ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ

ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Θέμα Α

Α1. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 142-143)

Α2. Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 51)

Α3. Θεωρία (Σχολικό βιβλίο σελ. 162)

α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Β1. $A_f = (1,5)U(5,9),\ f(A) = (-2,5]$

Β2.

α) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -2$

β) $\lim_{x\to3} f(x)$ δεν υπάρχει διότι είναι διαφορετικά τα πλευρικά όρια ($\lim_{x\to3^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to3^+} f(x) = 2$)

γ) $\lim_{x\to5} f(x) = 3$

δ) $\lim_{x\to7} f(x)$ δεν υπάρχει διότι είναι διαφορετικά τα πλευρικά όρια ($\lim_{x\to7^-} f(x) = 2$ και $\lim_{x\to7^+} f(x) = 4$)

ε) $\lim_{x\to9} f(x) = \lim_{x\to9^-} f(x) = 3$

Β3.

α) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο 2^- και $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 2^+. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}$

β) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 6

γ) Θέτουμε $f(x)=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to 8}f(x)=5$. Άρα $\lim\limits_{x\to 8}f(f(x))=\lim\limits_{u\to 5}f(u)=\lim\limits_{x\to 5}f(x)=3$

Β4.

Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x=3$ (διαφορετικά πλευρικά όρια) καθώς επίσης και στο $x=7$ (διαφορετικά πλευρικά όρια). Άρα δεν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 7}f(x)$ για αυτό και δεν είναι συνεχώς στα σημεία αυτά.

Β5.

Τα σημεία είναι $A(4{,}4)$, $B(6{,}0)$, και $\Gamma(8{,}5)$ της C_f που μηδενίζεται η f' διότι σε αυτά η Cf δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα xx' Θ. Fermat.

Θέμα Γ

Γ1.

Είναι $f'(x)=3x^2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και “1-1”.

Για $x\geq 0$ είναι $y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$

Για $x<0$ είναι $y=x^3\Rightarrow x=-\sqrt[3]{-y}$

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$

Γ2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-x+\frac{1}{6}x^3, x\geq 0$. Είναι $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+\frac{1}{2}x^2$ και

$g''(x)=-\eta\mu x+x$

Ισχύει $\eta\mu x \le x \Rightarrow -\eta\mu x + x \ge 0$ και $g'(x)$ γνησίως αύξουσα για $x \ge 0$

Άρα $x \ge 0 \overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(x) \ge g'(0) \Rightarrow g'(x) \ge 0$

Επομένως g είναι γνησίως αύξουσα για $x \ge 0$.

Για $x > 0 \overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(x) > g'(0) \Rightarrow \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0 \Rightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$

$f(\eta\mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3)$

Γ3.

$y = x^3, x \ge 0$

Τη χρονική στιγμή t είναι $y(t) = x^3(t)$ και $y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t), t \ge 0$.

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0)$ με $y'(to) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Rightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \xRightarrow{x'(t_0) \neq 0} 1 = 3x^2(t_0) \Rightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \xRightarrow{x(t_0) > 0} x(t_0) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ και $y(t_0) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3$. Άρα το ζητούμενο σημείο το $M(\sqrt{\frac{1}{3}}, \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3)$ ή $M(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9})$

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x), x \in \mathbb{R}$

Είναι $h(x)$ περιττή διότι:

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-x)^3 \cdot g(x) = -x^3 g(x) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$

Άρα $I = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) d(x) = \int_{-1}^{1} h(x) d(x) = 0$ αφού $\mathrm{h}(x)$ είναι περιττή και τα άκρα ολοκλήρωσης είναι συμμετρικά ως προς $O(0,0)$.

Θέμα Δ

Δ1.

Για $x \in (0,1)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Όμοια f συνεχώς για $x \in (1,+\infty)$. Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο $x = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(\frac{lnx}{x}+1) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x}\cdot lnx+1\right) = 1\cdot0+1 = 1$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{lnx}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$. Άρα η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{lnx}{x}+1\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot lnx+1\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Δ2.

Για $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) = \left(\frac{lnx}{x}+1\right)' = \frac{1-lnx}{x^2} > 0$ αφού $lnx < 0$. Άρα $f'(x) \neq 0$ και η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(0,1)$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = \left(\frac{lnx}{x-1}\right)' = \frac{x-1-xlnx}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} < 0$ διότι

$g'(x) = (x-1-xlnx)' = 1-1-lnx = -lnx < 0$. Άρα g↓

$x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) \Rightarrow g(x) < 0$. Επίσης $x\cdot(x-1)^2 > 0$, για $x > 1$

Άρα $f'(x) < 0$. Η f δεν έχει κρίσιμα σημεία για $x > 1$.

Η f δεν παραγωγίζεται στο $x = 1$ διότι $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{lnx}{x}+1-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$ 1 και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{lnx}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{lnx-x+1}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο για $x = 1$.

Δ3.

i. Έχουμε τον πίνακα μονοτονίας της f.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x}+1\right) = -\infty$

Και $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{lnx}{x}+1\right) = 1$.

Άρα για $x \in (0,1)$ έχουμε $f((0,1)) = (-\infty,1)$. Είναι $0 \in (-\infty,1)$ άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_o \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$, ρίζα της $f(x)$.

Επίσης για $x \in [1,+\infty)$ έχουμε $f(1) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \frac{1}{x} = 0.$

Άρα $f([1,+\infty)) = (0,1]$ και $0 \notin (0,1]$. Επομένως η μοναδική ρίζα της $f(x)$ είναι στο $(0,1)$.

(Η μοναδικότητα προκύπτει από την μονοτονία της f).

ii. Είναι $E = \int_{xo}^{1}|f(x)|dx = \int_{xo}^{1}(\frac{lnx}{x}+1)dx$ διότι $f(x) \geq 0$ για $x \in [x_0,1]$, αφού

$x_0 \leq x \leq 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_o) \leq f(x) \leq f(1) \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$.

Άρα $E = \int_{xo}^{1}(\frac{ln^2x}{2}+x)'dx = \left[\frac{ln^2x}{2}+x\right]_{x_0}^{1} = \left(\frac{ln^2 1}{2}+1\right) - \left(\frac{ln^2x_0}{2}+x_0\right) = 1 - \frac{ln^2x_0}{2} - x_0$

Αλλά $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{lnx_o}{x_0} + 1 = 0 \Longrightarrow lnx_o = -x_o$

Επομένως $E = 1 - \frac{(-x_0)^2}{2} - x_o = \frac{2-{x_o}^2-2x_o}{2}$

Δ4.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[1, x]$ και $[x, x^2]$

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \epsilon (1, x)$ ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = f(\xi_1)$

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_2 \epsilon (x, x^2)$ ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x} = f(\xi_2)$

Ισχύει $\xi_1 < \xi_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\xi_1) > f(\xi_2) \Longrightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)} \overset{x>1}{\Longrightarrow}$

$x \cdot F(x) - x \cdot F(1) > F(x^2) - F(x) \Longrightarrow x \cdot F(x) + F(x) > x \cdot F(1) + F(x^2) \Longrightarrow$

$(x+1) \cdot F(x) > x \cdot F(1) + F(x^2)$

<u>Επιμέλεια</u>: Μακρίδης Ηλίας