<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|\mathrm{z}-3\mathrm{i}|+|\overline{\mathrm{z}}+3\mathrm{i}|=2 \quad (1)$

Όμως $|\overline{\mathrm{z}}+3\mathrm{i}|=\left|\overline{\overline{\mathrm{z}}+3\mathrm{i}}\right|=|\mathrm{z}-3\mathrm{i}| \quad (2)$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|\mathrm{z}-3\mathrm{i}|+|\mathrm{z}-3\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow 2|\mathrm{z}-3\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow |\mathrm{z}-3\mathrm{i}|=1 \quad (3).$

Αν z = x + yi η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα ρ = 1.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\overline{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)\in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $\mathrm{x}^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \mathrm{x} \le 1$.

Και επειδή $\mathrm{x}=\mathrm{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$.

Οπότε: $-2 \le 2\,\mathrm{Re}(z) \le 2$. Άρα $-2 \le w \le 2$.

Β4. Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\overline{z}-3i|=|-\overline{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)'\cdot f'(x)+e^x\cdot f''(x)-(e^x)'=(x\cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$
$$(e^x\cdot f'(x)-e^x)'=(x\cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x\cdot f'(x)-e^x=x\cdot f'(x)+c_1,\ c_1\in R$$

Για x = 0 προκύπτει:

$e^0\cdot f'(0)-e^0=0\cdot f'(0)+c_1$ και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι

$c_1=-1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x\cdot f'(x)-e^x=x\cdot f'(x)-1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln(e^x-x)\right]' \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+c_2.$$

Για x = 0 προκύπτει $c_2=0$.

Έτσι $f(x)=\ln(e^x-x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x)=e^x-x,\ x\in R$, είναι:

$h'(x)=e^x-1,\ x\in R$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0.$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0.$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h′	−	0	+
h	↘	1	↗

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση x=0 την τιμή $h(0)=e^0-0=1$.

Δηλαδή $h(x)\geq 1>0$, για κάθε $x\in R$.

Γ2. Είναι $f'(x)=\left[\ln(e^x-x)\right]'=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού. $h'(x)=e^x-1$.

Συνεπώς $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x = 0 την τιμή $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$.

Γ3. Είναι: $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{\left(e^x - 1\right)'\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - x\right)'}{\left(e^x - x\right)^2} =$

$$= \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)^2}{\left(e^x - x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1,\ x \in R$.

Είναι:

$\varphi'(x) = -e^x + (2 - x) \cdot e^x = e^x(1 - x)$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Φ΄	+	0	−
Φ	↗	e − 1	↘

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[(2 - x) \cdot e^x - 1\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}(2 - x) \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{(2 - x)'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

Έτσι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$.

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\big((-\infty,1]\big)=\Big(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(1)\Big]=(-1,e-1].$$

$$\varphi\big([1,+\infty)\big)=\Big(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\Big]=(-\infty,e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0\in\varphi\big((-\infty,1]\big)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x<x_1$ είναι $\varphi(x)<\varphi(x_1)\Leftrightarrow\varphi(x_1)<0$

  Ενώ με $1>x>x_1$ είναι $\varphi(x)>\varphi(x_1)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in R$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0\in\varphi\big([1,+\infty]\big)$ άρα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2)=0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

  Διότι με $1<x<x_2$ είναι $\varphi(x)>\varphi(x_2)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$

  Ενώ με $x>x_2$ είναι $\varphi(x)<\varphi(x_2)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$.

  Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}\,x=f(x)-\text{συν}\,x,\ x\in R$.

- Ύπαρξη : Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\text{συν}(0)=-1<0$

  $$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

  Έτσι $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0,+\infty)$

$\sigma\upsilon\nu\, x_1 > \sigma\upsilon\nu\, x_2$ διότι $\sigma\upsilon\nu\, x \downarrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\sigma\upsilon\nu\, x_1 < -\sigma\upsilon\nu\, x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \sigma\upsilon\nu\, x_1 < f(x_2) - \sigma\upsilon\nu\, x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Παρατήρηση (2^{ος} τρόπος για τη μονοτονία):</u>

Η μονοτονία της g στο [0, π/2] μπορεί να προκύψει και ως εξής:

g΄(x) = f΄(x) + ημx. Όμως f΄(x) > 0, για κάθε x ∈ (0, +∞) άρα και για κάθε x ∈ (0, π/2), ενώ επίσης ημx > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2).

Άρα g΄(x) > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2) και επομένως g γνησίως αύξουσα στο [0, π/2].

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,\mathrm{dt}$$

Θέτουμε: x + t = u ⇔ t = u – x. Οπότε: dt = du.

Ακόμη για t = 0 έχουμε u = x και για t = – x έχουμε u = 0.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\mathrm{du} = \int_x^0 e^{-2x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} = e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x}e^{-2x}\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$$

Άρα $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du} \quad (1)$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\text{du} \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο [0, x] με x $\in$ R συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du}$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\text{du}$ είναι παραγωγίσιμες στο R, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R.

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

οπότε $f'(x)g(x) = e^{2x}$ και $g'(x)f(x) = e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)} = c$

και επειδή $f(0) = g(0) \overset{(1)\&(2)}{=} 1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x) = g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \quad \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(e^{2x}\right)'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$f^2(x) = e^{2x} + c$

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $c = 0$.

Άρα $f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^2 = \left[e^x\right]^2 \Leftrightarrow |f(x)| = e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\ L'Hospital)\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty.$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x}=y$ οπότε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y}:\frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F\uparrow$ στο $[0,1]$.

Άρα για $0\le x\le 1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le 0$ $\forall\, x\in[0,1]$.

Επομένως $\forall\, x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)'\mathrm{dx}=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{dx}=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$