx=\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi-\left(\left[x\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi x'\eta\mu x\right)=$$

$$=\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi-\left[x\eta\mu x\right]_0^\pi+\int_0^\pi \eta\mu x dx=\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi-\left[x\eta\mu x\right]_0^\pi-\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi=$$

$$=-\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{2}\right)-\left(\pi\eta\mu\pi-0\eta\mu 0\right)-(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0)=2$$

Γ4.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}-1\right)=2-1=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-f(2x)\ln x\right]=\lim\limits_{x\to 0}f(x)-\lim\limits_{x\to 0}f(2x)\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\eta\mu x-x\right)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(2x)\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{x}x\ln x = 0 \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} \underset{x\to 0\Rightarrow u\to 0}{\overset{\text{Θέτω:}2x=u}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{\frac{u}{2}} = 2\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = 2\cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Οπότε $\lim_{x\to 0}\left[f(x) - f(2x)\ln x\right] = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$

Έστω

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} \quad \Big|(0,+\infty)$$

$$x\in(0,+\infty) \quad g'(x) = \frac{1}{1+x}(1+x)' - \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0, \text{ οπότε η } g \nearrow \text{ στο } (0,+\infty)$$

Για $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$

Δ2. Για $x\in(0,+\infty)$ $f'(x) = \frac{(\ln(x+1))'x - \ln(x+1)x'}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} =$

$$= -\frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{x^2} < 0$$

Η f $\searrow$ $\sigma\tau o$ $(0,+\infty)$ $o\pi \acute{o}\tau\varepsilon$ $1-1$ και η f αντιστρέφεται

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

Οπότε $f(A)=(0,1)$

Δ3.

$$f(x)>2^{f(x)}-1\Leftrightarrow f(x)+1>2^{f(x)}\Leftrightarrow \ln(f(x)+1)>\ln 2^{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(f(x)+1)>f(x)\ln 2\Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)}>\ln 2\Leftrightarrow f(f(x))>f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<1$$

το οποίο ισχύει

Δ4.

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha)=0$$

Έστω $K(x)=x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha)\ \ \big|\mathbb{R}$

Η K είναι συνεχής στα $[0,1]$, $[1,2]$ ως πολυωνυμική

$$K(0)=2\eta\mu(\pi\alpha),\quad K(1)=-f(\alpha),\quad K(2)=2f^{-1}(\alpha)$$

Έχουμε: $0<\alpha<1\Leftrightarrow 0<\pi\alpha<\pi$ οπότε $\eta\mu(\pi\alpha)>0$ και $K(0)>0$

$f(\alpha)\in(0,1)$, οπότε $K(1)<0$, $\quad f^{-1}(\alpha)>0$ οπότε $K(2)>0$

Ισχύει Θ. Bolzano σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,1\right]$, $\left[1,2\right]$ επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,1\right)$ ώστε $K(x_0)=0$ και ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1,2\right)$ ώστε $K(x_0)=0$. Η $K(x)$ έχει 2 ρίζες ακριβώς διότι $K(x)$ πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού.

Δ5.

Η F αρχική της f στο $(0,+\infty)$ οπότε η F παραγωγίσιμη στο $\left[1,e\right]$ με $F'(x)=f(x)$.

Για την F στο $\left[1,e\right]$ ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$

$$\text{ώστε}: \ F'(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}$$

$$1<\xi<e \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(e)<f(\xi)<f(1) \Leftrightarrow f(e)<\frac{F(e)-F(1)}{e-1}<f(1)$$

$$f(e)<\frac{F(e)-F(1)}{e-1} \Leftrightarrow \frac{F(e)-F(1)}{e-1}>f(e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e\ln 2-F(1)}{e-1}>\frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow e\ln 2-F(1)>(e-1)\frac{\ln(e-1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -F(1)>(e-1)\frac{\ln(e+1)}{e}-e\ln 2 \Leftrightarrow F(1)<e\ln 2-\frac{(e-1)\ln(e+1)}{e} \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$e\ln 2-(e-1)\frac{\ln(e+1)}{e}<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$e\ln 2-e\frac{\ln(e+1)}{e}+\frac{\ln(e+1)}{e}<\ln 2^{e+1}-\ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$e\ln 2-\cancel{\ln(e+1)}+\frac{\ln(e+1)}{e}<(e+1)\ln 2-\cancel{\ln(e+1)} \Leftrightarrow$$

$$e\ln 2+\frac{\ln(e+1)}{e}<e\ln 2+\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}<\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e+1)<e\ln 2 \Leftrightarrow e+1<2^e \quad \text{το οποίο ισχύει} \ (2)$$

Επιπλέον:

$$\frac{F(e)-F(1)}{e-1}<f(1)\Leftrightarrow\frac{e\ln2-F(1)}{e-1}<\ln2\Leftrightarrow$$
$$e\ln2-F(1)<(e-1)\ln2\Leftrightarrow\cancel{e\ln2}-F(1)<\cancel{e\ln2}-\ln2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -F(1)<-\ln2\Leftrightarrow F(1)>\ln2\,(3)$$

Από $(1),(2),(3)$ $\quad \ln2<F(1)<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$

Επιμέλεια: Ρούτης Κωνσταντίνος