

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ισχύει  $f'(x)=0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**Μονάδες 2**

γ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

**Μονάδες 2**

δ. Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

ε. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 9**

**β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_0 = 1 - i$  έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

**Μονάδες 8**

- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί  $w$  οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου  $z_0$  ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

- A.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$

**Μονάδες 8**

- B.** Για  $\alpha = e$ ,

**α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

**β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**γ.** αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 2]$  για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 2)$  και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\alpha \in (0, 2)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $H(\alpha) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (0, \alpha)$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**