

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Έστω μία συνεχής συνάρτηση  $s'$  ένα διάστημα  $[α, β]$ .  
Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να  
αποδείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

**Μονάδες 10**

- B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του  
Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 5**

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,  
γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που  
αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η  
πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι  
λανθασμένη.

- α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν  
είναι γνησίως μονότονες.

**Μονάδες 2**

- β. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ ,  
τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$   
σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται κάτω από τη  
γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο  
επαφής τους.

**Μονάδες 2**

- γ. Το ολοκλήρωμα  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα  
των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $a, \beta$  πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

**Μονάδες 2**

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $l$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , όπου  $\beta$  και  $\gamma$  πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι  $\beta = -1$  και  $\gamma = 1$ .

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι  $z_1^3 = -1$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού  $w$ , για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ ,  $x > 0$ .

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του  $k$  έτσι ώστε η  $g$  να είναι συνεχής.

**Μονάδες 6**

ii. Αν  $k = -\frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, e)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \geq 0$ . Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t f(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

**Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $h(1)=2$ , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t)dt$

**Μονάδες 6**

ii. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 F(t) dt = \frac{1}{2}F(1)$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ