ΘΕΤΙΚΟ φροντιστήριο
Α. Οικονομόπουλος – Κ. Ρούτης
Κάνιγγος 12, Πλ.Κάνιγγος
τηλ. 3824659,3830085
Internet: www.thetiko.gr

ΘΕΤΙΚΟ
Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ.253 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Βλέπε σελ.191 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Βλέπε σελ.258 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) → Σωστό
β) → Σωστό
γ) → Λάθος
δ) → Λάθος
ε) → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-1|^2+|z-1|^2=4$

$|w-5\overline{w}|=12$

$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow$

$2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

B2.

<u>α΄ τρόπος:</u>

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \ \ (1)$$

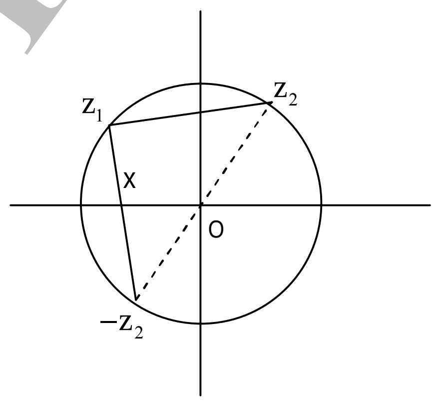
$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \overset{(1)}{=} 1 + 1 + 0 = 2$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

<u>β΄ τρόπος (γεωμετρικός):</u>

Αν $|z_1 + z_2| = x$ από τη γεωμετρική απεικόνιση των μιγαδικών έχουμε :



$$x^2 + |z_1 - z_2|^2 = (2R)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = 4 \Rightarrow$$

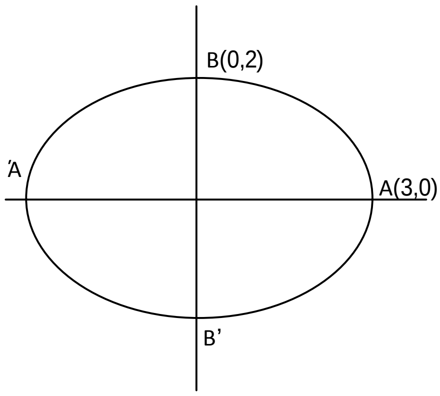
$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

B3.

<u>α΄ τρόπος:</u>

Έστω $w = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ $|w - 5\overline{w}| = 12 \Rightarrow$



$$\Rightarrow |x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Rightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$|w|_{\mu\varepsilon\gamma} = 3$$

$$|w|_{\varepsilon\lambda} = 2$$

$$2 \le |w| \le 3$$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

<u>β΄ τρόπος</u>:

$$\left|w-5\overline{w}\right|=12 \Rightarrow \left|w-5\overline{w}\right|^2=12^2 \Rightarrow \left(w-5\overline{w}\right)\left(w+5\overline{w}\right)=144 \Rightarrow$$

$$w\overline{w}-5w^2-5\overline{w}^2+25w\overline{w}=144 \Rightarrow 26|w|^2-5\left(w^2+\overline{w}^2\right)=144$$

$$26|w|^2-5\left(w+\overline{w}\right)^2+10w\overline{w}=144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36|w|^2-5\left(w+\overline{w}\right)^2=144 \overset{w=x+yi}{\Rightarrow} 36x^2+36y^2-20x^2=144$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=\frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \left(1\right)$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με εξίσωση την (1).

B4.

<u>α΄ τρόπος</u>:

Έχουμε $|z|=1$ και $|z-w| \le |z|+|w|=1+3=4\left(1\right)$

$|z-w| \ge \left||z|-|w|\right|=\left|1-|w|\right|\left(2\right)$

Έχω $|w| \ge 2 \Rightarrow -|w| \le -2 \Rightarrow 1-|w| \le 1-2 \Rightarrow 1-|w| \le -1 \Rightarrow$

$\left|1-|w|\right| \ge |-1| \Rightarrow \left|1-|w|\right| \ge 1\left(3\right)$

Άρα από τις (2), (3) έχουμε $|z-w| \ge 1$

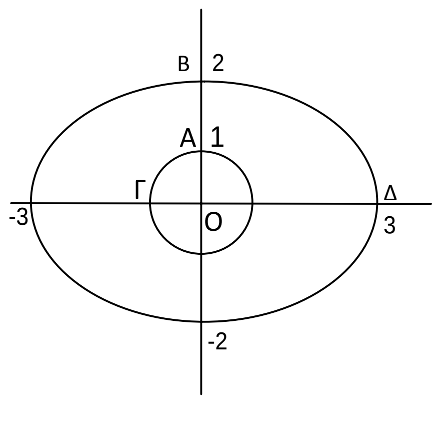
Και λόγω της (1) θα έχουμε τελικά $1 \le |z-w| \le 4$.

<u>β΄ τρόπος</u>:

Είναι $|z-w|_{min}=\left(AB\right)=2-1=1$ και

$|z-w|_{max}=\left(\Gamma\Delta\right)=3+1=4$

Άρα $1 \le |z-w| \le 4$



ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f με

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Η $f'(x) = 0$ για την προφανή ρίζα x=1 που

είναι και μοναδική γιατί $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ στο

$(0,+\infty)$ δηλαδή η $f'(x)$ γνησίως άυξουσα.

Οπότε για την f έχουμε:

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Γιατί $f'(e) = 1 + \frac{e-1}{e} > 0 \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 1 - e < 0$

Οπότε για $x \in (0,1]$ η f γνησίως φθίνουσα και στο $[1,+\infty)$ η f γνησίως αύξουσα:

Για το σύνολο τιμών της f :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty \\ f(1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty \end{array}\right\}$$ Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$.

Γ2. Η $x^{x-1} = e^{2013}$ (I) είναι ισοδύναμη με την:

$(x-1)\ln x = 2013 \Rightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Rightarrow f(x) = 2012$ που από το σύνολο τιμών της f ανά διάστημα μονοτονίας έχουμε ότι παίρνει την τιμή 2012 2 φορές ακριβώς μια για $x_1 \in (0,1)$ και μία για $x_2 \in (1,+\infty)$ άρα η (I) έχει 2 ακριβώς λύσεις θετικές.

Γ3. Έστω η $h(x) = e^x \cdot f(x) - e^x \cdot 2012$ στο $[x_1, x_2]$

- Η h(x) είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- Η h(x) παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2).
- $h(x_1) = e^{x_1}\left(f(x_1) - 2012\right) = 0 = h(x_2)$

Άρα από Θεώρημα Rolle για την h(x) στο $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι υπάρχει

$x_0 \in (x_1, x_2) : h'(x_0) = 0$ δηλαδή $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Γ4. Έχουμε από Γ1 ότι $f(x)\ge -1$ άρα $f(x)+1\ge 0$ δηλαδή $g(x)\ge 0$.

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Οπότε θέλουμε το:

$$E\left(C_g, xx', x=e, x=1\right)=\int_1^e \left(f(x)+1\right)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx$$

$$=\int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\int_1^e \frac{x^2-2x+1}{2x}dx$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}-x+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e=\frac{(e-1)^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{e^2-3}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\neq 0$ και συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για την $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$.

  Έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

  $$g'(x)=f\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+1\right)'-\frac{1}{e}\left(x-x^2\right)'=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\frac{1}{e}(1-2x)$$

- Επίσης $g(x)\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δηλαδή στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του $(0,+\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε, από Fermat

  προκύπτει ότι: $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)-\frac{1}{e}(-1)=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$,

  οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

- Για την $Q(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

  $$Q'(x)=\frac{\ln x-x}{f(x)}$$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

- Η $z(x)=\ln x - x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$z'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

$$z'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	0	1	$+\infty$
$z'(x)$	$+$	0	$-$
$z(x)$	↗	μ	↘

Στο 1 παρουσιάζει μέγιστο, άρα

$z(x)\le z(1) \Leftrightarrow z(x)\le -1$, άρα $z(x)<0$

- Οπότε $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - 1}{f(t)}dt + e > 0$ για κάθε $x>0$.

Τελικά $f(x)=\dfrac{\ln x - x}{\left(\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt+e\right)}$ που είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- Από τα παραπάνω $\dfrac{\ln x - x}{f(x)}=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt+e$.

Άρα : $\left(\dfrac{\ln x - x}{f(x)}\right)'=\left(\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt+e\right)'$

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x - x}{f(x)}$$

Άρα : $\dfrac{\ln x - x}{f(x)}=ce^x, c\in\mathbb{R}$

- Για x=1 $\dfrac{-1}{\frac{-1}{e}}=ce \Leftrightarrow c=1$ οπότε

$$\frac{\ln x - x}{f(x)}=e^x \Leftrightarrow e^x f(x)=(\ln x - x) \Rightarrow f(x)=e^{-x}(\ln x - x)$$

Δ2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\cdot \text{ημ}\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]$

$u=\dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{u}$ με $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}u=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=0$ και

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x}(\ln x - x)\right) = -\infty \,.$$

Τότε $\displaystyle \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2}-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u - u}{u^2}\underset{\text{de l'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

Δ3.

- $\ln x \le x-1, x>0$
- $F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x)$
- $f'(x)=\left(e^{-x}(\ln x - x)\right)' = e^{-x}(-1)(\ln x - x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)$

  $= e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x}-1\right)=e^{-x}\left((-\ln x + x -1)+\frac{1}{x}\right)>0$

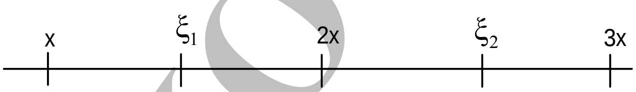
  Άρα $F''(x)>0 \Rightarrow F$ κυρτή.
- $x<2x<3x$

  Από Θ. Μ . Τ. έχουμε F συνεχής στα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$

  F παραγωγίσιμη στα $(x,2x)$ και $(2x,3x)$
- Θ.Μ.Τ.

  $\xi_1 \in (x,2x) \qquad F'(\xi_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{x}$

  $\xi_2 \in (2x,3x) \qquad F'(\xi_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{x}$



$$\xi_1<\xi_2 \overset{F'\nearrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1)<F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

- x>0

  $F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x) \Rightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x)$

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Δ4.

- $\xi \in (\beta, 2\beta)$
  $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$

- $h(x)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(x)$ με $F'(x)=f(x)<0$, οπότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

- $h(\beta)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(\beta)=F(3\beta)-F(\beta)\overset{\beta<3\beta}{<}0$
  $h(2\beta)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(2\beta)>0$ (λόγω του **Δ3**)

- $h(\beta)\cdot h(2\beta)<0$

- Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε:

  $h(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(\xi)=0 \Rightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$

  $h'(x)=-2F'(x)=-2f(x)>0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Επιμέλεια: Κανακάκης Γεώργιος
Μακρίδης Ηλίας
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος

ΘΕΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ