ΘΕΤΙΚΟ φροντιστήριο
Α. Οικονομόπουλος – Κ. Ρούτης
Κάνιγγος 12, Πλ.Κάνιγγος
τηλ. 3824659,3830085
Internet: www.thetiko.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. *Βλέπε*: σελίδα 31 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία. *Βλέπε*: σελίδα 148 του σχολικού βιβλίου.

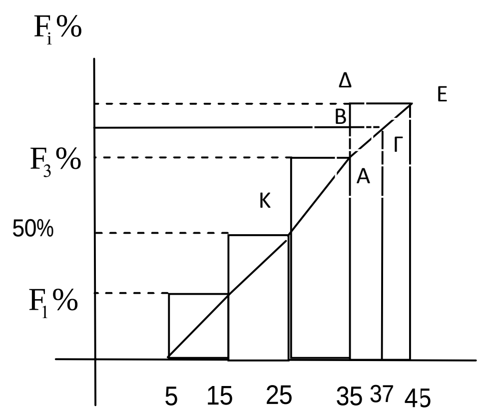
Α3. Θεωρία. *Βλέπε*: σελίδα 96 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το 50% φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα. Αυτή τέμνει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % στο σημείο Κ, το οποίο προβάλουμε στον οριζόντιο άξονα. Άρα δ=25.



B2.

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	α+4=12	$f_1 = 20$	12	$F_1 = 20$
[15-25)	20	3α – 6=18	$f_2 = 30$	30	$F_2 = 50$
[25-35)	30	2α-8=24	$f_3 = 40$	54	$F_3 = 90$
[35-45)	40	α-2=6	$f_4 = 10$	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

$$v = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Rightarrow v = 7\alpha + 4$$

$$F_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow 0,50 = \frac{\alpha+4}{7\alpha+4} + \frac{3\alpha-6}{7\alpha+4} \Rightarrow 0,5 = \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,5\alpha + 2 = 4\alpha - 2 \Rightarrow 4 = 0,5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4}{0,5} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8}$$

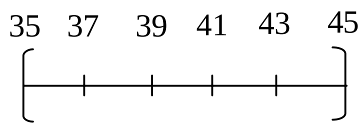
B3. $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i v_i}{v} = \dfrac{120+360+720+240}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$ Άρα $\overline{x} = 24$

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 v_i \Rightarrow s^2 = \frac{1}{60}\left\{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6\right\}$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{60}\left(14^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 18 + 6^2 \cdot 24 + 16^2 \cdot 6\right) \Rightarrow s^2 = 84 \Rightarrow s = \sqrt{84} \Rightarrow \boxed{s \cong 9,17}$$

B4.

✍ **α΄ τρόπος:** Το τμήμα πάνω από τα 37 min αντιστοιχεί στα $\frac{4}{5}$ της κλάσης.



$$\frac{4}{5} \cdot 10 = \frac{40}{5} = 8$$

Άρα το 8% χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά (min).

✍ **β΄ τρόπος:** Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων:

$$A\hat{B}\Gamma \simeq A\hat{\Delta}E \quad \text{άρα} \quad \frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{AB}{10}=\frac{2}{10} \Leftrightarrow AB=2$$

Άρα το 8% χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά (min).

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Αφού ο μαθητής επιλέγεται τυχαία θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: Ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά

Ι: Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά

Ισχύει $P(\Gamma)=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$ και $P(\Gamma\cap I)=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}=$$

$$=\frac{2(-1-1)}{-1\left(\sqrt{1+3}+2\right)}=1$$

Είναι $P(\Gamma\cup I)=1$

Γ1. Είναι $P(\Gamma\cup I)=1$ άρα το ενδεχόμενο $\Gamma\cup I$: «Ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες» είναι βέβαιο.

Γ2. Ισχύει:

$$P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)\Leftrightarrow$$

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+\nu+2-(\nu+1)\Leftrightarrow$$

$$\nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=3$$

Η τιμή $\nu=0$ απορρίπτεται διότι από την υπόθεση $\nu\geq 3$

Γ3. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $\Gamma-I$, $I-\Gamma$ είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:

$$P\left[(\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)\right]=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap I)+P(I)-P(I\cap\Gamma)=$$

$$=\left[P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)\right]-P(I\cap\Gamma)=$$

$$=P(\Gamma\cup I)-P(I\cap\Gamma)=1-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\overset{\nu=3}{=}1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4. Είναι $N(\Gamma\cap I)=32$ και $P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}$ (κλασικός ορισμός πιθανότητας, αφού οι μαθητές έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής).

Άρα $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=\frac{32}{N(\Omega)}\overset{\nu=3}{\Rightarrow}\frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Rightarrow N(\Omega)=80$

Άρα οι μαθητές της τάξης είναι $\nu=80$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{-(\ln x-1)^2}{x^2}$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $x_0=e$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΛΜ είναι

$$E=\beta\cdot\upsilon=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}\ \text{Δηλαδή}\ E(x)=1+\ln^2 x$$

Η E(x) είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με $E'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$

$E'(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$.Άρα:

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		-		+	
$E(x)$		↘		↗	
			Ολικό ελάχιστο		

Άρα για x=1 το εμβαδό γίνεται ελάχιστο και τότε $OK=x=1, f(1)=1=O\Lambda$ οπότε το ΟΚΛΜ είναι τετράγωνο.

Δ3. $\lambda=f'(1)$ αφού η εφαπτομένη στο $\Sigma(1,f(1))$

$\lambda=-1$ είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$

Άρα $\varepsilon: y=-x+\beta$ και για τα 10 σημεία της έχουμε :

$y_i=-x_i+\beta$ οπότε από εφαρμογή του βιβλίου $\bar{y}=-\bar{x}+\beta\Rightarrow\bar{y}=-10+\beta$ και
$s_y=s_x=2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει : $CV_y\le\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}\le\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{2}{|-10+\beta|}\le\dfrac{1}{10}$

$$\frac{|-10+\beta|}{2}\ge 10\Rightarrow|-10+\beta|\ge 20\qquad\begin{cases}-10+\beta\ge 20\Rightarrow\beta\ge 30\\ -10+\beta\le -20\Rightarrow\beta\le -10\end{cases}$$

Άρα $\beta\in(-\infty,-10)\cup[30,+\infty)$

Δ4. $f\left(P(A)\right)+f\left(P\left(A\cap B\right)\right)\geq 2f\left(P\left(A\cup B\right)\right)$

Ισχύει $A\subseteq A\cup B$ άρα $P\left(A\right)\leq P\left(A\cup B\right)\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f\left(P\left(A\right)\right)\geq f\left(P\left(A\cup B\right)\right)(1)$

Ισχύει $A\cap B\subseteq A\cup B$ άρα

$P\left(A\cap B\right)\leq P\left(A\cup B\right)\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f\left(P\left(A\cap B\right)\right)\geq f\left(P\left(A\cup B\right)\right)(2)$

Από $(1)+(2)\Rightarrow f\left(P\left(A\right)\right)+f\left(P\left(A\cap B\right)\right)\geq 2f\left(P\left(A\cup B\right)\right)$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

Μπαμπέ Αφροδίτη

Πεφάνης Κωνσταντίνος