ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α2. Λάθος πρέπει να αλλάξει η κυρτότητα πριν και μετά το x_o.

π.χ.

$$f(x)=x^4$$

$$f'(x)=4x^3 \quad \text{και} \quad f''(x)=12x^2 \quad \text{με} \quad f''(0)=0$$

όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο $x_o=0$.

Α3. δ

Α4. **α.** **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\triangle}{EBZ}$ έχουμε:

$$EZ^2=EB^2+BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2=x^2+(2-x)^2=x^2+4-4x+x^2=2x^2-4x+4$$

$$\text{οπότε} \quad EZ=\sqrt{2x^2-4x+4} \quad \text{με} \quad x\in[0,2]$$

Β2. $(EZH\Theta)=EZ^2=2x^2-4x+4,$ οπότε $f(x)=2x^2-4x+4 \quad x\in[0,2]$

Β3. $f'(x)=4x-4 \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0	1	
f'	$-$		$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστον για $x=1$ και μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$.

Β4.

$A_1 = [0,1]$ και $f(A_1) = [f(1), f(0)] = [2,4]$

$A_2 = [1,2]$ και $f(A_2) = [f(1), f(2)] = [2,4]$

$f(A) = [2,4]$ και $4e^{x_0} + 1 \notin f(A)$

Επομένως δεν υπάρχει $x_o \in [0,2]$ ώστε $f(x_o) = 4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. οπότε:

$f(3) = f(0) = 2$.

$$E = \int_0^3 |f'(x)|dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 (-f'(x))dx + \int_2^3 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$[-f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8 \Leftrightarrow f(2) = -2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = -3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2} = \lim_{x\to 0}\frac{x'}{(f(x)-2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

$$\text{διότι} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \quad \text{για} \quad x \in (0,1)$$

Γ2.

Η $f \searrow$ στο $[0,2]$.

Η $f \nearrow$ στο $[2,3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και $x = 3$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 2$.

Η $f' \searrow$ στο $[0,1]$ και η $f' \nearrow$ στο $[1,3]$ επομένως η f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1,3]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ σημείο καμπής

Γ3. Για την f στο $[2,3]$ έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$
- $f(2)f(3)=-4<0$

Ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ ώστε

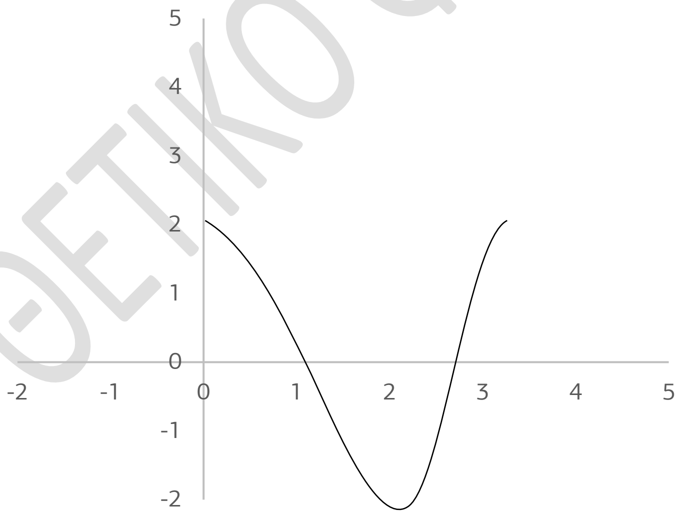
$f(x_0)=0$.

Όμως η $f \nearrow$ στο $[2,3]$ οπότε μοναδικό x_0 :

- Για $x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \Rightarrow f(x)<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
- Για $x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \Rightarrow f(x)>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Γ4.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως πολυωνυμική $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-3x^2+2)=2=f(0)$.Οπότε η f είναι συνεχής στο $[0,2]$,η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=6x^2-6x$. Επομένως η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\eta\mu x}{x}+\alpha\right)=2 \Leftrightarrow -1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=3$$

Δ3. Για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ $f'(x)=-\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

Έστω $g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-(\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)=x\eta\mu x>0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad g\nearrow\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$$

Για $x<0\Rightarrow g(x)<g(0)\Rightarrow g(x)<0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad f'(x)<0$

Για $x\in(0,+\infty)$ $\quad f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	2	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$+$	
	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η $f\searrow$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},2\right]$ και $\nearrow$ στο $[2,+\infty)$

Δ4.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2}(x^3-3x^2+2)dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_0^2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\le x\le 0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\le f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 2\le f(x)\le 3-\frac{2}{\pi}$$

Το ‘$=$’ ισχύει μόνο για $x=0$ και $x=-\frac{\pi}{2}$ οπότε:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3-\frac{2}{\pi}\right)dx\Leftrightarrow 2\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\left[3x-\frac{2x}{\pi}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\Leftrightarrow$$

$$\pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\frac{3\pi}{2}-1 \quad \text{και} \quad \text{τελικά} \quad \pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx<\frac{3\pi}{2}-1$$

Δ5.

Για $x\in(0,1)$ έχουμε:

- $0<x<1\Rightarrow 0>-\frac{\pi}{2}x>-\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}x<0$
- $0<x<1\Rightarrow -1<-x<0\Rightarrow e^{-1}<e^{-x}<e^{0}\Rightarrow \frac{1}{e}<e^{-x}<1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2e}>-\frac{\pi}{2}e^{-x}>-\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}e^{x}<-\frac{\pi}{2e}$$

Επομένως $-\frac{\pi}{2}x,\ -\frac{\pi}{2}e^{-x}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ άρα η f $1-1$.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x=-\frac{\pi}{2}e^{-x}\Leftrightarrow x=e^{-x}\Leftrightarrow e^{x}-x=0$$

Έστω $\kappa(x)=e^{-x}-x,\ [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η κ είναι συνεχής στο } [0,1] \text{ ως πράξη συνεχών}\\ \kappa(0)\kappa(1)=1(e^{-1}-1)<0\end{array}\right\}\text{ισχύει Θ. Bolzano}$$

οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $\kappa(x_0)=0$

$\kappa'(x)=-e^{-x}-1<0$ η $\kappa\searrow$ στο $[0,1]$ άρα μοναδική λύση.

<u>Επιμέλεια</u>: Ρούτης Κωνσταντίνος