ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (Σχολικό σελ. 186)

Α2. Θεωρία (Σχολικό σελ. 33)

Α3. Θεωρία (Σχολικό σελ. 161)

Α4. α) Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Λάθος, **ε)** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z=x+yi$ με εικόνα $M(x,y)$. Είναι $|z-3i|^2-18=|z-3|^2 \Leftrightarrow |x+yi-3i|^2-18=|x+yi-3|^2 \Leftrightarrow$

$$|x+(y-3)i|^2-18=|x-3+yi|^2 \Leftrightarrow \left(\cancel{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}\right)^{\cancel{2}}-18=\left(\cancel{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}\right)^{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-6y+9-18=x^2-6x+9+y^2 \Leftrightarrow x-y-3=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η ευθεία $(\varepsilon): x-y-3=0$

Β2.

Έστω $w=x+yi$ με εικόνα $N(x,y)$. Είναι $|w-i|=\mathrm{Im}(w)+1 \Leftrightarrow |x+yi-i|=y+1 \Leftrightarrow$

$$|x+(y-1)i|=y+1 \Leftrightarrow \left(\cancel{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\right)^{\cancel{2}}=(y+1)^2 \Leftrightarrow x^2+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{y^2}+2y+\cancel{1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων N είναι η παραβολή $(c): y=\frac{1}{4}x^2$

Β3.

Έστω $N(x_0,y_0)$ ή $N\left(x_0,\frac{1}{4}x_0^2\right)$ σημείο της παραβολής c.

Είναι $d(N,\varepsilon)=\dfrac{\left|x_0-\frac{1}{4}x_0^2-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(\frac{1}{2}x_0-1\right)^2+2\right|\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2}$

Άρα $|z-w|_{\min}=\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Είναι $f(x)=e^{x-1}-\ln x,\ x>0$ και $f'(x)=e^{x-1}\cdot(x-1)'-\frac{1}{x}=e^{x-1}-\frac{1}{x},\ x>0$ και $f''(x)=e^{x-1}\cdot(x-1)'+\frac{1}{x^2}=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}\ \ x>0$. Άρα $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, με $f'(1)=e^{1-1}-\frac{1}{1}=e^0-1=0$.

- $x<1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$
- $x>1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Έστω $\Delta_1=(0,1]$ και $\Delta_2=[1,+\infty)$. Είναι $f(\Delta_1)\overset{f\searrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$, διότι

- $f(1)=e^{1-1}-\ln 1=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=e^{-1}-(-\infty)=+\infty$ και f συνεχής στο Δ_1.

Επίσης $f(\Delta_2) \overset{f\searrow}{=} \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1,+\infty)$, διότι

- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\dfrac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right] = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{x-1}} \underset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\cdot e^{x-1}} = 0$ και f συνεχής στο Δ_2

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [1,+\infty)$

Γ2.

Έστω $h(t)=\sqrt{t^2-1}$. Το πεδίο ορισμού της είναι $t^2-1\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 1$ ή $t\le -1$.

Επειδή $1\in[1,+\infty)$ πρέπει και $h(x)\in[1,+\infty) \Leftrightarrow h(x)\ge 1 \Leftrightarrow f(x^2+1)-f(2)+1\ge 1 \Leftrightarrow$

$f(x^2+1)\ge f(2)$ και αφού $f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$ είναι $x^2+1\ge 2 \Leftrightarrow x^2\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 1$ ή $x\le 1$.

Άρα $A_g = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Γ3.

Είναι $f(1)=1$ και για $x<1 \overset{f\swarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>1$

για $x>1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση $x=1$.

Επομένως $f\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow f(x)-\dfrac{1}{2}=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$

Επειδή $\dfrac{3}{2}\in f(\Delta_1)$, f συνεχής στο Δ_1 και γνησίως φθίνουσα, από Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ ώστε $f(x_1)=\dfrac{3}{2}$.

Επειδή $\dfrac{3}{2}\in f(\Delta_2)$, f συνεχής στο Δ_1 και γνησίως αύξουσα, από Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ ώστε $f(x_2)=\dfrac{3}{2}$.

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Γ4.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι: $(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$.

Αλλά $M \in (\varepsilon) \Rightarrow \frac{3}{2} - f(\xi) = f'(\xi)\cdot(0-\xi) \Rightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) + \frac{3}{2} = 0$.

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) - f(x) + \frac{3}{2} = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(x_1, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x) + \frac{3}{2}$ με $x \in [x_1, 1]$. Είναι $g(x)$ συνεχής στο $[x_1, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και:

- $g(x_1) = x_1 \cdot f'(x_1) - f(x_1) + \frac{3}{2} = x_1 \cdot f'(x_1) < 0$, αφού $f(x_1) = \frac{3}{2}$ (ρίζα από Γ3.) και $0 < x_1 < 1 \Rightarrow f'(x_1) < 0$
- $g(1) = 1 \cdot \cancel{f'(1)} - f(1) + \frac{3}{2} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$, αφού $f'(1) = e^{1-1} - \frac{1}{1} = e^0 - 1 = 0$ και $f(1) = e^0 - \ln 1 = 1$

Άρα $g(x_1) \cdot g(1) < 0$ και από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (x_1, 1)$ ώστε $g(\xi) = 0$

Είναι $g'(x) = 1 \cdot \cancel{f'(x)} + x \cdot f''(x) - \cancel{f'(x)} = x \cdot f''(x) > 0$ αφού $f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$ και $x > 0$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα $x = \xi$ θα είναι μοναδική. Άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να περνάει από το $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1,\ x > 0 \Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow}$

$(x-1) \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (x-1) \cdot f'(x) + (x-1)' f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \left[(x-1) \cdot f(x)\right]' = (\ln x)' \Rightarrow$

$(x-1) \cdot f(x) = \ln x + c$.

Για $x = 1$ είναι: $\cancel{(1-1)}^{0} \cdot f(1) = \cancel{\ln 1}^{0} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $(x-1) \cdot f(x) = \ln x$

Για $x \neq 1$ έχουμε: $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αφού f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

- $$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x>0,\ x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

Δ2.

Θέτουμε $t=\dfrac{1}{u}\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^2}du$ και

t	$1/x$	1
u	x	1

Άρα

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{x}^{1}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{x}^{1}\frac{\frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}-1}}{\frac{1}{u}}\cdot\frac{1}{u^2}du=\int_{1}^{x}\frac{\frac{\ln 1-\ln u}{\frac{1-u}{u}}}{\frac{1}{u}}\cdot\frac{1}{u^2}du=$$

$$\int_{1}^{x}\frac{\frac{-u\cdot\ln u}{1-u}}{u}\cdot du=\int_{1}^{x}\frac{-\ln u}{1-u}\cdot du=\int_{1}^{x}\frac{\ln u}{u-1}\cdot du=\int_{1}^{x}f(u)\cdot du=\int_{1}^{x}f(t)\cdot dt$$

Δ3.

Είναι $g(x)=-\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt$ και από **Δ2.** έχουμε $g(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$

Άρα $g'(x)=f(x)$, $x>0$

Για $x\neq 1$ είναι $g''(x)=f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)'=\ldots=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

Για $x=1$ είναι $g''(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g'(x)-g'(1)}{x-1}=\ldots=-\dfrac{1}{2}$

α) Άρα $g''(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, & x>0,\ x\neq 1\\ -\dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

Έστω $h(x) = x - 1 - x \cdot \ln x,\ x > 0$ με $h'(x) = -\ln x,\ x > 0$

$h'(x) \geq 0 \Rightarrow -\ln x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ και $h(x) \nearrow$

$h'(x) \leq 0 \Rightarrow -\ln x \leq 0 \Rightarrow x \geq 1$ και $h(x) \swarrow$

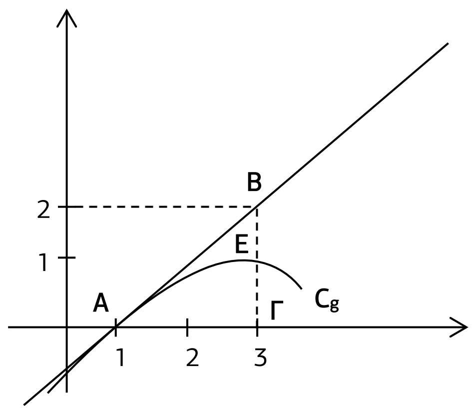
Για $x < 1 \overset{h(x)\nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$

Για $x > 1 \overset{h(x)\swarrow}{\Rightarrow} h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$

Άρα $g''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$

β) Η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, g(1))$ είναι $(\varepsilon): y - g(1) = g'(1)(x-1)$ ή $(\varepsilon): y = x - 1$ και τέμνει το xx' στο $A(1,0)$ και την ευθεία $x = 3$ στο $B(3,2)$. Επειδή η g είναι κοίλη θα είναι κάτω από την εφαπτομένη (ε). Αν E είναι το ζητούμενο εμβαδόν έχουμε

$$E < E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(\Gamma B) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 2.$$



Δ4.

Είναι $\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\cdot dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \geq \int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \Leftrightarrow$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} x\cdot f(t)\cdot dt - \int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x} (x-t)f(t)dt \geq 0 \quad (1)$$

Για $x = 1$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Για $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x}$

Όταν $x < t < \frac{1}{x}$ είναι $x - t \leq 0,\ f(t) > 0$

Άρα ισχύει η σχέση (1)

Για $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 < x$

Όταν $\frac{1}{x} \leq t \leq x$ είναι $x - t \geq 0,\ f(t) > 0$

Άρα ισχύει η σχέση (1)

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας