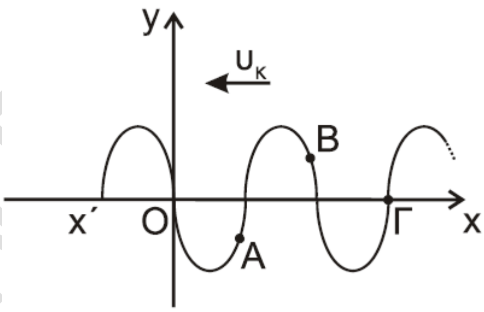
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 25 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Στις ημιτελείς προτάσεις Α1-Α4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση , η οποία τη συμπληρώνει σωστά

Α1. Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα $x'Ox$ τη χρονική στιγμή t_1. Για τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Α, Β και Γ ισχύει:



α. $\upsilon_A > 0,\ \upsilon_B > 0,\ \upsilon_\Gamma > 0$

β. $\upsilon_A < 0,\ \upsilon_B > 0,\ \upsilon_\Gamma > 0$

γ. $\upsilon_A > 0,\ \upsilon_B < 0,\ \upsilon_\Gamma > 0$

δ. $\upsilon_A < 0,\ \upsilon_B > 0,\ \upsilon_\Gamma < 0$

Α2. Μονοχρωματική δέσμη φωτός περνάει από τον αέρα στο γυαλί. Στην περίπτωση που η διαθλώμενη δέσμη διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με την προσπίπτουσα, τότε
α. η ταχύτητα της δέσμης στον αέρα είναι ίδια με την ταχύτητά της στο γυαλί
β. η γωνία πρόσπτωσης είναι 90°
γ. η γωνία διάθλασης είναι 0°
δ. η γωνία εκτροπής είναι 90°

Α3. Σφαίρα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 τετραπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση
α. η σφαίρα Σ_1 παραμένει ακίνητη
β. η σφαίρα Σ_1 συνεχίζει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση
γ. όλη η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μεταφέρθηκε στη σφαίρα Σ_2
δ. ισχύει $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$ όπου $\Delta\vec{p}_1,\ \Delta\vec{p}_2$ οι μεταβολές των ορμών των δύο σφαιρών.

Α4. Ένα μηχανικό στερεό περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα περιστροφής. Αν διπλασιαστεί η στροφορμή του στερεού, χωρίς να αλλάξει θέση ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο στρέφεται, τότε η κιντική του ενέργεια

α. παραμένει σταθερή

β. υποδιπλασιάζεται

γ. διπλασιάζεται

δ. τετραπλασιάζεται.

Α5.. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό , για τη σωστή πρόταση , και τη λέξη Λάθος , για τη λανθασμένη.

α. Τα ραντάρ δεν χρησιμοποιούν μικροκύματα

β. Εγκάρσια ονομάζονται τα κύματα στα οποία τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

γ. Το κύκλωμα επιλογής σταθμών στο ραδιόφωνο είναι ένα κύκλωμα L-C, που εξαναγκάζεται σε ηλεκτρική ταλάντωση από την κεραία

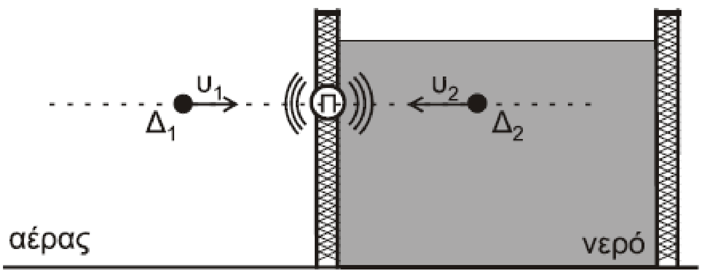
δ. Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν οι δυο δυνάμεις

ε. Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπτύσσουν τα χέρια τους και τα πόδια τους

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Πηγή Π ηχητικών κυμάτων εκπέμπει ήχο με συχνότητα f_s. Η πηγή, είναι στερεωμένη κατάλληλα σε κατακόρυφο τοίχωμα που διαχωρίζει την δεξαμενή του νερού από τον αέρα, έτσι ώστε τα ηχητικά κύματα που εκπέμπει να διαδίδονται στον αέρα και στο νερό. Δύο δέκτες $Δ_1$ και $Δ_2$ που βρίσκονται, ο πρώτος στον αέρα και ο δεύτερος στο νερό, στην ίδια ευθεία με την πηγή κινούνται προς την πηγή με ταχύτητες μέτρων υ_1 και υ_2, αντίστοιχα. Αν οι συχνότητες f_1 και f_2 που ανιχνεύουν οι δύο δέκτες είναι ίσες και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό υ_ν είναι τετραπλάσια της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον αέρα υ_a ($\upsilon_\nu = 4\upsilon_a$), ο λόγος των ταχυτήτων $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ είναι



i. $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{1}{3}$

ii. $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{1}{4}$

iii. $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{1}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

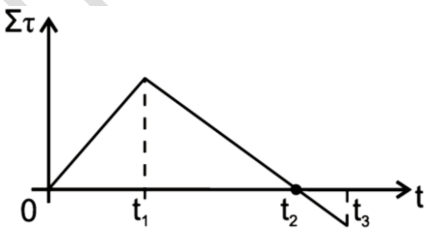
Απάντηση

Σωστή απάντηση η ii)

$$f_1=f_2 \rightarrow f_s\frac{\upsilon_a+\upsilon_1}{\upsilon_a}=f_s\frac{4\upsilon_a+\upsilon_2}{4\upsilon_a}\rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{1}{4}$$

B2.

Οριζόντιος, αρχικά ακίνητος, δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο δίσκο μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει τη μέγιστη τιμή της τη χρονική στιγμή



i. t_1

ii. t_2

iii. t_3

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Απάντηση

Σωστή απάντηση η ii)

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1

Η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων αυξάνεται , άρα αυξάνεται η γωνιακή επιτάχυνση και επομένως αυξάνεται και η γωνιακή ταχύτητα

Απο τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2

Η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων μειώνεται σε θετικές όμως τιμές , άρα μειώνεται μεν η γωνιακή επιτάχυνση αλλά επειδή έχει θετικές τιμές η γωνιακή ταχύτητα συνεχίζει να αυξάνεται

Μετά τη χρονική στιγμή t_3

Η συνισταμένη των ροπών αλλάζει φορά, οποτε αλλάζει φορά και η γωνιακή επιτάχυνση και επομένως μειώνεται η γωνιακή ταχύτητα

Β3. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού σε τέτοιες αποστάσεις από τις πηγές, ώστε τα κύματα να συμβάλλουν σε αυτό με χρονική διαφορά $\Delta t = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης των πηγών. Δεύτερο κομμάτι φελλού ίδιας μάζας με το προηγούμενο βρίσκεται στο μέσο Μ της απόστασης των πηγών $Π_1$ και $Π_2$. Αν $A_Σ$ και A_M είναι τα πλάτη ταλάντωσης των δύο κομματιών φελλού μετά τη συμβολή, τότε ο λόγος των ενεργειών τους $\frac{E_Σ}{E_M}$ είναι

i. $\frac{E_Σ}{E_M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\frac{E_Σ}{E_M} = \frac{1}{2}$

iii. $\frac{E_Σ}{E_M} = \frac{1}{4}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Απάντηση

Σωστή απάντηση η ii)

Οι διαφορές των αποστάσεων με τις οποίες τα δυο κύματα φτάνουν στα σημεία Σ και Μ δίνονται απο τις σχέσεις

$\Delta r_Σ = υ.\Delta t_Σ = υ\frac{T}{4} = λ/4$

και

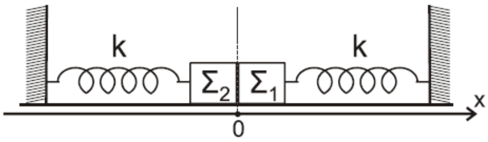
$\Delta r_M = 0$

Οπότε για το λόγο των ενεργειών

$$\frac{E_\Sigma}{E_M}=\frac{K_{\Sigma_{max}}}{K_{M_{max}}}=\frac{\frac{1}{2}.m.\omega^2.A_\Sigma^2}{\frac{1}{2}.m.\omega^2.A_M^2}=\frac{A_\Sigma^2}{A_M^2}=\left[\frac{2A.\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}.\frac{\lambda/4}{2}\right)}{2A}\right]^2=\sigma\upsilon\nu^2(\pi/4)=1/2$$

ΘΕΜΑ Γ.

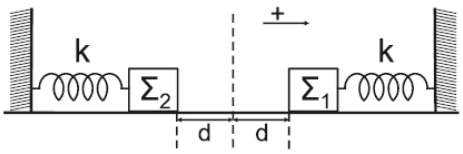
Τα σώματα Σ_1 και Σ_2, του σχήματος 4, με μάζες $m_1 = 1\mathrm{Kg}$ και $m_2 = 4\mathrm{Kg}$ αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και εφάπτονται μεταξύ τους. Τα σώματα είναι δεμένα στην άκρη δύο όμοιων ιδανικών ελατηρίων σταθεράς $k = 100\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{m}}$, που βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος και των οποίων η άλλη άκρη είναι σταθερά στερεωμένη.



Σχήμα 4

Μετακινούμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έτσι ώστε τα ελατήρια να συσπειρωθούν κατά $d = 0{,}2\mathrm{m}$ το καθένα (σχήμα 5) και στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνονται ελεύθερα να ταλαντωθούν.

Γ1. Να γράψετε τις εξισώσεις των απομακρύνσεων x_1 και x_2 των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 συναρτήσει του χρόνου. Ως θετική φορά ορίζεται η από το Σ_2 προς Σ_1 και ως $x = 0$ ορίζεται η θέση που εφάπτονται αρχικά τα σώματα στο σχήμα 4.



Σχήμα 5

Γ2. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κινούμενα με αντίθετη φορά συγκρούονται στη θέση $x = -{}^{d}/_{2}$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων τους ελάχιστα πριν από την κρούση.

Γ3. Η κρούση που ακολουθεί είναι πλαστική. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Γ4.

Απάντηση

Γ1. Σύμφωνα με το σχήμα 5, την χρονική στιγμή μηδέν οι αρχικές συνθήκες για κάθε σώμα είναι

$$\Sigma_1 : \begin{Bmatrix} x_1(0) = +d \\ \upsilon_1(0) = 0 \end{Bmatrix}, \qquad \Sigma_2 : \begin{Bmatrix} x_2(0) = -d \\ \upsilon_2(0) = 0 \end{Bmatrix}.$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης κάθε σώματος ισούται με $A_1 = A_2 = d = 0.2\mathrm{m}$ και οι αρχικές φάσεις προκύπτουν αντίστοιχα ίσες με $\varphi_1 = {}^{\pi}/_2$ και $\varphi_2 = {}^{3\pi}/_2$.

Τέλος οι κυκλικές συχνότητες της κίνησης κάθε σώματος υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}.$$

Βάσει των παραπάνω οι εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος λαμβάνουν στο S.I. την αναλυτική μορφή,

$$x_1(t) = A_1\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_1) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_1(t) = 0.2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}} \quad (1)$$

και

$$x_2(t) = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi_2) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_2(t) = 0.2\eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)}} \quad (2)$$

Γ2. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα (1) και (2) κάθε σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ως εκ τούτου διατηρεί την μηχανική του ενέργεια. Άρα στην θέση με απομάκρυνση $x_1 = x_2 = -{}^{d}/_2$ για κάθε ταλάντωση ισχύει ότι

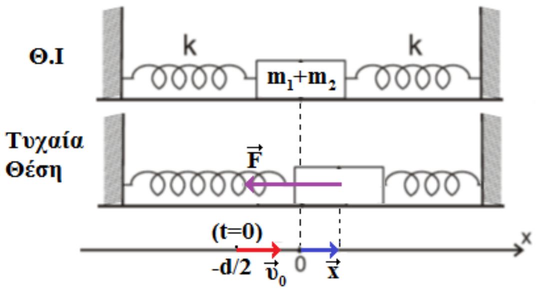
$$E_1 = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}k\frac{d^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{3}{4}\omega_1^2 d^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{3}{4}\cdot 100\cdot 4\cdot 10^{-2}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{3}\frac{m}{sec}}}.$$

Εργαζόμενοι αναλόγως για το δεύτερο σώμα έχουμε ότι το μέτρο της ταχύτητάς του ακριβώς πριν την κρούση ισούται με

$$\upsilon_2^2 = \frac{3}{4}\omega_2^2 d^2 = \frac{3}{4}\cdot 25\cdot 4\cdot 10^{-2}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\upsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{sec}}}.$$

Γ3. Αρχικά εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση των δύο μαζών ώστε να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας υ_0 του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση. Εφ' όσον τα σώματα ακριβώς πριν την κρούση κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, έχουμε ότι



$$m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1 = (m_2 + m_1)\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1}{m_2 + m_1} \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \sqrt{3}}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα δέχεται στον άξονα της κίνησης δυνάμεις από κάθε ελατήριο της μορφής, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -k\vec{x}$, όπου x η κοινή παραμόρφωση των ελατηρίων. Είναι προφανές ότι η συνολική δύναμη σε μία τυχαία θέση (δες σχήμα) ισούται με

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{2}} = -\mathbf{2}\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{x}}},$$

άρα το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας για $x = 0$ και σταθερά επαναφοράς $D = 2k = 200\,\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{m}}$.

Γ4. Οι αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

$$x(0) = -\frac{d}{2}, \qquad \upsilon(0) = +\upsilon_0.$$

Το πλάτος A της κίνησης υπολογίζεται μέσω της διατήρησης της ενέργειας, η οποία για την χρονική στιγμή μηδέν λαμβάνει την μορφή,

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}D\frac{d^2}{4} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}\upsilon_0^2 + \frac{d^2}{4}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{5}{200}\frac{3}{25} + 10^{-2}}\,\mathrm{m} = \sqrt{130} \cdot 10^{-2}\mathrm{m}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι εξ' ορισμού ίσος με την συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο, άρα για το συσσωμάτωμα,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -D\vec{x}.$$

Άρα το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος είναι ίσο με το αντίστοιχο μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς, ήτοι

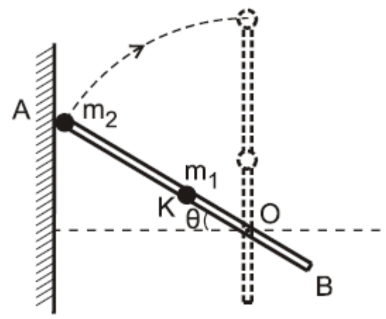
$$\boxed{\left.\frac{dp}{dt}\right|_{max} = DA = 2\sqrt{130}\text{Nt}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Λεπτή, άκαμπτη και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 1\text{m}$ και μάζας $M = 3\,\text{Kg}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο αυτής, είναι κάθετος στη ράβδο και απέχει από το άκρο της Β απόσταση $OB = d = \ell/4$.

Στο μέσον Κ της ράβδου και στο άκρο της Α στερεώνουμε δύο σφαιρίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, όπου $m_1 = m_2 = 1\text{Kg}$.

Δίνοντας κατάλληλη ώθηση το σύστημα περιστρέφεται και χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο με το άκρο Α, τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ, τέτοια ώστε $\eta\mu(\theta) = 0.83$ (**σχήμα 6**).



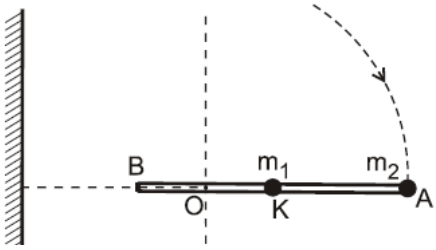
Σχήμα 6

Δ1. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του συστήματος ράβδου- σφαιριδίων αμέσως μετά την κρούση, ώστε αυτό να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση.

Δ3. Κατά την κρούση με τον τοίχο, το ποσοστό απωλειών της κινητικής ενέργειας είναι το 75% της κινητικής ενέργειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων πριν την κρούση. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κατά την κρούση.

Δ4. Όταν το σύστημα ράβδου- σφαιριδίων περνά από την οριζόντια θέση για πρώτη φορά, να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου m_2 ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο (**σχήμα 7**).



Σχήμα 7

Δίνονται:

- επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sec}^2}$,
- ροπή αδράνειας I_{cm} λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή
$$I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2.$$

Απάντηση

Δ1. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου –υλικών σημείων ως προς τον άξονα περιστροφής ο οποίος διέρχεται από το Ο υπολογίζεται από την σχέση

$$I_{o\lambda} = I_{\rho\alpha\beta} + I_1 + I_2,$$

όπου για την ράβδο σύμφωνα με το θεώρημα Steiner,

$$I_{\rho\alpha\beta} = I_{cm} + M(OK)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{16}\,M\ell^2 = \frac{7}{48}M\ell^2$$

και για τα υλικά σημεία

$$I_1 = m_1\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}m_1\ell^2, \qquad I_2 = m_2\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}m_2\ell^2.$$

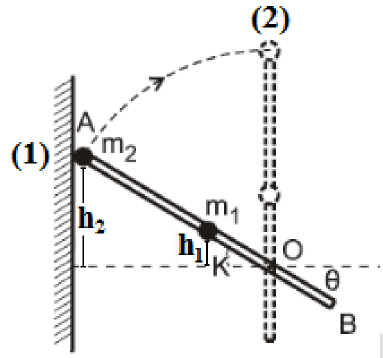
Άρα

$$I_{o\lambda} = \frac{7}{48}M\ell^2 + \frac{1}{16}m_1\ell^2 + \frac{9}{16}m_2\ell^2 \quad (1)$$

ή αντικαθιστώντας

$$I_{o\lambda} = \left(\frac{7}{48}\cdot 3 + \frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right)\mathrm{Kgm}^2 = \frac{21+3+27}{48}\mathrm{Kgm}^2 =$$
$$> \boxed{\boldsymbol{I_{o\lambda} = \frac{17}{16}\mathrm{Kgm}^2}}.$$

Δ2. Αμέσως μετά την κρούση της ράβδου με τον τοίχο, το σύστημα αναπηδά με γωνιακή ταχύτητα ω_2, θέση (1), τέτοια ώστε να εκτελείται οριακά ανακύκλωση. Άρα η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στην θέση (2) ισούται με το μηδέν.



Το σύστημα είναι συντηρητικό, οπότε στις θέσεις (10) και (2) η μηχανική ενέργεια είναι η ίδια. Επιλέγοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο Ο, έχουμε λοιπόν ότι

$$E_{(1)} = E_{(2)} => \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_2^2 + Mgh_1 + m_2gh_2 + m_1gh_1 = Mg\frac{\ell}{4} + m_2g\frac{3\ell}{4} + m_1g\frac{\ell}{4} =>$$

$$\frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_2^2 + Mg\frac{\ell}{4}\eta\mu(\theta) + m_2g\frac{3\ell}{4}\eta\mu(\theta) + m_1g\frac{\ell}{4}\eta\mu(\theta) = Mg\frac{\ell}{4} + m_2g\frac{3\ell}{4} + m_1g\frac{\ell}{4} =>$$

$$\omega_2^2 = \frac{2}{I_{o\lambda}}\left[Mg\frac{\ell}{4}(1-\eta\mu(\theta)) + m_2g\frac{3\ell}{4}(1-\eta\mu(\theta)) + m_1g\frac{\ell}{4}(1-\eta\mu(\theta))\right] =>$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{I_{o\lambda}}(M + m_1 + 3m_2)g\frac{\ell}{4}(1-\eta\mu(\theta))} \quad (2).$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 16}{17}\cdot 7\cdot 10\cdot\frac{1}{4}\cdot 0.17}\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} => \boxed{\boldsymbol{\omega_2 = \sqrt{5.6}\,\frac{rad}{sec}}}.$$

Δ3. Αν ακριβώς πριν την κρούση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ισούται με ω_1, τότε η αρχική στροφορμή έχει μέτρο $L_1 = I_{o\lambda}\omega_1$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κίνησης στο σημείο Ο και φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη (προς τα «έξω»). Η στροφορμή ακριβώς μετά την κρούση έχει μέτρο $L_2 = I_{o\lambda}\omega_2$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κίνησης στο σημείο Ο και φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα (προς τα «μέσα»). Αν εκλάβουμε την φορά του διανύσματος $\vec{L}_2$ ως θετική, τότε η μεταβολή της στροφορμής κατά την κρούση ισούται με

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 => \Delta L = L_2 - L_1 = I_{o\lambda}\omega_2 + I_{o\lambda}\omega_1 = I_{o\lambda}(\omega_2 + \omega_1) \quad (3).$$

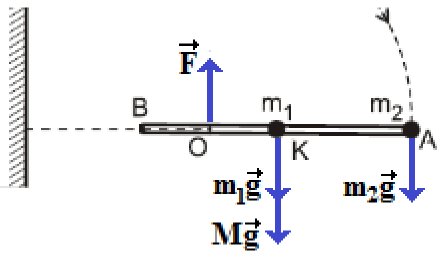
Γνωρίζουμε όμως ότι κατά την κρούση το 75% της αρχικής ενέργειας του συστήματος χάνεται άρα μετά την κρούση απομένει ενέργεια ίση με

$$K_2 = \frac{25}{100}K_1 => \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_2^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_1^2 => \omega_1^2 = 4\omega_2^2 => \omega_1 = 2\omega_2.$$

Μέσω του τελευταίου αποτελέσματος, η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση ισούται με

$$(3) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta L = 3I_{o\lambda}\omega_2 = \frac{51}{16}\sqrt{5.6}\mathrm{Kg}\frac{m^2}{sec}}}.$$

Δ4. Το υλικό σημείο μάζας m_2 εκτελεί περιστροφική κίνηση ακτίνας $r = 3\ell/_4$ με κέντρο το σημείο της άρθρωσης Ο. Ο δε ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του ισούται εξ' ορισμού με την συνολική ροπή που ασκείται πάνω του, ήτοι



$$\frac{dL_2}{dt} = \sum\tau_2 = I_2\alpha_\gamma = m_2r^2\alpha_\gamma \quad (4),$$

όπου α_γ η γωνιακή του επιτάχυνση.

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης στην οριζόντια θέση υπολογίζεται από την εφαρμογή του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα στο σύστημα, ήτοι

$$\sum\tau_O = I_{o\lambda}\alpha_\gamma => m_1g\frac{\ell}{4} + Mg\frac{\ell}{4} + m_2g\frac{3\ell}{4} = I_{o\lambda}\alpha_\gamma => \alpha_\gamma = \frac{m_1 + M + 3m_2}{4I_{o\lambda}}g\ell =>$$

$$\alpha_\gamma = \frac{7\cdot 16}{4\cdot 17}\cdot 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}^2} = \frac{280}{17}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}^2}.$$

Άρα

$$(4) \rightarrow \frac{dL_2}{dt} = \frac{9}{16}m_2\ell^2\alpha_\gamma = \frac{9}{16}\cdot\frac{280}{17}\mathrm{Kg}\frac{m^2}{sec^2} => \boxed{\boldsymbol{\frac{dL_2}{dt} = \frac{315}{34}\mathrm{Kg}\frac{m^2}{sec^2}}}.$$

Επιμέλεια: Λέλης Χρήστος