ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $w \in I \Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = \frac{1-z}{z+1}$

$$\Leftrightarrow (\overline{z}-1)(z+1) = (\overline{z}+1)(1-z) \Leftrightarrow \overline{z}z - z + \overline{z} - 1 = \overline{z}z + z - \overline{z} + 1 \Leftrightarrow 2\overline{z}z = 2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Β2. Έχουμε $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ (1)

Άρα $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z - \overline{z})^4 \overset{w=\alpha+\beta i}{=} (2\beta i)^4 = 16\beta^4 i^4 = 16\beta^4 \in \Re$.

Β3. Έχουμε $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ (2), $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ (3)

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} (\overline{z_1} + \overline{z_2})(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = 4$$

Β4. Έχουμε $w \in I \Leftrightarrow w = \beta i, \beta \in \Re$ και θεωρούμε $u = x + yi$, με $x, y \in \Re$.

Άρα $u - ui = \frac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x + yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i$

$$\Leftrightarrow (x+y)+i(y-x)=\frac{1}{\beta}-\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\beta} \\ y-x=-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\beta} \\ x-y=\beta \end{cases} \overset{(\cdot)}{\Leftrightarrow} x^2-y^2=1$$

Επομένως οι εικόνες του u βρίσκονται στην ισοσκελή υπερβολή $x^2-y^2=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $xf(x)=e^x-1 \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}(1)$.

Για x = 0 είναι $f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$.

Γ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Re^*$, ως ρητή, άρα και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}.$$

Θεωρούμε $g(x)=xe^x-e^x+1$. Προφανής ρίζα x=0 , g(0)=0.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\Re^*$,ως πράξη συνεχών, άρα και

παραγωγίσιμη με $g'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow xe^x=0 \Leftrightarrow x=0.$

Ο πίνακας μονοτονίας για την g είναι:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

Η g(x) παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $x=0, g(0)=0$ και g(x)> g(0) $\Leftrightarrow g(x)>0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα $f'(0)=\frac{1}{2}$ και $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} & ,\ \mathrm{x}\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & ,\ \mathrm{x=0}\end{cases}$

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow f(x)\uparrow$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\Re$, επομένως η f 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$$\left.\begin{array}{l}A_f=(-\infty,+\infty)\\ f\uparrow\end{array}\right\}f(A)=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x))=(0,+\infty)$$

Με $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,f(0))$,είναι:

(ε) : $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{2}x\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η f κυρτή στο }\Re\\ \eta\ \text{y=}\frac{1}{2}\text{x+1 εφαπτομένη της}\end{array}\right\}f(x)\geq y\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow 2f(x)\geq x+2(1)$$

Για την (1) το ΄΄ = ΄΄ ισχύει για x=0, που είναι η λύση της $2f(x)=x+2$

Γ4. $\lim_{x\to 0^+}[x\ln x\ln f(x)]=\lim_{x\to 0^+}[x\ln x]\lim_{x\to 0^+}[\ln f(x)](1)$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+}[x\ln x]\overset{0(+\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+}[\ln f(x)]\underset{u\to 1}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 1}\ln u=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2, x>0$ (1),

Έχουμε: $\left(2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x e^{f(t)}f(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2\right)'$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)}=-2f'(x)\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-2f'(x)e^{-f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)'=(2e^{-f(x)})' \text{ (2).}$$

Από συνέπειες ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$(1):\left.\begin{cases}1+\frac{1}{x}=2e^{-f(x)}+c\\ f(1)=0**\end{cases}\right\}\Leftrightarrow 2=2+c\Leftrightarrow c=0.$$

**Από την αρχική για x=1 : $2f(1)+2e^{f(1)}=2\Leftrightarrow f(1)+e^{f(1)}-1=0(3)$

Θεωρώ την $h(x)=e^x+x-1$, με προφανή ρίζα x=0, $h(0)=0$.

Επειδή η h είναι συνεχής στο $\Re$, ως πράξη συνεχών, άρα και παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^x+1>0$, άρα η h γνησίως αύξουσα, επομένως η x=0 μοναδική.

Άρα (3) : f(1)=0.

$$(2): x+\frac{1}{x}=2e^{-f(x)}\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=2\frac{1}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right), x>0$$

Δ2. Επειδή η F είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως συνάρτηση ολοκλήρωμα, άρα και παραγωγίσιμη με $F'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$,

Επειδή η F΄ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα και παραγωγίσιμη με

$$F''(x)=f'(x)=\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1}{2x}\cdot\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow F''(x)=\frac{(x+1)(1-x)}{x(x^2+1)}.$$

$F''(x)=0\Leftrightarrow\frac{(x+1)(1-x)}{x(x^2+1)}=0\Leftrightarrow x=1, x=-1$ που απορρίπτεται γιατί x>0

Ο πίνακας κυρτότητας για την F είναι:

	0	1	$+\infty$
F″	+	0	+
F			

Η F παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0=1 το F(1)= $\int_1^1 f(t)dt=0$ δηλ. A(1,0).

Εφαρμόζουμε ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ, για την συνάρτηση F στο [1,β].

Η F είναι συνεχής στο [1, β].

Η F είναι παραγωγίσιμη στο (1,β).

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(1)}{\beta-1}=\frac{F(\beta)}{\beta-1}=\lambda_\varepsilon.$$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο $M(\xi,F(\xi))$ είναι παράλληλη στην (ε). Όμως F΄΄(x)<0, στο [1,β], δηλαδή η F΄(x) γνησίως φθίνουσα στο [1,β]. Επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Δ3 $$\frac{F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0\Leftrightarrow$$

$(x-3)[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]+(x-1)(\beta-1)(x+1)^3=0$, για $x\in[1,3]$.

Θεωρούμε την $t(x)=(x-3)[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]+(x-1)(\beta-1)(x+1)^3$,
για την οποία εφαρμόζουμε ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO στο [1,3].

Η t είναι συνεχής στο [1,3] ως πράξη συνεχών.

$t(1) = -2[F(\beta) + (1-\beta) f(\beta)] \overset{*}{<} 0$

$* \ \xi \in (1,\beta) \Leftrightarrow 1 < \xi < \beta \overset{F'\downarrow}{\Leftrightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{F(\beta)}{\beta - 1} > f(\beta)$

$\Leftrightarrow F(\beta) + (1-\beta) f(\beta) > 0$.

$t(3) = 128(\beta - 1) > 0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,3)$, τέτοιο ώστε $t(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{F(\beta) + (1-\beta) f(\beta)}{x_1 - 1} + \frac{(\beta - 1)(x_1 + 1)^3}{x_1 - 3} = 0.$$

Δ4. $\int_x^2 f(\frac{t}{x}) dt \le \int_1^x t f(t) dt (1)$

Θέτω $\dfrac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = xu \Leftrightarrow dt = xdu$,

t	x	x^2
u	1	x

(1): $\int_1^x x f(u) du \le \int_1^x t f(t) dt \Leftrightarrow \int_1^x x f(u) du - \int_1^x t f(t) dt \le 0$

Θέτω h(x)= $\int_1^x x f(u) du - \int_1^x t f(t) dt$,x>0.

Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πράξη συνεχών συναρτήσεων, άρα και παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(\int_1^x x f(u) du - \int_1^x t f(t) dt\right)' =$

$\int_1^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = \int_1^x f(u) du = F(x)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επειδή $f(A) = (-\infty, 0] \Leftrightarrow f(x) \le 0$, με το $'='$ να ισχύει για x=1.

Αν $x \in (0,1) \Leftrightarrow x < 1$ και $f(x) < 0, \int_1^x f(u) du > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$

Αν $x > 1$ και $f(x) < 0, \int_1^x f(u) du < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$

Ο πίνακας μονοτονίας της h είναι:

x	0	1	$+\infty$
h'	+	0	−
h	↗		↘

Η h παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$ το $h(1)=0$, δηλ. Α(1,0).

Ισχύει $h(x)\le h(1) \Leftrightarrow \int_1^x xf(t)dt-\int_1^x tf(t)dt \le 0 \Leftrightarrow \int_1^x xf(t)dt \le \int_1^x tf(t)dt$.

<u>Επιμέλεια</u>: Κατέχος Γεώργιος