ΘΕΤΙΚΟ φροντιστήριο
Α. Οικονομόπουλος – Κ. Ρούτης
Κάνιγγος 12, Πλ.Κάνιγγος
τηλ. 210 3824659, 210 3830085
Internet: www.thetiko.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 28.

Α2. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 87.

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Β2.

- Αφού $P(\omega_1) \neq P(\omega_3)$ τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω δεν είναι ισοπίθανα, οπότε χρησιμοποιώ τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας και $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$.
- Αν $\Gamma = \{\omega_3\}$ έχουμε: $\Gamma \subseteq A'$, άρα $P(\Gamma) \leq P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A')$
- Αν $\Delta = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ τότε: $A' \subseteq \Delta$, άρα $P(A') \leq P(\Delta) = 1 - P(\omega_1) = \frac{3}{4}$

Β3.

$P(A') = \frac{3}{4}$ και $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, άρα:

- $P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$
- $P(\omega_4) = P(A) - P(\omega_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

α΄ τρόπος:

$$P[(A-B)\cup(B-A)] \overset{\left[\substack{(A-B),(B-A) \\ \text{ασυμβίβαστα}}\right]}{=} P(A-B) + P(B-A) =$$

$$= P(\omega_4) + P(\omega_3) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

β΄ τρόπος:

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$$

$$= \frac{1}{4} + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2P(\omega_1) =$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{7}{12} - 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

α΄ τρόπος:

Για το $P(A' - B')$:

- $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

- $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$
- $A' - B' = \{\omega_3\}$, δηλαδή $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

β΄ τρόπος:

- $P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) =$

$$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Θεωρώντας την πρώτη κλάση: $[\alpha, \alpha + c)$, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ x_4 = \dfrac{\alpha + 3c + \alpha + 4c}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ 170 = 2\alpha + 7c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ c = \dfrac{170 - 100}{7} = 10 \end{array}\right\} c = 10$$

Γ2.

	x_i	f_i
$[50, 60)$	55	0,1
$[60, 70)$	65	0,3
$[70, 80)$	75	0,2
$[80, 90)$	85	0,4

Γιατί:

- $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \ (1)$ Θεωρία
- $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 = 0,5 \ (2)$
- $f_4 = 2f_3 \ (3)$
- $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 73f_3 + 85f_3 = 74 \ (4)$
- Από την (1), (2): $\frac{1}{2} f_3 + f_4 = 0,5$ και $f_4 = 2f_3$

Άρα $\frac{1}{2}f_3+2f_3=0,5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}f_3=0,5 \Leftrightarrow \boxed{f_3=0,2}$, $\boxed{f_4=0,4}$

Οπότε η $\xrightarrow{(1)} f_1+f_2=0,4$, δηλαδή $f_2=0,4-f_1$ και

η $\xrightarrow{(4)} 55f_1+65(0,4-f_1)+15+34=74 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 55f_1+26-65f_1+49=74 \Leftrightarrow -10f_1=-1 \Leftrightarrow f_1=\frac{1}{10}=0,1$

και $f_2=0,4-f_1=0,3$

Γ3.

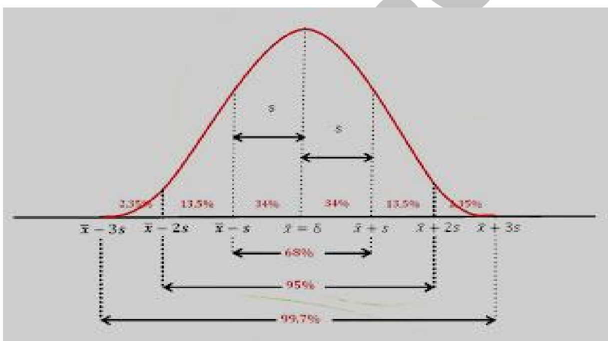
- $f_1=0,1 \Leftrightarrow \nu_1=0,1\nu$
- $f_2=0,3 \Leftrightarrow \nu_2=0,3\nu$
- $f_3=0,2 \Leftrightarrow \nu_3=0,2\nu$
- Οπότε η ζητούμενη $\bar{x}'$ είναι:

$$\bar{x}'=\frac{55\cdot 0,1\nu+65\cdot 0,3\nu+75\cdot 0,2\nu}{0,6\nu} \Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{5,5+19,5+15}{0,6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{40,0}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{400}{6} \Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{200}{3}$$

Γ4. Από την θεωρία έχουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τα στοιχεία της που είναι:

Από την καμπύλη έχουμε ότι το:



- 2,5% έχει τιμή τουλάχιστον $\bar{x}+2s$.
- Και από τα δεδομένα το 2,5% έχει τιμή τουλάχιστον 74. Άρα $\boxed{\bar{x}+2s=74}$ (1).
- Το 16% από τη θεωρία είναι το πολύ $\bar{x}-s$ και από τα δεδομένα το πολύ 68. Άρα $\boxed{\bar{x}-s=68}$ (2)

- Από $(1),\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}+2s=74 \\ \bar{x}-s=68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}+2s=74 \\ \underline{2\bar{x}-2s=136\ (+)} \end{cases}$

$$3\bar{x}=210 \Leftrightarrow \bar{x}=70,\ \text{άρα}\ s=2$$

- Οπότε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}=0,026<10\%$, δηλαδή ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Η εφαπτομένη στο $(1,f(1))$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \overset{f'(x)=\ln x+1}{\Leftrightarrow} y-\kappa=x-1 \Leftrightarrow y=x+\kappa-1$$

Τα σημεία τομής της με τους άξονες είναι: $A(0,\kappa-1)$ και $B(1-\kappa,0)$.

Οπότε $(OAB)=\frac{1}{2}|\kappa-1|\cdot|1-\kappa|=\frac{(\kappa-1)^2}{2}$ και

$$\frac{(\kappa-1)^2}{2}<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow |\kappa-1|<2 \Leftrightarrow -2<\kappa-1<2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -1<\kappa<3 \\ \kappa>1 \end{matrix}\right\} \boxed{\kappa=2}$$

Δ2.

α) Αφού τα σημεία ανήκουν στην (ε):

$y=x+\kappa-1$, οπότε από εφαρμογή του βιβλίου

$$\bar{y}=\bar{x}+\kappa-1 \underset{\kappa=2}{\overset{\bar{y}=31}{\Rightarrow}} \bar{x}=31-1=30$$

β) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{1}^{20}x_i+20\cdot 3+\sum_{20}^{35}x_i+\sum_{35}^{50}x_i-15\lambda}{50}$

Θέλουμε $\bar{x}=31$, άρα $31=\dfrac{\sum_{1}^{50}x_i+60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow 1550=30\cdot 50+60-15\lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15\lambda=1500+60-1550 \Leftrightarrow 15\lambda=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$f'(x)=\ln x+1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Για το εύρος διατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \overset{\text{f γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0<2-\frac{1}{e}=f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e).$$

Άρα:

$$0=f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

και $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=f(e)-0=e\ln e+2=e+2$

και $$\bar{x}=\frac{f(e)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{e+2+\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2}{5}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{e+8+\ln\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}}{5}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{e+8+7}{5}\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{e+15}{5}$$

Δ4.

- Ο Ω έχει ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα οπότε χρησιμοποιούμε τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας.
- Τα ενδεχόμενα Α, Β δίνονται περιγραφικά, οπότε για να προσδιορίσουμε τα στοιχεία τους εργαζόμαστε με τις συνθήκες τους και έχουμε:

Για το Α: $f'(x) = εφω > 0$, άρα $x > \frac{1}{e}$, δηλαδή $A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$

Για το Β: $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + \cancel{2} > \ln t + \cancel{1+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$$

αλλά $t - 1 < 0$, για $t \neq t_{30}$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} \ln t < 0 = \ln 1 \\ t \in \Omega \end{array}\right\} t = t_1,\ t_2,\ ...,\ t_{29}$$

$B = \{t_1,\ t_2,\ ...,\ t_{29}\}$

Άρα:

α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

β) $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$, γιατί $A \cap B = \{t_{11},\ t_{12},\ ...,\ t_{29}\}$

$N(A \cap B) = 19$

<u>Επιμέλεια</u>: **Μακρίδης Ηλίας**

Μπαμπέ Αφροδίτη

Πεφάνης Κων/νος