ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α2.

α. Ψευδής.

β. Έστω $f(x) = |x|$

Η f είναι συνεχής στο R και στο $x_0 = 0$. Αποδεικνύω ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

Αν $x > 0$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$

Αν $x < 0$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$

Άρα, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Α3. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου.

Α4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$A_f = (0, +\infty)$ $\qquad\qquad$ $A_g = R - \{1\}$

$A' = \{x / x \in A_g : g(x) \in A_f\} =$

$A' = \left\{x \, / x \in R - \{1\} : \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty)\right\}$

$\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

$A' = (0,1)$ και (fog)(x) = f(g(x)) = f($\frac{x}{1-x}$) = ln($\frac{x}{1-x}$)

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \underset{1-1}{\overset{\ln}{\Leftrightarrow}} \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = x(1+e^y) \overset{e^y+1\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x = \frac{e^y}{1+e^y}$$

$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{1+e^y} < 1$ Ισχύει:

$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\qquad$ $h^{-1}: R \to R$

B3. $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

Η φ είναι συνεχής παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών παραγωγίσιμων.

$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ φ = γνησίως αύξουσα στο R.

$\varphi''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3}$

$\varphi''(x) = e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x = x \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2x} > 0$

$\Leftrightarrow e^x > e^{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$		Σημείο Καμπής	

Ομοίως $\varphi''(x) < 0$ για $x > 0$.

Στο $x_0 = 0$ η φ παρουσιάζει σημείο καμπής $P(0, \varphi(0))$ και $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ το $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

B4.

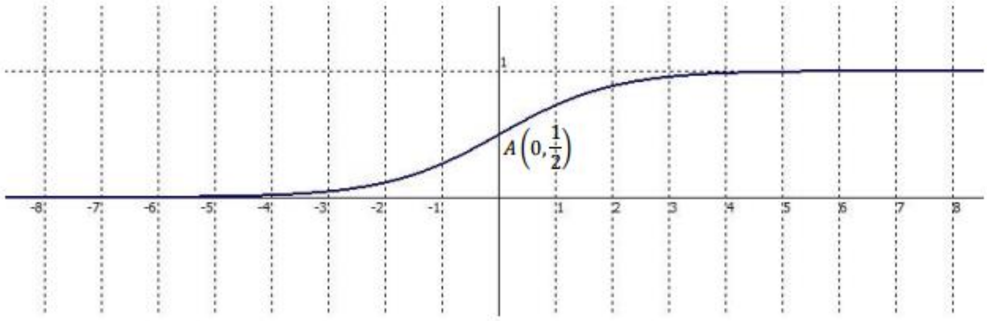
$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \left(\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \right)$$

Άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γραφική παράσταση:



Γ1. $f(x) = -\eta\mu x \qquad x \in [0,\pi]$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \qquad x \in [0,\pi]$

Έστω (ε) εφαπτομένη της C_f και $(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής.

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0)$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon): -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) (1)$$

Αρκεί να δείξω ότι η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Θεωρώ: $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + \frac{\pi}{2}, x \in [0,\pi]$

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{2}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in [0,\pi]$$

$$\varphi'(x) \geq 0 \underset{\eta\mu x \geq 0}{\overset{x \in [0,\pi]}{\Rightarrow}} \frac{\pi}{2} - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{2}$$

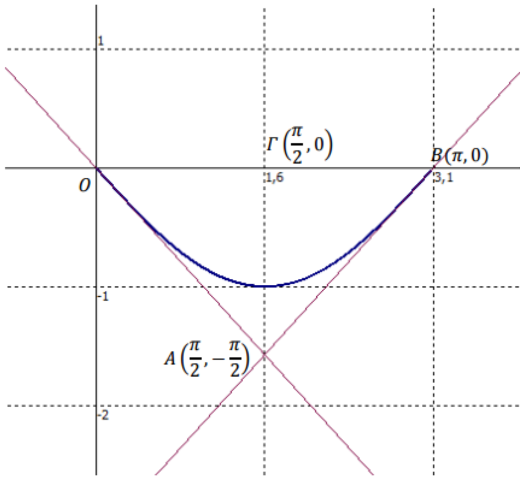
και $\left.\begin{matrix} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(\pi) = 0 \end{matrix}\right\}$ μοναδικές ρίζες

	0		π/2		π
φ΄(x)	0	+	0	-	0
φ(x)		γνησίως αύξουσα		γνησίως φθίνουσα	

Για $x_0 = 0, (\varepsilon_1): y = -x$

Για $x_0 = \pi, (\varepsilon_2): y = x - \pi$

Γ2.



$$E_1 = 2\int_0^{\pi/2}(-\eta\mu x + x)dx = 2\left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 - 0\right)$$

$$= 2\left(0 + \frac{\pi^2}{8} - 1\right) = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$$

$$E_2 = \int_0^{\pi}(-f(x))dx = \int_0^{\pi}\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{2\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3.

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi} = +\infty$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x + x) = 0 + \pi = \pi$

$\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x - x + \pi) = 0$

με $-\eta\mu x - x + \pi > 0 \Leftrightarrow f(x) > x - \pi$ από κυρτότητα

Γ4. Ισχύει $f(x) > \varepsilon_2$

$$f(x) > x - \pi \overset{\chi>0}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)dx$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [x - \pi\ln|x|]_1^e$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - \pi\ln e - 1 + \pi\ln 1$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, x \in [-1,0) \\ e^x ημx, x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Δ1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x ημx\right) = e^0 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\}$$ f συνεχής στο 0 και f συνεχής στο $[-1,0)$ ως άρρητη
f συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών

Άρα f συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Για $-1 \le x < 0 : f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{4/3}\right)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$

$0 < x < \pi : f'(x) = \left(e^x ημx\right)' = e^x ημx + e^x συνx = e^x\left(ημx + συνx\right)$

και $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{4/3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[-(-x)^{1/3}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x ημx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x \cdot \frac{ημx}{x}\right) = e^0 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Για $-1<x<0: f'(x)<0$

Για $0<x\leq\pi: f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\geq 0\overset{e^x>0}{\Rightarrow}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\geq 0$

Λύνω: $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Rightarrow}\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\overset{0<x<\pi}{\Rightarrow}x=\dfrac{3\pi}{4}$

Κρίσιμα σημεία: $x=0$ και $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Δ2. Από (Δ1) $f'(x)<0$ για $-1<x<0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,π] άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα που ορίζουν οι ρίζες της και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0, f'(\pi)=-e^{\pi}<0$

	-1	**0**	**3π/4**	**π**
f΄(x)	-	+	0 -	
f(x)	γνησίως φθίνουσα	γνησίως αύξουσα	γνησίως φθίνουσα	

Τ.Μ. $f(-1)=1$
Τ.Ε. $f(0)=0$
Τ.Μ. $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{3\pi/4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Σύνολο Τιμών: $\left[0,\dfrac{\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{2}\right]$
Τ.Ε. $f(\pi)=0$

Δ3. $E=\int_0^{\pi}\left|f(x)-g(x)\right|dx$

Για $x\in[0,\pi]$:

Θεωρώ: $f(x)-g(x)=e^x\eta\mu x-e^{5x}=e^x\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)$

Θεωρώ: $h(x)=\eta\mu x-e^{4x},x\in[0,\pi]$

Θεωρώ: $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-4e^{4x},x\in[0,\pi]$

Θεωρώ: $h''(x)=-\eta\mu x-16e^{4x}=-\left(\eta\mu x+16e^{4x}\right)<0,$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Άρα η h΄ γνησίως φθίνουσα και $h'(0)=1-4e^0<0$ οπότε $h'(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Άρα η h γνησίως φθίνουσα στο [0,π] και $h(0)=1<0$ οπότε $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Τότε $f(x)-g(x)<0$ άρα $E=\int_0^{\pi}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\eta\mu x\right)dx=$

$$=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx\overset{(2)}{=}$$
$$=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-I_1=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

$$(2):I_1=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=$$
$$=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$$

Δηλαδή: $I_1=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-I_1\Rightarrow I_1=\dfrac{\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_1=\frac{e^{\pi}\eta\mu\pi-e^0\eta\mu 0-e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi+e^0\sigma\upsilon\nu 0}{2}\Rightarrow I_1=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\overset{16e^{-3\pi/4}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$$

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}+\frac{(4x-3\pi)^2}{16}\\&\text{Από } (\Delta 2) \text{ ισχύει: } f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}\end{aligned}\right\}\frac{(4x-3\pi)^2}{16}\le 0$$

Ισχύει μόνο για $\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=0\Leftrightarrow 4x=3\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

__Επιμέλεια__: **Βασιλάτος Κοσμάς**

Κανακάκης Γιώργος

Κατωπόδης Σπύρος

Μακρίδης Ηλίας

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Πεφάνης Κωνσταντίνος

Ρούτης Κωνσταντίνος