ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 99)

Απόδειξη:

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

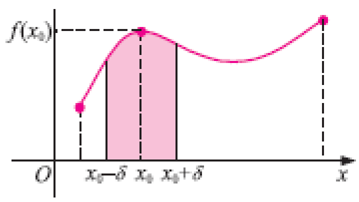
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right] = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_o} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Επομένως $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 142)

Θεώρημα (Fermat): Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.



Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ.143)

Τα **εσωτερικά** σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Α4.

α) Εκτός ύλης

β) Λ Αν για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Δ υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$, τα οποία έχουν ίδιες τεταγμένες, δηλαδή, $f(x_1) = f(x_2)$, η συνάρτηση δεν είναι $1-1$.

γ) Σ

δ) Λ Το σωστό είναι $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Εκτός ύλης

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) - 3x^2 = -f'(x) \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) + f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (x^2+1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) + f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow [(x^2+1) \cdot f(x) - x^3]' = 0$,

άρα υπάρχει αριθμός $c \in R$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει

$(x^2+1) \cdot f(x) - x^3 = c$. Για $x = 1$ είναι $2f(1) - 1 = c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$,

οπότε $(x^2+1) \cdot f(x) - x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \in R$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως ρητή με

$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \cdots = \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2}$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και για $x = 0$, όπου $f'(0) = 0$, η f είναι συνεχής, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο R, άρα η C_f δεν δέχεται κατακόρυφες ασύμπτωτες. Εξετάζουμε, τώρα, αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1$, οπότε $\lambda=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$, οπότε $\beta=0$.

Έτσι, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Αφού $5(x^2+1)^3-8\in R$ και $8(x^2+1)^2\in R$ για κάθε $x\in R$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο R η ανίσωση $f(5(x^2+1)^3-8)\le f(8(x^2+1)^2)$ γράφεται ισοδύναμα $5(x^2+1)^3-8\le 8(x^2+1)^2$. (1)

Θέτοντας $x^2+1=\omega$, η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $5\omega^3-8\omega^2-8\le 0$. (2)

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $\rho=2$ έχουμε

5	-8	0	-8	$\rho=2$
	10	4	8	
5	2	4	0	

Η ανίσωση (2) γράφεται $(\omega-2)(5\omega^2+2\omega+4)\le 0\Leftrightarrow \omega-2\le 0\Leftrightarrow \omega\le 2$, διότι $5\omega^2+2\omega-4>0$ για κάθε $\omega\in R$ $(\Delta<0)$.

Έτσι προκύπτει $x^2+1\le 2\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow |x|\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\cdot\int_0^{x^3-x}f(t)dt$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις και συνθέσεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο R, οπότε η $\int_0^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$ και η x^3-x είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική).

Είναι $g'(x) = \int_0^{x^3-x} f(t)dt + x \cdot f(x^3 - x) \cdot (3x^2 - 1)$.

Επίσης, είναι $g(0) = 0$ και $g(1) = 0$,άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει αριθμός $\xi \in (0,1)$, τέτοιος, ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt + \xi \cdot f(\xi^3 - \xi) \cdot (3\xi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi \cdot f(\xi^3 - \xi) \cdot (3\xi^2 - 1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο, η $\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις και συνθέσεις συνεχών, άρα η συνάρτηση $\int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη με

$\left(\int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt\right)' = \frac{(f'(x))^2-1}{f(x)}$, άρα είναι και συνεχής, οπότε η συνάρτηση

$\int_1^x (\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt) du$ είναι παραγωγίσιμη με

$\left(\int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt\right) du\right)' = \int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt$.

Είναι $f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt$ και $f''(x) = \frac{(f'(x))^2-1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2$.

Δ2. α) Αφού ισχύει $f'(x) \cdot f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα και στο $(0, +\infty)$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Είναι $f(1) = 1 + \int_1^1 \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)} dt\right) du = 1 + 0 = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επίσης, είναι $f'(x)\cdot f(x)\neq 0 \Leftrightarrow f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και η f' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα και στο $(0,+\infty)$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=1+\int_1^1\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt=1+0=1>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

β) Αφού η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και οι συναρτήσεις f', $(f')^2$ είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$. Επίσης, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Έτσι, προκύπτουν $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$,

$(\lim\limits_{x\to 0}f'(x))^2=(f'(0))^2$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

Είναι $f(x)\cdot f''(x)+1=(f'(x))^2$, οπότε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}f''(x)+1=(\lim\limits_{x\to 0}f'(x))^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\cdot f''(0)+1=(f'(0))^2\Leftrightarrow (f'(0))^2=1\Leftrightarrow f'(0)=1$, διότι η f' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(0)\geq 0$.

Δ3. α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f' και f με

$g'(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)\cdot f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}\overset{\Delta 1}{=}\frac{-1+(f'(x))^2-(f'(x))^2}{f^2(x)}=\frac{-1}{f^2(x)}$, άρα είναι

$g'(1)=\frac{-1}{f^2(1)}\overset{f(1)=1}{=}-1$. Επίσης, είναι $g(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}\overset{f'(1)=1}{=}1$. Η εφαπτομένη της C_g είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow y=2-x$ και αφού η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ ισχύει $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $g(x)\geq 2-x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}\geq 2-x\overset{f(x)>0}{=}f'(x)\geq(2-x)\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)-(2-x)\cdot f(x)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι, $\int_0^1[f'(x)-(2-x)\cdot f(x)]dx>0\Leftrightarrow\int_0^1 f'(x)\,dx>\int_0^1(2-x)\cdot f(x)\,dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx \Leftrightarrow f(1)-f(0) > \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx < 1.$$

Δ4. Έχουμε δείξει στο ερώτημα **Δ1** ότι είναι $f'(x) \geq 0$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $(f'(x))^3 \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$E = \int_0^1 (f'(x))^3\,dx = \int_0^1 (f'(x))^2 \cdot f'(x)\,dx =$$

$$= [(f'(x))^2 \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 2\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f(x)\,dx =$$

$$= (f'(1))^2 \cdot f(1) - (f'(0))^2 \cdot f(0) - 2\cdot \int_0^1 f'(x)\cdot f''(x)\cdot f(x)\,dx =$$

$$\overset{\Delta 1}{=} 1 - 0 - 2\int_0^1 f'(x)\cdot[(f'(x))^2 - 1]\,dx = 1 - 2\int_0^1 (f'(x))^3\,dx + 2\int_0^1 f'(x)\,dx =$$

$= 1 - 2E + 2\big(f(1) - f(0)\big) = 3 - 2E$, άρα $E = 3 - 2E \Leftrightarrow 3E = 3 \Leftrightarrow E = 1.$

Επιμέλεια: Σάββας Νίκος