ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194.

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 188.

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 259.

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho = 2$.

B2.

Ισχύει : $|z_1| = 2$ και $|z_2| = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 4$ και $z_2\overline{z_2} = 4$

α) $$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow w = \frac{2\frac{4}{\overline{z_1}}}{\frac{4}{\overline{z_2}}} + \frac{2\frac{4}{\overline{z_2}}}{\frac{4}{\overline{z_1}}} \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{8\overline{z_2}}{4\overline{z_1}} + \frac{8\overline{z_1}}{4\overline{z_2}} \Leftrightarrow w = \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} + \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow$$

$$w = \overline{w} \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

β) $$-4 \le w \le 4 \Leftrightarrow |w| \le 4,\ \ w \in \mathbb{R}$$

$$w = \frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_1 z_2} \Leftrightarrow w = 2\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} \Rightarrow$$

$$|w| = 2\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{|z_1||z_2|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z_1^2 + z_2^2|}{4} \Leftrightarrow$$

$$2|w| = |z_1^2 + z_2^2| \Rightarrow 2|w| \le |z_1|^2 + |z_2|^2 \Rightarrow$$

$$2|w| \le 4 + 4 \Leftrightarrow 2|w| \le 8 \Leftrightarrow |w| \le 4$$

$$-4 \le w \le 4$$

Β3. $w=-4 \qquad A(z_1) \qquad B(z_2) \qquad \Gamma(z_3)$

$$w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow$$

$$z_1=-z_2$$

$$(AB)=|z_1-z_2|=2|z_1|=4$$

$$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$$

$$(B\Gamma)=|z_3-z_2|=|2iz_1-z_2|=|z_1||2i+1|=2\sqrt{5}$$

Άρα $(A\Gamma)=(B\Gamma) \Rightarrow A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές.

Σχόλιο:

$$w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{w}=w$$

Πράγματι για $w=\alpha+\beta i$ έχουμε:

$$\overline{w}=w \Leftrightarrow \alpha-\beta i=\alpha+\beta i \Leftrightarrow 2\beta i=0 \Leftrightarrow \beta=0 \Leftrightarrow w=\alpha\in\mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2+1} \quad A=\mathbb{R}$$

$$f^{/}(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Η f είναι συνεχής στο 1 με $f^{/}(x)>0$ $(\text{για } x\neq 1)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=0$, διότι $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \text{και}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)^{/}}{\left(x^2+1\right)^{/}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)^{/}}{(2x)^{/}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

Οπότε $f(A)=(0,+\infty)$

Γ2.

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f(2)$$

$e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2$ (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε "1-1" στο $\mathbb{R}$)

$$\frac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow e^3\frac{x^2+1}{e^x}=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{f(x)}=2\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

$\frac{e^3}{2} \in f(A)$, οπότε από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε x_0 μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3.

$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \quad x > 0$

Παίρνω $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ στο $[2x, 4x]$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- Η F είναι συνεχής στο $[2x, 4x]$
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(2x, 4x)$
- Ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής
- Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε

$$\left.\begin{array}{l} F'(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{2x} \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{2x} \quad (1)$$

- $$\left.\begin{array}{l} 2x < \xi < 4x \\ f \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2x) < f(\xi) < f(4x) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(2x) < \frac{F(4x) - F(2x)}{2x} < f(4x) \Rightarrow$$

$$\left.\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt < f(4x) \cdot 2x \right\} \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x \cdot f(4x)$$

Γ4. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(4x)-F(2x)}{x} = \left(\text{με } F = \int_0^x f(t)dt\right)$$

$$\overset{\text{de } \ell\text{'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4f(4x)-f(2x)\cdot 2}{1} = 4f(0)-2f(0) = 2f(0) = 2$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Άρα, η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x}\left(4f(4x)-2f(2x)\right) =$$

$$= \frac{\left(2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt\right) + 2x\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x^2} > 0$$

Αφού:

$2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$ από Γ3 και

$2x < 4x \overset{f:\text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow 2xf(2x) < 2xf(4x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ αφού g συνεχής στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)'$, οι συναρτήσεις $e^{f(x)} - e^{-f(x)}$, $2x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$.

Για $x = 0$:

$$e^{f(x)} - e^{-f(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(0)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 2xe^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \neq 0$$

Η $e^{f(x)} - x$ είναι συνεχής, δεν μηδενίζεται, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$$

ή $e^{f(x)} - x = -\sqrt{x^2+1}$ → απορρίπτεται

$$\ln e^{f(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Δ2.

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- $$f''(x)=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	σ.κ.	$\searrow$

Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left(-\infty,0\right]$

Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left[0,+\infty\right)$

Η f παρουσιάζει καμπή στο $\left(0,f(0)\right)=\left(0,0\right)$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=1(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\left[0,+\infty\right)$, άρα η C_f στο $\left[0,+\infty\right)$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη $y=x$, άρα $f(x)<x$ για $x>0$.

$f(x)=x$ για $x=0$

Είναι $E=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=\int_0^1\left(x-f(x)\right)dx=$

$$=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 x' f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\left[xf(x)\right]_0^1-\int\ xf'(x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=σ$$

$$=\frac{1}{2}-f(1)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]\overset{\substack{f(x)>0\\ x>0\ \xrightarrow{f:\ \text{γν. αύξουσα}}\\ f(x)>f(0)\\ f(x)>0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot f(x)\ln f(x)\right]=l$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\underset{\text{Del'H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}=\frac{0\cdot 0}{1}=0$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\ln(f(x))\right]\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}u=f(0)=0}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0^+}(u\ln u)=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$$

Άρα, $l=0\cdot 0=0$

Δ4. Αν $g(x)=\int_0^{x-2} f(t^2)dt$ και $h(x)=\int_0^{x} f^2(t)dt$ είναι:

$g'(x)=f\left((x-2)^2\right)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$h'(x)=f^2(x)>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξω ότι η $Q(x)=(x-2)[1-3g(x)]+(x-3)[8-3h(x)]$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

- Η Q είναι συνεχής στο $[2,3]$ (πράξεις συνεχών)
- $Q(2)Q(3)=-[8-3h(2)][1-3g(3)]<0$ διότι στο $(0,+\infty)$ είναι $f(x)<x$

και $f(x)>0$ οπότε $f^2(x)<x^2$ και $f(x^2)<x^2$.

Έχουμε επίσης: $h(2)=\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2(t)dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$ και

$g(3)=\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]<\frac{1}{3}$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

<u>Επιμέλεια</u>: Γκαμπρανά Ευαγγελία
Κανακάκης Γιώργος
Μακρίδης Ηλίας
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος