ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 15 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. α,

Α2. γ,

Α3. α,

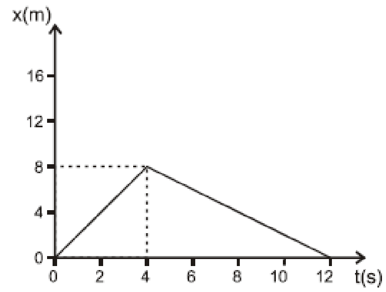
Α4. γ,

Α5.

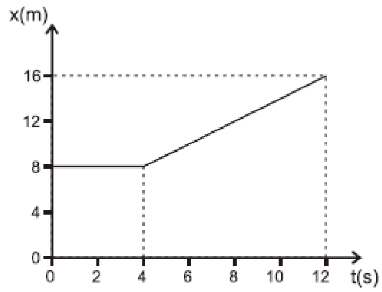
α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

Β1.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

α) Σωστή απάντηση είναι η (i).

β) Σύμφωνα με τις γραφικές παραστάσεις των σχημάτων 4 και 5, οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των μαζών «1» και «2» ακριβώς πριν την κρούση είναι ίσες με

$$\upsilon_1 = \frac{8-0}{4-0}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = +2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \upsilon_2 = 0$$

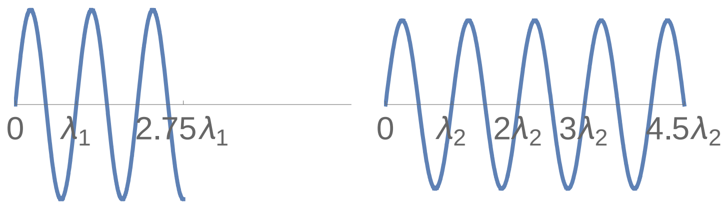
και ακριβώς μετά την κρούση ίσες με

$$\upsilon_1' = \frac{0-8}{12-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \upsilon_2' = \frac{16-8}{12-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = +1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Παρατηρούμε ότι $\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' = +1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, συνεπώς η κρούση είναι ελαστική.

Β2. **α)** Σωστή απάντηση είναι η (i).

β)



Στο σχήμα απεικονίζονται δύο στιγμιότυπα του στασίμου κύματος σε κάθε χορδή. Παρατηρούμε ότι το μήκος της πρώτης χορδής ισούται με $L_1 = 2.75\lambda_1$ και της δεύτερης με $L_2 = 4.5\lambda_2$ (εφ' όσον είναι γνωστό ότι η απόσταση δεσμού από κοιλία πάνω στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ισούται με $\lambda/4$).
Αλλά σύμφωνα με την εκφώνηση,

$$L_2 = 2L_1 \Longrightarrow 4.5\lambda_2 = 2\cdot 2.75\lambda_1 \Longrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{5.5}{4.5} = \frac{11}{9}.$$

Οι δύο χορδές αποτελούνται από το ίδιο υλικό, άρα σε αυτές οι ταχύτητες διάδοσης των κυμάτων που δημιούργησαν τα στάσιμα είναι ίσες. Σύμφωνα με την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής,

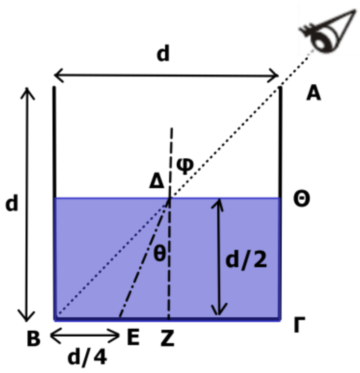
$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Longrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{11}{9}.$$

Β3. **α)** Σωστή απάντηση η (ii).

β) Σύμφωνα με τον νόμο του Snell, όταν το δοχείο είναι γεμάτο μέχρι την μέση με νερό (δες διπλανό σχήμα)

$$n_0 \cdot \text{ημ}(\varphi) = n\cdot \text{ημ}(\theta) \quad (1),$$

όπου φ η γωνία πρόσπτωσης στον αέρα, θ η γωνία διάθλασης στο υγρό, $n_0 = 1$ ο προσεγγιστικός συντελεστής διάθλασης του άερα και n ο συντελεστής διάθλασης του υγρού.



Αλλά σύμφωνα με την γεωμετρία του σχήματος, $(\widehat{\text{ΑΔΘ}}) = (\widehat{\text{ΘΔΑ}}) = (\widehat{\text{ΒΔΖ}}) = \varphi$, άρα

$$\text{ημ}(\varphi) = \frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΑ})} = \frac{d}{\sqrt{d^2+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \varphi = 45°,$$

$$\text{εφ}(\varphi) = \frac{(\text{ΒΖ})}{(\text{ΔΖ})} = 1 \Longrightarrow (\text{ΒΖ}) = (\text{ΔΖ}) = \frac{d}{2}$$

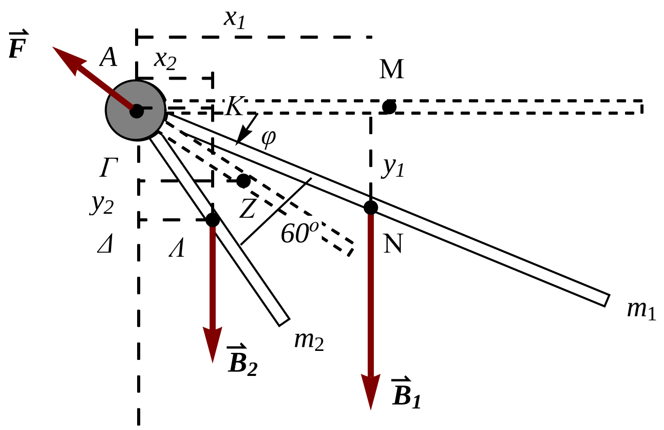
και

$$\text{ημ}(\theta) = \frac{(\text{ΕΖ})}{(\text{ΔΕ})} = \frac{(\text{ΒΖ})-(\text{ΒΕ})}{\sqrt{(\text{ΔΖ})^2+(\text{ΕΖ})^2}} = \frac{\frac{d}{2}-\frac{d}{4}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+\left(\frac{d}{2}-\frac{d}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Άρα

$$(1) \rightarrow n = \frac{\text{ημ}(\varphi)}{\text{ημ}(\theta)} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow n^2 = \frac{5}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ.



Αρχικά θα μελετήσουμε δυναμικά και ενεργειακά το σύστημα των δύο ραβδών κατά την κίνησή του από την αρχική θέση (στην οποία η ράβδος μήκους ℓ_1 είναι οριζόντια) έως μία τυχαία θέση στην οποία κάθε ράβδος σχηματίζει με την αρχική της θέση γωνία φ (δες σχήμα). Σύμφωνα με την γεωμετρία του σχήματος παρατηρούμε ότι:

Τρίγωνο ΑΜΝ: $y_1 = (MN) = \frac{\ell_1}{2}\text{ημ}(\varphi)$ και $x_1 = (AM) = \frac{\ell_1}{2}\text{συν}(\varphi)$

Τρίγωνο ΑΚΛ: $\widehat{KA\Lambda} = \frac{\pi}{3} + \varphi$, $(K\Lambda) = \frac{\ell_2}{2}\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ και
$x_2 = (AK) = \frac{\ell_2}{2}\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$.

Τρίγωνο ΑΓΖ: $\widehat{\Gamma A Z} = 30°$, $(A\Gamma) = \frac{\ell_2}{2}\text{συν}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell_2$

Άρα $y_2 = (\Gamma\Delta) = (A\Delta) - (A\Gamma) = (K\Lambda) - (A\Gamma) \Rightarrow y_2 = \left(\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\ell_2}{2}$.

Επίσης η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ραβδών ως προς τον άξονα περιστροφής του (ο κάθετος στην σελίδα άξονας ο οποίος διέρχεται από την άρθρωση Α), ισούται με

$$I = \frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2 = \frac{1}{3}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2) \quad (1).$$

Δυναμική μελέτη:

Στο σύστημα των δύο ραβδών ασκούνται οι κατακόρυφες δυνάμεις $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ του βάρους κάθε ράβδου καθώς και μία δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση (δες σχήμα 10). Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του συστήματος ως προς την άρθρωση Α, ήτοι

$$\sum \tau_A = I\alpha_\gamma \Rightarrow B_1x_1 + B_2x_2 = I\alpha_\gamma \Rightarrow$$
$$m_1g\frac{\ell_1}{2}\text{συν}(\varphi) + m_2g\frac{\ell_2}{2}\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right) = \frac{1}{3}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\alpha_\gamma \quad (2).$$

Ενεργειακή μελέτη:
Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος από την αρχική θέση (στην οποία η ράβδος μήκους ℓ_1 είναι οριζόντια) έως μία τυχαία θέση στην οποία κάθε ράβδος σχηματίζει με την αρχική της θέση γωνία φ (δες σχήμα 10). Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι έργο παράγουν μόνον οι συντηρητικές δυνάμεις του βάρους, έχουμε ότι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \sum W => \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = B_1 y_1 + B_2 y_2 =>$$
$$\frac{1}{6}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\omega^2 = m_1 g\frac{\ell_1}{2}\eta\mu(\varphi) + m_2 g\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\frac{\ell_2}{2} \quad (3).$$

Γ1. Όταν οι δύο ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα 8, έχουμε ότι $\varphi = 60°$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σύστημα αποκτά την μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα την στιγμή όπου μηδενίζεται η γωνιακή του επιτάχυνση α_γ. Άρα μέσω της (2) προκύπτει ότι

$$m_1 g\frac{\ell_1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) + m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 => m_1\ell_1\frac{1}{2} - m_2\ell_2\frac{1}{2} = 0 =$$
$$> m_1 = \frac{\ell_2}{\ell_1}m_2 =>$$
$$\boxed{\boldsymbol{m_1 = \frac{2}{4}\cdot 10\mathrm{Kg} = 5\mathrm{Kg}}}.$$

Γ2. Όταν η ράβδος μήκους ℓ_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση που φαίνεται στο σχήμα 9, παρατηρούμε ότι $\varphi = 90°$. Τότε θέλουμε να μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, άρα η σχέση (3) γράφεται ως

$$0 = m_1 g\frac{\ell_1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + m_2 g\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\frac{\ell_2}{2} =>$$
$$m_1\ell_1 + m_2\left(\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ell_2 = 0 =>$$
$$m_1\ell_1 + m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ell_2 = 0 => m_1 = -\frac{(1-\sqrt{3})\ell_2}{2\ell_1}m_2$$

ή αντικαθιστώντας

$$\boxed{\boldsymbol{m_1 \approx -\frac{(1-1.7)\cdot 2}{2\cdot 4}10\mathrm{Kg} \approx 1.75\mathrm{Kg}}}.$$

Γ3. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα (2) για $\varphi = 90°$ έχουμε ότι

$$\alpha_\gamma = \frac{m_1 g\frac{\ell_1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) + m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{3}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)} = \frac{0 - m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\frac{1}{3}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)} =>$$
$$\alpha_\gamma = -\frac{10\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{4}\cdot 16 + 10\cdot 4\right)}\frac{\mathrm{rad}}{\sec^2} => \boxed{\boldsymbol{\alpha_\gamma =\approx -3.75\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}^2}}}.$$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου μήκους ℓ_2 του ερωτήματος Γ2, στην θέση που απεικονίζεται στο σχήμα 9, ισούται με την συνολική ροπή που ασκείται στην ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής της. Άρα

$$\frac{dL_2}{dt} = \sum \tau_{2,A} = \tau_F + \tau_{B_2} = 0 - m_2 g \frac{\ell_2}{2} \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} m_2 g \ell_2$$

άρα

$$\frac{dL_2}{dt} = -\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2\text{Ntm} => \boxed{\boldsymbol{\frac{dL_2}{dt} = -50\text{Ntm}}}.$$

Διαφορετικά,

$$\frac{dL_2}{dt} = \sum \tau_{2,A} = I_2 \alpha_\gamma = \frac{1}{3} m_2 \ell_2^2 \alpha_\gamma = -\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3.75\text{Ntm} = -50\text{Ntm}.$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα m είναι αυτή του βάρους της $\vec{B} = m\vec{g}$, μία δύναμη από το ελατήριο ίση με $\vec{F} = -k\Delta\vec{\ell}$, όπου $\Delta\vec{\ell}$ η παραμόρφωση του ελατηρίου, και τέλος η τάση του νήματος $\vec{T}_1$.

Στην τροχαλία ασκούνται οι τάσεις του νήματος $\vec{T}_2$ και $\vec{T}_3$ καθώς και η δύναμη του βάρους της $\vec{B}' = M\vec{g}$. Όλες οι δυνάμεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την ισορροπία του υλικού σημείου m μέσω του νόμου του Νεύτωνα, ήτοι

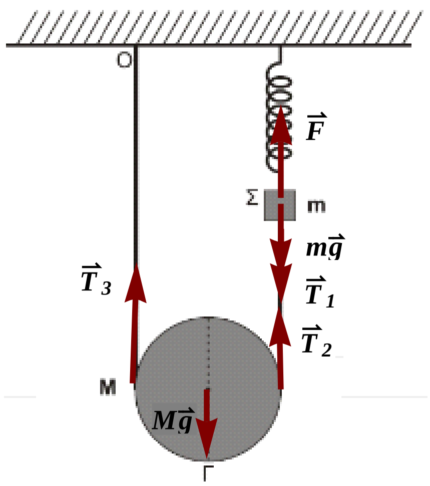
$$\sum F = 0 => F = mg + T_1 \quad (1).$$

Η τροχαλία επίσης ισορροπεί μεταφορικά, οπότε έχουμε ότι

$$\sum F = 0 => T_2 + T_3 = Mg \quad (2).$$

Η δε περιστροφική ισορροπία μελετάται μέσω του μηδενισμού της συνισταμένης ροπής ως προς το κέντρο μάζας της τροχαλίας, ήτοι

$$\sum \tau_{cm} = 0 => T_3 R = T_2 R => T_3 = T_2 \quad (3).$$

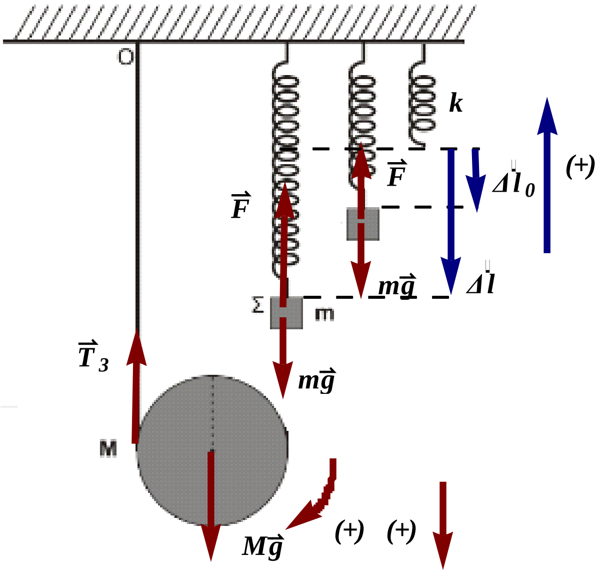


Το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) οδηγεί στον υπολογισμό της δύναμης του ελατηρίου, εφ' όσον $T_1 = T_2$, συγκεκριμένα

$$(2) \rightarrow 2T_1 = Mg => T_1 = \frac{1}{2} Mg,$$

$$(1) \rightarrow F = \left(m + \frac{1}{2}M\right) g = (1.44 + 0.8) \cdot 10\text{Nt} => \boxed{\boldsymbol{F = 22.4\text{Nt}}}.$$

Από την στιγμή που κόβεται το νήμα η τροχαλία εκτελεί μεταφορικά και περιστροφικά ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Οι δυνάμεις και οι θετικές φορές της κίνησης αποτυπώνονται στο παρακάτω σχήμα.



Δ2. Αρχικά θα μελετήσουμε την κίνηση της τροχαλίας μέσω των νόμων του Νεύτωνα:

$$\sum F = Ma_{cm} => Mg - T_3 = Ma_{cm} \quad (4),$$

$$\sum \tau_{cm} = Ia_\gamma => T_3 R = \frac{1}{2}MR^2 a_\gamma => T_3 = \frac{1}{2}MRa_\gamma \quad (5).$$

Εφ' όσον το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, τα σημεία Μ και Ο πρέπει να έχουν την ίδια ταχύτητα, άρα

$$\upsilon_M = \upsilon_O => \upsilon_{cm} - \omega R = 0 => \upsilon_{cm} = \omega R => \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R => a_{cm} = a_\gamma R \quad (6).$$

Μέσω των εξισώσεων (4), (5) και (6) θα υπολογίσουμε την μεταφορική επιτάχυνση της τροχαλίας:

$$(4) + (5) \rightarrow Mg = \frac{3}{2}Ma_{cm} => a_{cm} = \frac{2}{3}g.$$

Άρα οι εξισώσεις της μεταφορικής κίνησης της τροχαλίας είναι οι

$$\upsilon_{cm}(t) = a_{cm}t = \frac{2}{3}gt \quad (7), \qquad y_{cm}(t) = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = \frac{1}{3}gt^2 \quad (8).$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατακόρυφη μετατόπιση h της τροχαλίας την χρονική στιγμή όπου μηδενίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος Σ, για πρώτη φορά. Εφ' όσον το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση εκκινώντας από την ακραία του θέση, η ταχύτητά του μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά χρόνο

$$t' = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{1.44}{40}}\,\text{sec} = \pi\frac{3}{5\sqrt{10}}\,\text{sec} \approx \pi\frac{3}{5\pi}\,\text{sec} = \frac{3}{5}\,\text{sec}.$$

Άρα

$$h = y_{cm}(t') = \frac{1}{3}gt'^2 = \frac{1}{3}\cdot 10 \cdot \frac{9}{25}\,\text{m} => \boxed{\boldsymbol{h = \frac{90}{75}\,\text{m} = 1.2\text{m}}}.$$

Δ3. Η εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι της μορφής $y(t) = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, όπου A το πλάτος, ω η κυκλική συχνότητα και φ_0 η αρχική φάση.
Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με

$$A = \Delta\ell - \Delta\ell_0,$$

όπου $\Delta\ell$ και $\Delta\ell_0$ τα μέτρα της παραμόρφωσης του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και στην αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος αντίστοιχα. Αλλά στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει ότι

$$\sum F = 0 => F = mg => k\Delta\ell_0 = mg => \Delta\ell_0 = \frac{m}{k}g = \frac{1.44}{40}\cdot 10\mathrm{m} = 0.36\mathrm{m}.$$

Η παραμόρφωση στην θέση ισορροπίας του συστήματος υπολογίζεται μέσω της δύναμης του ελατηρίου του ερωτήματος Δ1,

$$F = k\Delta\ell => \Delta\ell = \frac{F}{k} = \frac{22.4}{40}\mathrm{m} = 0.56\mathrm{m}.$$

Άρα $A = \Delta\ell - \Delta\ell_0 = (0.56 - 0.36)\mathrm{m} = 0.2\mathrm{m}$.
Η αρχική φάση της ταλάντωσης υπολογίζεται, με την σειρά της, μέσω της εξίσωσης κίνησης την χρονική στιγμή μηδέν, ήτοι

$$y(0) = A\eta\mu(\varphi_0) => -A = A\eta\mu(\varphi_0) => \eta\mu(\varphi_0) = -1 => \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

Τέλος η γωνιακή συχνότητα ισούται με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{1.44}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}} = \frac{5\sqrt{10}}{3}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}} \approx \frac{5\pi}{3}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης με τον χρόνο στο S.I. είναι

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = 0.2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t + \frac{3\pi}{2}\right)}}.$$

Δ4. Το άκρο Γ έχει μεταφορική ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ και επιτρόχιο ταχύτητα $\vec{v}_\Gamma$, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα. Άρα

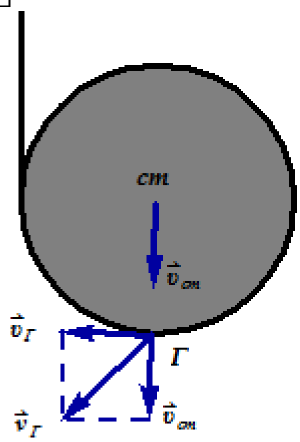
$$(7) \rightarrow v_{cm}(t') = \frac{2}{3}\cdot 10\cdot\frac{3}{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

και

$$v_\Gamma = \omega R = v_{cm}(t') = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Γ ισούται με

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_\Gamma^2} = \sqrt{2}v_{cm} => \boxed{\boldsymbol{v_\Gamma = 4\sqrt{2}\frac{m}{sec}}}.$$



Επιμέλεια: Στάθης Λεβέτας