ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

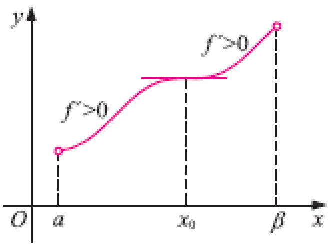
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

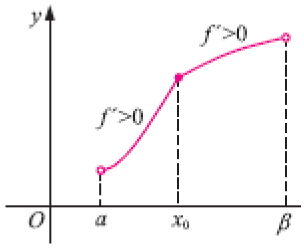
ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 99)

Απόδειξη :

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε



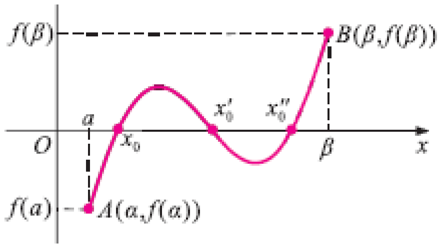


επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 74)



Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι **συνεχής** στο **κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει **ένα, τουλάχιστον** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει **μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης** $f(x) = 0$ στο **ανοικτό διάστημα** (α, β).

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ.185)

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

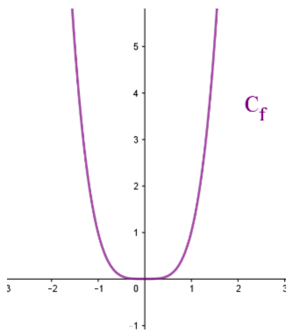
Α4.

α) Εκτός ύλης

β) Σ

γ) Λ Το σωστό είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$, όταν $0 < \alpha < 1$.

δ) Λ Η συνάρτηση $f(x) = x^4$, αν και είναι κυρτή στο R, εντούτοις έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f''(0) = 0$. Ισχύει, όμως, $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.



ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Εκτός ύλης

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{lnx}{x}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{lnx}{x}}$. Θέτοντας $u=\frac{lnx}{x}$, οπότε

$u_0=\lim\limits_{x\to 0^+} u=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(lnx\cdot\frac{1}{x}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$, προκύπτει

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{lnx}{x}}=\lim\limits_{u\to -\infty} e^{u}=0=f(0)$, άρα η είναι συνεχής στο 0.

Γ2. Για $x>0$ η f είναι συνεχής (άρα είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$) και παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=e^{\frac{lnx}{x}}\cdot\frac{1-lnx}{x^2}$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-lnx=0 \Leftrightarrow lnx=1 \Leftrightarrow x=e$.

Επίσης, είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-ln\,x>0 \Leftrightarrow ln\,x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$ και

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Αφού $f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<e$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=[0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta_1) = [\,f(0), f(e)] = [0, e^{\frac{1}{e}}]$. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta_2) = (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(e)]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{lnx}{x}}$. Θέτοντας $u = \frac{lnx}{x}$, οπότε

$$u_0 = \lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$ προκύπτει

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{lnx}{x}} = \lim\limits_{u\to0} e^u = e^0 = 1$. Έτσι, είναι $f(\Delta_2) = (\,1, e^{\frac{1}{e}}]$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, e^{\frac{1}{e}}]$.

Γ3.

i) Για $x > 0$ είναι $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{lnx}{x}} = e^{\frac{ln4}{4}} \Leftrightarrow \frac{lnx}{x} = \frac{ln4}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4lnx = \ 4ln4 \Leftrightarrow lnx^4 = ln4^x \Leftrightarrow x^4 = 4^x$.

ii) Οι αριθμοί $x_1 = 2 \in [0, e]$ και $x_2 = 4 \in [4, +\infty)$ επαληθεύουν την εξίσωση $x^4 = 4^x$, άρα και την ισοδύναμή της $f(x) = f(4)$ και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [e, +\infty)$, οι αριθμοί $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ είναι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης $f(x) = f(4)$.

Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (2,4)$, τέτοιος, ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $f'(x) \cdot \int_2^x f(t)\,dt - f(x) \cdot (\sqrt{2} - f(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) \cdot \int_2^x f(t)\,dt + f^2(x) - \sqrt{2} \cdot f(x) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x)\cdot\int_2^x f(t)\,dt-\sqrt{2}\cdot\int_2^x f(t)\,dt=(f(x)-\sqrt{2})\cdot\int_2^x f(t)\,dt$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[2,4]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,4)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε η $\int_2^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_2^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$). Είναι $g'(x)=f'(x)\cdot\int_2^x f(t)\,dt+\left(f(x)-\sqrt{2}\right)\cdot f(x)=$

$=f'(x)\cdot\int_2^x f(t)\,dt+f^2(x)-\sqrt{2}\cdot f(x)$.

Επίσης, είναι $g(2)=\left(f(2)-\sqrt{2}\right)\cdot\int_2^2 f(t)\,dt=0$ και

$g(4)=\left(f(4)-\sqrt{2}\right)\cdot\int_2^4 f(t)\,dt=0$, διότι $f(4)=e^{\frac{ln4}{4}}=(e^{ln4})^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[2,4]$, άρα υπάρχει υπάρχει αριθμός $\xi\in(2,4)$, τέτοιος, ώστε

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt+(f(\xi)-\sqrt{2})\cdot f(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt=f(\xi)\cdot(\sqrt{2}-f(\xi)).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση της παραγωγίσιμης f και της εκθετικής e^x. Η συνάρτηση $f^2(x)-2f(x)+3$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση της παραγωγίσιμης f και της πολυωνυμικής x^2-2x+3. Η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, οπότε όλες οι συναρτήσεις της σχέσης $e^{f(x)}\cdot(f^2(x)-2f(x)+3)=x$ είναι παραγωγίσιμες. Παραγωγίζουμε κατά μέλη την παραπάνω σχέση και έχουμε

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(f^2(x)-2f(x)+3)+e^{f(x)}\cdot\left(2f(x)f'(x)-2f'(x)\right)=1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot (f^2(x)+1) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} \cdot (f^2(x)+1)} > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Θα βρούμε την αντίστροφη της συνάρτησης f λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $f(x) = y$ (1) και $e^{f(x)} \cdot (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$ (2).

Είναι (2) $\Leftrightarrow e^y \cdot (y^2 - 2y + 3) = x$, άρα $f^{-1}(y) = e^y \cdot (y^2 - 2y + 3)$, $y \in R$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)$, $x \in R$.

Δ2. Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο εκθετικής και πολυωνυμικής με $(f^{-1})'(x) = \cdots = e^x \cdot (x^2 + 1)$.

Η συνάρτηση $(f^{-1})'(x) = e^x \cdot (x^2 + 1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο εκθετικής και πολυωνυμικής με $(f^{-1})''(x) = \cdots = e^x \cdot (x+1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση f^{-1} είναι κυρτή στο R, διότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο -1, όπου $(f^{-1})''(-1) = 0$.

Η C_f^{-1} τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $x = 0$ με $f^{-1}(0) = e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 3) = 3$.

Έτσι, η C_f^{-1} τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0,3)$.

Είναι $(f^{-1})'(0) = e^0 \cdot (0^2 + 1) = 1$.

Η εφαπτομένη της C_f^{-1} στο $M(0,3)$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon)\colon y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x + 3$.

Αφού η συνάρτηση f^{-1} είναι κυρτή στο R και η ευθεία $(\varepsilon)\colon y = x + 3$ είναι εφαπτομένη της C_f^{-1} στο $M(0,3)$ ισχύει

$f^{-1}(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) - x - 3 \geq 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε το εμβαδό μεταξύ της C_f^{-1}, της ευθείας (ε) και της ευθείας $(\zeta)\colon x = 1$ είναι $E(\Omega) =$

$\int_0^1 [e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) - x - 3]\, dx =$

$$= \int_0^1 e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)\, dx - \int_0^1 (x + 3)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (e^x)' \cdot (x^2 - 2x + 3)dx - [\frac{x^2}{2} + 3x]_0^1 =$$

$$= [e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (2x - 2)\, dx - \left(\frac{1}{2} + 3\right) =$$

$$= e \cdot (1^2 - 2 \cdot 1 + 3) - e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 3) - \int_0^1 (e^x)' \cdot (2x - 2)\, dx - \frac{7}{2} =$$

$$= 2e - 3 - [e^x \cdot (2x - 2)]_0^1 + \int_0^1 2e^x\, dx - \frac{7}{2} =$$

$$= 2e - 3 - [e \cdot (2 \cdot 1 - 2) - e^0 \cdot (2 \cdot 0 - 2)] + 2[e^x]_0^1 - \frac{7}{2} =$$

$= 2e - 3 - (0 + 2) + 2(e - 1) - \frac{7}{2} = 4e - \frac{21}{2}$ τετραγωνικές. μονάδες.

Δ3.

i) Η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο R με $(f^{-1})'(x) = e^x \cdot (x^2 + 1)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} \cdot (f^2(x)+1)}$.

Είναι $(f^{-1})'(x) \cdot f'\left(f^{-1}(x)\right) = e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{e^{f(f^{-1}(x))} \cdot \left(f^2\left(f^{-1}(x)\right)+1\right)} =$

$= e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{e^x \cdot (x^2+1)} = 1$, άρα το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των C_f^{-1} και C_f στα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ αντίστοιχα είναι ίσο με 1.

ii) Θεωρούμε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση

$d(x) = \sqrt{(f^{-1}(x) - x)^2 + (x - f^{-1}(x))^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2}|f^{-1}(x) - x|$.

Η συνάρτηση f^{-1} είναι κυρτή και έχει εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$, άρα ισχύει $f^{-1}(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - x \geq 3 > 0$, οπότε

$d(x) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x)$. Η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη στο R με

$d'(x) = \sqrt{2} \cdot [(f^{-1})'(x) - 1] = \sqrt{2} \cdot [e^x \cdot (x^2 + 1) - 1]$. Η συνάρτηση d' είναι παραγωγίσιμη στο R με $d''(x) = \sqrt{2} \cdot e^x \cdot (x + 1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση d' είναι γνησίως αύξουσα στο R, διότι η συνάρτηση d' είναι συνεχής στο -1, όπου $d''(-1) = 0$.

Είναι $d'(0) = \sqrt{2} \cdot [e^0 \cdot (0 + 1)^2 - 1] = 0$.

Επίσης, είναι $x < 0 \Rightarrow d'(x) < d'(0) \Rightarrow d'(x) < 0$ και $x > 0 \Rightarrow d'(x) > d'(0) \Rightarrow d'(x) > 0$.

Το πρόσημο της d' και η μονοτονία της d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	$3\sqrt{2}$ min	$\nearrow$	

Αφού $d'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, $d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, και η συνάρτηση d είναι συνεχής στο R, τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$. Η συνάρτηση d έχει ελάχιστο στο $x = 0$, το $d(0) = \sqrt{2} \cdot |f^{-1}(0) - 0| = 3\sqrt{2}$.

<u>Επιμέλεια</u>: Σάββας Νίκος