ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 225

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 303

Α3. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $|z-i|=1+\mathrm{Im}(z)\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}|x+yi-i|=1+y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1+y$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(1+y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=1+2y+y^2\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{4}=y^2$.

Β2. Έχουμε $w(\overline{w}+3i)=i(3\overline{w}+i)\Leftrightarrow w\overline{w}+3wi=3\overline{w}i-1\Leftrightarrow|w|^2+3i(w-\overline{w})+1=0$

$\overset{w=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow}\alpha^2+\beta^2+3\cdot2\beta i\cdot i+1=0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-6\beta+1=0$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Β3. Τα κοινά σημεία είναι

$$\begin{cases}x^2=4y(1)\\ y^2+x^2-6y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow 4y+y^2-6y+1=0\Leftrightarrow y^2-2y+1=0\Leftrightarrow y=1.$$

Και από την (1) $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$, δηλαδή τα σημεία Α(2,1) και Β(-2,1).

Β4. Έχουμε ότι (ΚΑ)=(ΚΒ)= $\rho=2\sqrt{2}$ τότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

Επίσης $\left.\begin{cases}(AB)^2=\sqrt{(2+2)^2+(1-1)^2}=16\\ (KA)^2+(KB)^2=8+8=16\end{cases}\right\}\overset{\Pi.\Theta.}{\Leftrightarrow}$ ΑΚΒ ορθογώνιο.

Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου.

Άρα το Μ μέσο της διαγωνίου ΑΒ με

$\left.\begin{cases}x_M=\dfrac{2-2}{2}=0\\ y_M=\dfrac{1+1}{2}=1\end{cases}\right\}\Leftrightarrow$ Μ(0,1) και το Μ μέσο της ΚΛ άρα

$\left.\begin{cases}2x_\Lambda=0\\ 2y_\Lambda=-2\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Lambda=0\\ y_\Lambda=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ Λ(0,-1) δηλαδή u=-i.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $x'(t)=16\Leftrightarrow x'(t)=(16t)'\underset{\Theta.M.T}{\overset{A\pi\acute{o}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\varepsilon\varsigma}{\Longleftrightarrow}}x(t)=16t+c$ (1), για $t\geq 0$.

Για x = 0 είναι $x(0)=0\Leftrightarrow\overset{A\pi\acute{o}\ (1)}{\Longleftrightarrow}0=16\cdot 0+c\Leftrightarrow c=0$ άρα $x(t)=16t$, για $t\geq 0$.

Γ2. Θεωρούμε $f(x)=\sqrt{x}$, με $A_f=[0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, ως ριζικό, άρα και παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x>0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,είναι:

(ε) : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)\underset{x=0,y=1}{\overset{\Pi(0,1)\in(\varepsilon)}{\Longleftrightarrow}}$

$1-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0)\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0}-2x_0=-x_0\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0}=x_0\Leftrightarrow 4x_0=x_0^{\,2}\Leftrightarrow$

$x_0^{\,2}-4x_0=0\Leftrightarrow x_0(x_0-4)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=4$.Η τιμή $x_0=0$ απορρίπτεται.

Για $x_0=4$, $y=f(4)=\sqrt{4}=2$, με Α(4,2).

Επίσης $x(t_0)=4\Leftrightarrow 16t_0=4\Leftrightarrow t_0=\dfrac{1}{4}\min$.

Δηλαδή έχει οπτική επαφή για 15sec.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(4,2),είναι:

(ε) : $y-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-1$.

Για το εμβαδόν :

Επειδή $y>f(x)$ (από γραφική παράσταση), έχουμε :

$$\mathrm{E}=\int_0^4[y-f(x)]dx=\int_0^4[\frac{1}{4}x-1-x^{\frac{1}{2}}]dx\overset{\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}}{=}\left[\frac{x^2}{8}-x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=2+4-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}m^2.$$

Γ4. Το Μ(x,y): $\in C_f\Rightarrow M(x,f(x))\Rightarrow M(x,\sqrt{x})\Rightarrow M(16t,4\sqrt{t})$.

Η απόσταση (ΠΜ) = $d(t)=\sqrt{(16t-0)^2+(4\sqrt{t}-1)^2}=\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}$.

Επειδή η d είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, ως ριζικό, άρα και παραγωγίσιμη με

$$d'(t)=\frac{(256t^2+16t-8\sqrt{t}+1)'}{2\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}\Leftrightarrow d'(t)=\frac{256t+8-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}\ (1).$$

Θεωρώ την $h(t)=256t+8-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$, με $\mathrm{A}_h=(0,+\infty)$

Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πράξη συνεχών συναρτήσεων, άρα και παραγωγίσιμη με $h'(t)=\left(256t+8-\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)'=256+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}>0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα για $t>0$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h.

$$\left.\begin{array}{l}A_f=\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\\ h(t)\uparrow\end{array}\right\}h(A)=\left(\lim_{t\to0^+}h(t),h\left(\frac{1}{4}\right)\right]=(-\infty,68]$$

Γιατί $\lim\limits_{t\to0^+}h(t)=\lim\limits_{t\to0^+}256t+8-\dfrac{2}{\sqrt{t}}=-\infty$ και $h\left(\dfrac{1}{4}\right)=68$.

Επομένως $\left.\begin{array}{l}0\in h(A)=(-\infty,68]\\ h(t)\uparrow\end{array}\right\}$ άρα η συνάρτηση h έχει ακριβώς μία ρίζα $t_0\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μονοτονίας για την d(t) είναι:

t	0	t_0	$+\infty$
$d'(t)$	$-$	0	$+$
$d(t)$	↘		↗

Η d(t) γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,\,t_0]$.

Η d(t) γνησίως αύξουσα στο $[t_0\,,\,+\infty)$.

Η d(t) παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο χρονικό διάστημα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,0)$, είναι:

(ε) : $y - f(0) = f'(0)(x-0)(1)$

Επειδή η f είναι συνεχής

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{f(x)}{x} = = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0[1+f(0)] = 0$. Άρα f(0)=0.

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$. Άρα $f'(0)=1$.

Επομένως από την (1) η (ε) : y = x.

Δ2. Εφαρμόζουμε ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ, για την συνάρτηση f στο [0, 1].

Η f είναι συνεχής στο [0, 1].

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1).

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(1) - f(0)(1)$.

Όμως $f'(0) < f(1) - f(0)(2)$. Άρα από (1), (2) : $f'(0) < f'(\xi_1)$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Η f γνησίως μονότονη} \\ 0 < \xi_1 \\ f'(0) < f'(\xi_1) \end{array}\right\}$ η f΄ γνησίως αύξουσα στο $\Re$, η f κυρτή στο $\Re$.

Δ3 $\left.\begin{array}{l}\text{Η f κυρτή στο } \Re \\ \eta \text{ y=x εφαπτομένη της}\end{array}\right\} f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x)-x \geq 0 (1)$

Όμως $g(x)=f(x)-x \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$ με το ΄=΄ να ισχύει για x=0.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο Ο(0,0).

Δ4. Η $g(x) \geq 0$, με το ΄=΄ να ισχύει για x=0.

$$\int_0^2 g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)-xdx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 xdx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx > \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx > 2.$$

Δ5. Η $g(x) \geq 0$, επομένως

$$E=\int_0^1 g(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 [f(x)-x]dx = e-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xdx = e-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = e-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = e-2. (1)$$

Θεωρούμε την $h(x)=\int_0^x f(t)dt-2$, για την οποία εφαρμόζουμε

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO στο [1,2].

Η h είναι συνεχής στο [1,2] ως πράξη συνεχών.

$$h(1)=\int_0^1 f(t)dt-2 \overset{(1)}{=} e-2-2=e-4<0$$

$h(2)=\int_0^2 f(t)dt-2>0$, σύμφωνα με το Δ4.

Άρα ισχύουν οι προυποθέσεις του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t)dt-2=0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t)dt=2.$$

<u>Επιμέλεια</u>: Κατέχος Γεώργιος